非定常密度場計測手法の開発

—密度場再構成手法についての検討—

学正員 真 田 有 吾^{*} 正員 戸 田 保 幸^{**}
学正員 濱 地 佐 知 子^{***}

The development of the new technique which measures the unsteady density field
- The examination on density field reconstruction method -

by Yugo Sanada, *Student Member* Yasuyuki Toda, *Member*
Sachiko Hamachi, *Student Member*

Summary

This paper propose the new method called "Random Pattern Refractometry Technique" which is possible to measure the unsteady density fields in stratified flows. In this method, the gradient vector fields of the refractive index can be derived from measured displacements of random pattern between two pictures captured before and after density distribution changed. And density fields can be reproduced by integration of gradient vector field. It is mathematically equal to reconstruction of the surface height from the gradient field problem. We can solve this problem by composing the Poisson equation using measured gradient vectors in experiments. To solve this equation, the source term had been computed from the divergence of measured gradient vectors and discretized by finite difference method or Fourier transform in previous studies. But these solutions have a common problem that the errors of reconstructed results further increase by constituting the source term from the differential of gradient vector with the measurement error. In this paper, we propose a new idea using derived solution of the Poisson equation that source term is assumed as unknown function from potential theory. The derived solution of Poisson equation shows that the surface height can be obtained if strength of each source in the field is determined. Since the number of gradient values is twice as that of source intensities, we can determine their strength by making overdetermined linear systems from the condition that gradient vectors from the derived solution corresponds to measured ones. And, we can expect an effect to reduce the impact of measuring errors when solving these overdetermined linear systems with least squares method. We validate this method by applying to simulated data and observation data from a lock-exchange flow.

1. 結 言

非定常な密度分布を光学的に取得する手法としては、シャドウグラフ、シュリーレン、マッハツェンダ干渉法、ホログラムといったものが挙げられ、¹⁾ 古くからさまざまな手法が提案されている。これらは一般に特殊な光学系と高度な設定を必要とし、水理実験に用いるには煩雑である。そこで、著者らは民生用ビデオカメラと液晶ディスプレイを用いて安価に構築可能で汎用的な非定常密度場計測システムとして、「ランダムパターン屈折率測定法」の開発を行っている。²⁾ この手法では、参照画像として液晶ディスプレイに表示したランダムパターン画像を使用し、計測対象となる流

れ場を経由して密度混合が生じる前後で撮影し、PIV（粒子画像流速測定法）で用いられる直接相互相関法³⁾を用いて算出した変位から屈折率勾配を計測する方法である。屈折率の勾配から屈折率分布を再構成する問題は、勾配からの曲面再構成問題と数学的に等価であり、計測された勾配データを用いて Poisson 方程式を構成し、差分法やフーリエ変換などを用いて解く方法が考えられてきた。^{4) 5)} しかし、変位追跡の際発生する過誤ベクトルにより、再構成結果の劣化が生じるという問題点があった。そこで、前報²⁾ではポテンシャル理論に基づき Poisson 方程式のソース項をあえて未知関数ととらえて導出した解と最小二乗法を用いて、より確からしい曲面としての屈折率分布を再構成する手法を提案した。これに引き続き本論文では、特にこの再構成手法に重点を置き、境界部も含めた定式化を行い、シミュレーションおよび実験データを用いた再構成を行うことで、本手法の有効性を確認する。

*大阪大学大学院工学研究科地球総合工学専攻
士後期課程

**大阪大学大学院工学研究科地球総合工学専攻
船舶海洋工学部門

***大阪大学大学院工学研究科地球総合工学専攻
船舶海洋工学コース博士前期課程

2. 密度場再構成手法

2.1 解析原理

前報²⁾で示したように、ランダムパターン屈折率測定法では、変位追跡結果 u, v および水路幅 L から屈折率の対数関数の勾配が以下の関係式から得られる。(ただし、ここでは水路幅方向の屈折率変化の少ない二次元的な密度場を仮定する。)

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{L^2}{2} \frac{\partial (\ln n(x, y))}{\partial x} \\ v(x, y) = \frac{L^2}{2} \frac{\partial (\ln n(x, y))}{\partial y} \end{cases} \quad (1)$$

基準となる屈折率値 (たとえば清水) を n_0 、微小変化分を Δn として、 $\Delta n(x, y)/n_0 \ll 1$ と仮定した場合、

$$\ln n(x, y) \cong \ln n_0 + \frac{\Delta n(x, y)}{n_0} \quad (2)$$

が成り立つ。これより、上記(1)式を書き換えれば、

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta n(x, y)}{\partial x} = \frac{2n_0}{L^2} u(x, y) \\ \frac{\partial \Delta n(x, y)}{\partial y} = \frac{2n_0}{L^2} v(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

となる。(3)式より計測したランダムパターンの変位量 u, v より得られる基準屈折率 n_0 からの差 Δn の勾配が全領域において得られる。この Δn の勾配を全領域において積分することができれば、屈折率分布およびそれに対応する密度分布が再構成できることになる。

2.2 Poisson 方程式の構成

ここで $\phi = \Delta n(x, y)$ とおけば、これは曲面 ϕ の勾配 $\text{grad } \phi$ が得られている時、勾配から ϕ 自身を再構成する問題 (「勾配からの曲面再構成問題」と) 数学的には等価である。ここに、

$$m(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4)$$

とおけば、一般に $m(x, y) \neq 0$ であることにより、 ϕ を再構成する一つのやり方として、計測された $\text{grad } \phi$ から以下の Poisson 方程式を構成し、 ϕ をこの Poisson 方程式の解として算出する方法を考えることができる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = m(x, y) \quad (5)$$

今、計測量として $u = \partial \phi / \partial x$ および $v = \partial \phi / \partial y$ は計測した変位量から求まっているため、ソース項である $m(x, y)$ は u, v

の微分値から計算することが可能である。これより(5)式の Poisson 方程式を ϕ について解くことで、 ϕ を求めることができる。上記ソース項 $m(x, y)$ を計測値から求め、構成した Poisson 方程式は、差分法⁴⁾やフーリエ変換⁵⁾などを用いて解くことが可能である。しかし、計測値は相関法による変位追跡時に過誤ベクトルを含んでしまうため、その微分値を足し合わせるとソース項の誤差が増大する可能性があり、好ましくない。また u, v がコーシー・リーマンの関係を正しく満たし、一価の関数を構成できる勾配ベクトルであるならば、どのような経路をたどって線積分を行おうと ϕ は決定可能であり、 u あるいは v どちらか一方の値のある場所を使用することにより容易に求めることは可能である。しかしながら、前述のように今回 u, v は計測値であるためコーシー・リーマンの関係を満足しない変位ベクトルも存在し得る。そこで、前報では m を未知の関数として ϕ を吹き出し分布により表現し、 u, v の計測値を直接用いて吹き出しの強さを決定し ϕ を再構成する手法を提案した。本論文では、前報に加えて再構成の対象となる領域の境界部も考慮した定式化および離散化を行う。

2.3 ソース項を未知関数とした ϕ の導出と離散化方程式の構成

Fig. 1 Calculation domain surrounded by exterior boundary B_e and interior boundary B_i

ポテンシャル理論に基づいた特異点分布による表現を用いて、上記(5)式の Poisson 方程式のソース項を未知関数として ϕ を導出することを考える。Fig. 1 のような積分経路を考え、Green の定理を用いると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & \iint_S U(x, y; \xi, \eta) m(\xi, \eta) d\sigma \\ & + \int_{B_i} U(x, y; \xi, \eta) q(\xi, \eta) dl + \text{Const.} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、

$$U(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln r \quad \left(r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \right) \quad (7)$$

である。

(6)式第1項は、領域S内の点 (ξ, η) に置かれた強さ $m(\xi, \eta)$ の点吹き出しによる点 (x, y) への誘起ポテンシャルの重ねあわせ、第2項は、境界B上の点 (ξ, η) に置かれた強さ $q(\xi, \eta)$ の点吹き出しによる点 (x, y) への誘起ポテンシャルの重ねあわせである。第3項のConst. は定数であり、境界条件により決定できる。これを前報と同様に、 ϕ の導出解を吹き出し分布で与えることによって、後述する u, v による回転成分の生じないコーシー・リーマンの関係式を全ての点において満たす曲面を再構成できる。(6)式右辺第一項を矩形内で一様な密度を持つ矩形吹き出し、前報から新たに追加した右辺第二項を線分上で一様な密度の線状吹き出しによりそれぞれ離散化すると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & \sum_{i=1}^{NS} m_i \iint_{S_i} U(x, y; \xi, \eta) d\sigma \\ & + \sum_{j=1}^{NB} q_j \int_{B_j} U(x, y; \xi, \eta) dl + \text{Const.} \end{aligned} \quad (8)$$

ϕ の導出解とその勾配 u, v との関係は以下ようになる。

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \sum_{i=1}^{NS} m_i \iint_{S_i} \frac{\partial U(x, y; \xi, \eta)}{\partial x} d\sigma \\ & + \sum_{j=1}^{NB} q_j \int_{B_j} \frac{\partial U(x, y; \xi, \eta)}{\partial x} dl \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} v(x, y) = & \sum_{i=1}^{NS} m_i \iint_{S_i} \frac{\partial U(x, y; \xi, \eta)}{\partial y} d\sigma \\ & + \sum_{j=1}^{NB} q_j \int_{B_j} \frac{\partial U(x, y; \xi, \eta)}{\partial y} dl \end{aligned} \quad (10)$$

この(9), (10)式の左辺に計測した u, v をそれぞれ与えることで、 m, q を決定することにする。これら二つの式は、計測した勾配値と再構成した ϕ の勾配値が一致するための条件式ということになる。(9), (10)式において未知数である吹き出し強さ m, q に対して、計測値として既知である量は u と v をあわせて m, q の数の約二倍あることから、過剰定義の最小二乗問題として解くことにより、 m および q を決定する。これにより、勾配ベクトルの過誤成分が排除され、より確からしい曲面を決定できることが期待できる。なお、計算時にはFig. 2に示すようにスタガード配置とし、吹き出しの中心を計測点から x および y 方向に矩形の一辺の長さを1としてそれぞれ-0.25ずつずらした。これは、各吹き出し自身の自己に対する影響を考慮する為である。

Fig. 2 Staggered grid for calculation

3. シミュレーションデータによる本手法の有効性の確認

シミュレーションデータを用いた再構成を行い、本手法の有効性について確認する。式(11)およびFig. 3に示すような成層化した密度場を模したデータを与えた。

$$\phi(x, y) = \begin{cases} 2 & (-\pi/2 \leq x \leq \pi/2, y < -\pi/2) \\ 1 - \sin y & (-\pi/2 \leq x \leq \pi/2, -\pi/2 \leq y \leq \pi/2) \\ 0 & (-\pi/2 \leq x \leq \pi/2, y > \pi/2) \end{cases} \quad (11)$$

Fig. 3 Original data of phi

はじめに、前報および今回用いた手法の比較検討を行う。

(11)式で与えられる ϕ の勾配データを元に前報と今回の手法で再構成した結果をFig. 4およびFig. 5にそれぞれ示す。Fig. 4および5はそれぞれ前報と同様に領域内部の矩形吹き出しのみで再構成した結果と、前報に加えて境界上に線吹き出しを追加して再構成した結果である。違いを見やすくするため、 x 座標を一定で ϕ を切り出したラインを全て重ね合わせている。前報のように矩形吹き出し単体で解いた場合は外縁の矩形吹き出しが線状吹き出しの代替をするため、外縁付近で再構成結果に歪みが生じる。そのため、本来一本の線に重なるはずのラインが歪み再構成結果にばらつきが生じている。一方、境界部の線状吹き出しも考慮に入れた本手法に

よる結果 Fig. 5 は完全に同一のラインに重なっており、前報に比べ再構成領域の外縁部において発生していた歪みの改善が見られる。

Fig. 4 Reconstructed result by previous method
(without boundary integral)

Fig. 5 Reconstructed result by present method
(with boundary integral)

次に、本手法による最小二乗法による勾配ベクトルのノイズの低減効果についても調査した。(11)で与えられる ϕ の勾配データに実際の過誤ベクトルを模擬するため、Fig. 6のような空間内でランダムに発生するノイズを勾配場に与えた。格子点数は、 x 方向 $50 \times y$ 方向 50 とした。このデータを元に再構成した ϕ をFig. 7および ϕ の勾配をFig. 8に示す。なお、再構成時の境界条件は全周においてその法線方向の ϕ の二階微分値がゼロとなるようにした。具体的には境界線上において再構成後の法線方向勾配と計測値の法線方向勾配が等しくなるようにした。Fig. 7より高さ ϕ は良好に再構成されていることがわかる。またFig. 8からノイズにより乱された勾配場がノイズを加える前の元データに近い形に回復されており、これにより、再構成と同時に過誤ベクトルの

補正が行えていることがわかる。

Fig. 6 Original gradient of phi
(added pulse noise)

Fig. 7 Reconstructed result of phi

Fig. 8 Gradient of Reconstructed phi

4. 面渦度を用いた回転成分軽減法

空間内でランダムに発生する誤差に対しては上記の手法のままで有効であるが、実際の実験において取得した勾配ベクトルの回転成分を計算すると、Fig. 9 のコンターに示すような分布が生じてしまう。これは、ある局所的な領域に集中してなだらかに分布するような誤差成分である。一価の関数である条件を完全に満たすためには、これらは本来ゼロとなるべきである。こうした誤差成分は上述した手法や平滑化フィルタ等では完全に取りきけることは難しかったため、ここでは面渦度とその誘起速度を用いた誤差除去法を考案し、その適用を試みた。なお、この取りきれない回転成分誤差の発生については使用光源、画像取得解像度および変位追跡アルゴリズムが要因と考えられ、それらについての詳細な検討が必要であるが、本論文の内容を越えるので次報において報告する。

Fig. 9 Rotation of measured gradient

4.1 勾配データからの回転成分および補正值の算出

勾配を積分した結果である $\phi(x, y)$ が積分経路の選び方によらない一価の関数であるためには、勾配ベクトル $\mathbf{u} = (\partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y) = (u, v)$ について、次の条件が成り立っていないといけない。

$$\text{rot}(\mathbf{u}) = \text{rot}(\text{grad}\phi) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

前述のように $\mathbf{u}$ の回転成分 $\text{rot}(\mathbf{u})$ が至るところでゼロとなるべきであるが、計測値に含まれるノイズのためにそうならない箇所が発生する。そこで、計測値 $u_{ij} = u(x_i, y_j)$, $v_{ij} = v(x_i, y_j)$ からノイズの指標となる回転成分を検出し、それらを軽減するよう u, v を修正することを考える。

Fig. 10 Integration route of circulation

Fig. 10 のような積分経路を考え、式(13)および(14)に従い点 (i, j) における回転成分 $\text{rot}(\mathbf{u})_{i,j}$ を周囲 8 点の勾配データから与えられる循環量 $\Gamma_{i,j}$ に基づいて求め、これを $\omega_{i,j}$ とすると以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \Gamma_{i,j} = & \frac{1}{2} (u_{i-1,j-1} + 2u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1}) dx \\ & + \frac{1}{2} (v_{i+1,j-1} + 2v_{i,j-1} + v_{i-1,j-1}) dy \\ & - \frac{1}{2} (u_{i+1,j+1} + 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) dx \\ & - \frac{1}{2} (v_{i-1,j+1} + 2v_{i,j+1} + v_{i+1,j+1}) dy \end{aligned} \quad (13)$$

$$\omega_{i,j} = \text{rot}(\mathbf{u})_{i,j} \cong \Gamma_{i,j} / (4dx dy) \quad (14)$$

(13) および (14) 式から得られた $\mathbf{u}$ の回転成分 $\omega_{i,j}$ の逆符号の回転成分をもつような面渦度を考え、その誘起速度を計測値に加えれば、計測値からノイズである回転成分が打ち消され、ほぼ完全に除去することができる。すなわち、 u, v それぞれの補正值 Δu および Δv を以下の (15) 式で算出した u, v に足し合わせて補正を行った。

$$\begin{cases} \Delta u = -\sum_{i,j} \omega_{i,j} \left[\iint_{S_{i,j}} \text{Im} \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{z - (\xi + i\eta)} \right\} d\xi d\eta \right] \\ \Delta v = -\sum_{i,j} \omega_{i,j} \left[\iint_{S_{i,j}} \text{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{z - (\xi + i\eta)} \right\} d\xi d\eta \right] \end{cases} \quad (15)$$

ここに、 $S_{i,j}$ は Fig. 10 の灰色で示す領域で、点 (i, j) を中心とする面積 $dx \times dy$ の領域である。

4.2 実験における計測値への適用

重力流の水門開放実験において計測した勾配データに本手法を適用し屈折率分布の再構成を行った。実験および解

析方法については前報²⁾と同じであるが、ここでは概略のみ述べる。今回も水門開放後、進行する重力流の先端部を側面から撮影し、屈折率の勾配分布を測定した。水門開放前後で撮影したランダムパターン画像間の変位量は直接相互相関法で解析した。横 17.6 cm×縦 4.8 cm の領域を 440 pixel × 120 pixel で撮影し、1 cm が 25 pixel に対応している。相関法における検査領域および探査領域をそれぞれ 17 pixel × 17 pixel に設定し 8 pixel ごとに計測点を設け、隣接する計測点で検査領域が 50%オーバーラップするようにした。サブピクセル解析は、ガウス分布により行った。解析した変位量を(3)式に代入し、屈折率変化分 Δn の勾配を算出した。今回の水路幅 $L = 5$ cm である。Fig. 9 に今回測定した屈折率微小変化分 Δn の勾配ベクトル分布を示す。再構成の際は前節のシミュレーション画像の場合と同様、全周において ϕ の法線方向二階微分値、 $\partial^2 \phi / \partial n^2 = 0$ を与えた。

次に、Fig. 9 に示す勾配データから、前述した回転成分を式(13)および(14)から求め、式(15)を用いて算出した補正ベクトル Δu および Δv を Fig. 11 に示す。さらにその補正ベクトルを用いて回転成分を低減した結果を Fig. 12 に示す。Fig. 11 で重力流の密度界面付近で発生する回転成分を Fig. 12 では良好に低減できている。

Fig. 13 に計測により得られた勾配データ (Fig. 9 と勾配は同一)、Fig. 13 を元データとして、Fig. 14 および 15 が回転成分除去をせずに再構成した場合を示す。また、再構成前および再構成後の勾配ベクトル間の差を Fig. 16 に示す。式(6)および(8)からも明らかなように、本手法では再構成した曲面に回転成分無しであることを要求している。そのため再構成後の勾配データ Fig. 15 は渦無しであり、Fig. 16 は再構成前の勾配データ Fig. 9 に回転成分が存在していたことから、それらを打ち消すために再構成時に数値計算上で疑似的に追加された変位を示している。これにより Fig. 14 を再構成する際、Fig. 11 の密度界面で生じている回転成分を打ち消すために、Fig. 15 では左上部から中央部にかけて、元のデータには存在しなかった左向きの微小ベクトルが付加されている。これにより、Fig. 14 の左上部で著しい ϕ の低下が見られる。今回計測した画像では、上端がすべて一様な清水領域であるので、Fig. 14 は不自然な状態である。Fig. 17 および 18 は回転成分除去を行った Fig. 12 を元データとして再構成した場合である。Fig. 14 で過誤ベクトルにより左端に極端に値が低下していた箇所が Fig. 17 では回復している様子がみてとれる。

Fig. 11 Rotation and correction vector (Δu , Δv) Fig. 12 Rotation and measured gradient of ϕ
(After removal of rotation)

Fig. 13 Measurement result of gradient

Fig. 14 Reconstructed result of ϕ
(Without removal of rotation) Fig. 15 Gradient of reconstructed ϕ
(without removal of rotation) Fig. 16 Difference between gradient of reconstructed ϕ and original ϕ

Fig. 17 Reconstructed result of ϕ
(after removal of rotation)

Fig. 18 Gradient of reconstructed ϕ
(After removal of vorticity)

5. 結言

前報に引き続き、ランダムパターン屈折率測定法の屈折率再構成において表れる勾配からの曲面再構成問題に重点を置き、ポテンシャル理論に基づいた導出解と最小二乗法を用いた解法についての検討を行った。本論文においては境界部も含めた定式化および離散化を行い、シミュレーションおよび実験データを用いた再構成を行い有効性を確認した。加えて、計測時に発生する回転成分を軽減する手法を新たに提案した。

その結果、計測された勾配から過誤ベクトルを除去しつつより確からしい曲面を再構成可能であることがわかった。

謝 辞

本研究は文部科学省科学研究費補助金（基盤研究（C）, 課題番号：15560693）の補助を受けて行われた。関係各位に謝意を表する。

参考文献

- 1) 流れの可視化学会 編：新版 流れの可視化ハンドブック, 朝倉書店, 1987.
- 2) 真田有吾 他: 重力流の密度場・速度場同時計測, 関西造船協会誌, 第 243 号, 2005, pp 145-151.
- 3) 可視化情報学会 編：PIV ハンドブック, 森北出版, 2002.
- 4) Suzuki, T., Suzuki, H., Sumino, K.: A Technique to Measure Wave Height using Projected Light Distribution, 3rd Asian Symposium on Visualization, 1994, pp 892 - 897.

- 5) Frankot, R. T., Chellapa, R.: A method for enforcing integrability in shape from shading algorithms. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intelligence, vol.10, no.4, 1988, pp 439 - 451.