横流れ角を考慮した操縦性指数の数値解析法について

正会員 佐 久 間 俊*

成 瀬 俊 宏*

On the Numerical Method for Analyzing the Steering Quality Indices with the Drift Angle Considered

by Shun Sakuma, Member Toshihiro Naruse, Non-member

Summary

The steering quality indices (K : The index of turning ability, T : The index of stability on course and quickness in responding to steering) are normally obtained by fitting time histories of steerage and heading angle into Nomoto's 1st order equation for maneuver. The drift angle, on the other hand, is sure to arise when a ship turns. If any analysis method for the steering indices and the drift angle is found out, it will make it easier to understand how large a ship laterally deviates especially in the stern. The focus on this paper is how to analyze the steering indices and the drift angle under the restriction of constant velocity and small heading angle. SR108 container ship is supposed as the analysis object ship and the steerage is considered to be closer to a practical maneuver rather than zig-zag one. The time histories of heading angle and trajectory are computed by the steerage supposed. The technical interest is whether the indices and drift angle could be calculated inversely from the time histories computed. The indices, in general, are obtained under the condition the steerage is known, but in this study, they are computed also in the condition it is unknown. The verification summaries that the indices are calculated inversely well if the steerage is known and even if it is unknown, trends of them can be grasped.

1. 結 言

操縦性指数¹⁾(旋回性指数 K 及び針路安定性, 追従性の指数 T の総称)を実験や実船試験から求め, データとして整理しておく, 新型船の初期設計段階(線図を描く前)において, 操舵応答を予測するときに大変役立つ。

従来, 操縦性指数は, Z 試験において, 舵角 δ と原針路からの回頭角 ψ の履歴を計測して, 操縦運動の基礎方程式¹⁾に当てはめる^{2),3),4)}ことによって求められる。

Fig.1 Description of horizontal motion.

他方, 横流れは変針中に必ず生じ, それによる船尾の横滑りは旋回抵抗が小さい船ほど大きい。船尾の挙動も含めて変針に伴う操舵応答を理解するためには, 横流れ角の応答モデ

ルを使って, 操縦性指数と併せて解析することが望ましい。

船は回頭角から横流れ角を差し引いた方向に進むので, 横流れ角は航跡とも関連深い。昨今の実船 Z 試験を見るとGPSを使って航跡が計測されているようなので, 航跡から横流れ角を解析できれば大変便利である。

また, 操縦性指数は Z 試験からしか求められないのであろうかという問題意識もある。通常運航時の変針や避航ではほとんど使われない zig-zag 操舵から求めた指数を用いて, 実務で頻出する操舵による応答を議論するのはわかりにくい。

もし, 通常行われる変針等の操舵応答から操縦性指数や横流れ角を求めることができれば, 実務的な操舵と操縦性指数を結びつけることができ運用者にも説明しやすい。

本研究は, 操縦運動は一定速度で回頭角が小さく, 誘起される横流れ角も小さいと仮定して, 操縦性指数及び横流れ角を求める数値解析法について述べたものである。横流れを考慮した操縦性指数の解析については, 非線形項を考慮した研究⁵⁾に詳しいが, 本研究では線形の範囲で解析法を検討した。

Z 操舵に比べて実務に近い舵角関数を設定し, その舵角関数から回頭角, 航跡を計算して解析対象とした。また解析対象船としてSR108を選択した。その時系列データから操縦性指数等を逆算できるかどうかの主たる論点である。

舵角関数が未知であっても, 航跡等データから操縦性指数が推定できると既存船の解析に便利なこと, 解析方法は, 舵角関数が既知の場合と, 未知の場合とに分け6つの問題を作成し解析法を検討した。

検討の結果, 舵角関数が既知の場合には, 操縦性指数及び横流れ指数が定量的に精度良く逆算できることが分かり, 舵角関数が未知の場合には, 定量的には劣るが, 舵角関数や操縦性指数等の傾向を掴めることを示した。

* 防衛装備庁

2. 応答の解析的表現

まず記号を定義しよう。

有次元量は、船長： $L(m)$ ，船幅： $B(m)$ ，吃水： $d(m)$ ，速度： $V(m/s)$ ，舵角関数の最大舵角： $\delta_0(deg)$ 。

無次元量は、方形係数： C_b ，フルード数： F_n ，時間： t ， x 軸上の最大距離： x_∞ ， x_∞ における時間： t_∞ ，舵角関数： $\delta(t)$ →取り舵正，回頭角： $\psi(t)$ →左回頭正，横流れ角： $\beta(t)$ →左回り正，航跡の x 座標： $x(t)=t$ ，航跡の y 座標： $y_\psi(t)$ ，航跡の y 座標の回頭角成分： $y_\psi(t)$ ，航跡の y 座標の横流れ角成分： $y_\beta(t)$ ，操縦性指数： K' (旋回力指数)， T' (追従性・保針性の指数)，舵角の補正項³⁾： δ'_r ，横流れ指数： K_β (横流れ強さ)， T'_β (横流れ時定数)，折れ線関数の構成点数： N ，正弦級数の項数： U ，正弦級数の n 次係数： a_n ， $\delta(t)=1$ を正弦級数に展開した係数： c_n ，回頭角及び航跡の時系列： $t_m \sim \psi_m, y_{\psi\beta m}$ ，時系列のデータ数： M ，設定した指数範囲の分割点数： k ，虚数単位： i 。

操縦性指数及び舵角の補正項を有次元で表す場合は'印を削除する。また、時間については (L/V) ，距離については L ，角度については δ_0 で無次元化する。

操舵応答の解析的表現を以下の式^{1),2)}から導く。これらの式は、速度一定の条件が課されている。

$$T' \frac{d\psi}{dt} + \psi = K'(\delta + \delta'_r) \quad (1)$$

$$T'_\beta \frac{d\beta}{dt} + \beta = K_\beta(\delta + \delta'_r) \quad (2)$$

(2)式は横流れを表す基礎式¹⁾の1次近似である。(1)式と同様操舵関数は低周波数の関数で構成されていると仮定¹⁾した。 K_β は舵角に対する横流れ角の大きさを示すので横流れ強さと称し， T'_β は横流れ角の遅れを表すので横流れ時定数と称した。また、両者を横流れ指数と総称した。

本論では回頭角の小さな運動を対象にすること、2次系を考えると指数の数が増えて計算時間が多くなることから1次系モデルを採用した。

入力舵角関数 δ と補正項³⁾ δ'_r (定数)の和と考える。 δ ， δ'_r 及び各指数を知れば回頭角及び横流れ角等を計算できる。

解析に先立ち、舵角関数の関数形を設定する。最初に折れ線関数を考える⁴⁾。Fig.2に概要を示す。

Fig.2 The steering function represented by polygonal line.

折れ線は $N-1$ 個の直線で構成されると考える。

$$\delta(t) = \sum_{n=1}^{N-1} \delta_n(t), \quad \delta_n(t) = \alpha_n t + \zeta_n, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1} \quad (3)$$

α_n は n 番目の直線の傾き， ζ_n は切片である。(3)式をラプラス変換し，(1)，(2)式から得られる伝達関数をかけて逆変換すると、回頭角速度等の諸量は δ'_r も考慮して以下のように表現できる⁴⁾。使用した関数は付録Aに示す。

$$\dot{\psi}(t) = K' \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{l=0}^1 (-)^l \dot{F}_1(T', t, t_{n+l}, \delta_{n+l}, \alpha_n) + K' \delta'_r \dot{F}_1(T', t, 0, 1, 0) \quad (4)$$

$$\psi(t) = K' \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{l=0}^1 (-)^l F_1(T', t, t_{n+l}, \delta_{n+l}, \alpha_n) + K' \delta'_r F_1(T', t, 0, 1, 0) \quad (5)$$

$$\dot{\beta}(t) = K_\beta \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{l=0}^1 (-)^l \dot{F}_1(T'_\beta, t, t_{n+l}, \delta_{n+l}, \alpha_n) + K_\beta \delta'_r \dot{F}_1(T'_\beta, t, 0, 1, 0) \quad (6)$$

$$\beta(t) = K_\beta \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{l=0}^1 (-)^l F_1(T'_\beta, t, t_{n+l}, \delta_{n+l}, \alpha_n) + K_\beta \delta'_r F_1(T'_\beta, t, 0, 1, 0) \quad (7)$$

回頭角が小さく、誘起される横流れ角も小さいと仮定すると(8)式の線形近似⁶⁾が成立して、航跡の y 座標の回頭角成分及び横流れ角成分は(9)，(10)式で表される。

$$x(t) = t, \quad y_{[\psi \text{ or } \beta]}(t) = \omega \int_0^t [\psi(u) \text{ or } \beta(u)] du, \quad \omega = \frac{\delta_0 \pi}{180} \quad (8)$$

$$y_\psi(t) = \omega K' \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{l=0}^1 (-)^l \hat{F}_1(T', t, t_{n+l}, \delta_{n+l}, \alpha_n) + \omega K' \delta'_r \hat{F}_1(T', t, 0, 1, 0) \quad (9)$$

$$y_\beta(t) = \omega K_\beta \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{l=0}^1 (-)^l \hat{F}_1(T'_\beta, t, t_{n+l}, \delta_{n+l}, \alpha_n) + \omega K_\beta \delta'_r \hat{F}_1(T'_\beta, t, 0, 1, 0) \quad (10)$$

航跡の y 座標は両成分の差であるから、

$$y_{\psi\beta}(t) = y_\psi(t) - y_\beta(t) \quad (11)$$

次に舵角関数を正弦級数で表わす⁷⁾ことを考える。舵角関数を U 項のフーリエ正弦級数と考えると、

$$\delta(t) = -i \sum_{n=1}^U a_n e^{inpt}, \quad n = 1, 2, \dots, U, \quad p = \frac{\pi}{t_\infty} \quad (12)$$

$\delta(t)$ は実部をとる。係数 a_n の積分表示は、

$$a_n = \frac{2}{t_\infty} \int_0^{t_\infty} \delta(t) \sin(npt) dt \quad (13)$$

$\delta(t) = 1$ に対応する係数 c_n は(13)式に代入して、

$$c_n = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos n\pi] \quad (14)$$

(12)式をラプラス変換し, (1),(2)式から得られる伝達関数をかけて逆変換すると, 回頭角速度等の諸量は, δ'_r も考慮して以下のように表現できる⁷⁾. 使用した関数は付録 B に示す.

$$\dot{\psi}(t) = K' \sum_{n=1}^U (a_n + \delta'_r c_n) O_n^{(1)}(T', t) \quad (15)$$

$$\psi(t) = K' \sum_{n=1}^U (a_n + \delta'_r c_n) \hat{O}_n^{(1)}(T', t) \quad (16)$$

$$\dot{\beta}(t) = K_\beta \sum_{n=1}^U (a_n + \delta'_r c_n) \dot{O}_n^{(1)}(T'_\beta, t) \quad (17)$$

$$\beta(t) = K_\beta \sum_{n=1}^U (a_n + \delta'_r c_n) O_n^{(1)}(T'_\beta, t) \quad (18)$$

$$y_\psi(t) = \omega K' \sum_{n=1}^U (a_n + \delta'_r c_n) \hat{O}_n^{*(1)}(T', t) \quad (19)$$

$$y_\beta(t) = \omega K_\beta \sum_{n=1}^U (a_n + \delta'_r c_n) \hat{O}_n^{(1)}(T'_\beta, t) \quad (20)$$

3. 解析対象船と解析対象の作成

解析対象船はコンテナ船の研究船型 SR108 とし, その操縦性指数は実験データ⁸⁾を解析して求めた⁷⁾. 横流れ強さ K_β は K' の 30% と, 横流れ時定数 T'_β は T' の 108% と設定した.

Table 1 Principal dimensions and the indices.

Container (SR108)			Model	Actual	The Indices	δ_0	deg.	10	-
Principal Dimensions	L	m	3.5	175		K	1/s	0.27	0.038
	B	m	0.508	25.4		T	s	14.2	100.4
	d	m	0.19	9.5		δ_r	deg.	0.16	-
	Cb			0.573		K'		1.08	
	$Cb/(L/B)$			0.083		T'		3.54	
	F_n			0.15		δ'_r		0.016	-
	V	m/s	0.88	6.17		K_β		0.32(setting)	
	L/V	s	3.98	28.35		T'_β		3.81(setting)	

解析データ計算のため, 舵角関数を作成した. Fig.3 に示す. なお今後も含めてグラフは全て無次元表示である.

Fig.3 The original steering function using polygonal line.

zig-zag 操舵よりも実務で行われる操舵に近いことを意識した. この関数と Table 1 に示す各指数を(4)~(10)式に入力して解析対象を計算した. Fig.4 に示す. 舵角関数を(13)式に代入して a_n を求めれば(15)~(20)式からでも計算できる.

Fig.4 The objects of analysis.

4. 6つの問題とその解

Fig.3 の舵角関数 δ と Fig.4 に示す時系列のうち ψ_m , $y_{\psi\beta m}$ を用いて操縦性指数と横流れ指数が逆算できるかを検討する. 検討に際しては, δ が既知の場合と未知の場合とに分け, 6種類の問題を立てて検討した. 時系列データはファイルを介在して受け渡した. 無次元で考えて, できるだけ小数点以下3桁の精度を意識した. これは SR108 の場合, 約 20cm の精度である. 高精度であるが, δ が既知の場合, データが多ければ解の精度が上がる可能性はある. 指数等の分割範囲は $0.75 \leq K' \leq 1.5$, $2.75 \leq T', T'_\beta \leq 4.5$, $0 \leq \delta'_r \leq 0.03$, $0.1 \leq K_\beta \leq 0.5$ とした. 分割点数 k の大小は計算時間を勘案して決めた.

問題1 舵角関数及び回頭角, 航跡の時系列が既知

1. 設定した K', T', δ'_r の範囲を $k-1$ 等分割する.
2. 分割した値を用いて(5)式から $\psi(t_m)$ を計算する.
3. 以下に示す残差 R が最小となる K', T', δ'_r を解とする.

$$R^2 = \sum_{m=1}^M [\psi(t_m) - \psi_m]^2 \quad (21)$$

4. 設定した K_β, T'_β の範囲を $k-1$ 等分割する.
5. 3項で決めた解及び分割した K_β, T'_β を用い, (9),(10)式によって $y_\psi(t_m)$ 及び $y_\beta(t_m)$ を計算する.
6. 以下に示す残差 R が最小となる K_β, T'_β を解とする.

$$R^2 = \sum_{m=1}^M [y_\psi(t_m) - y_\beta(t_m) - y_{\psi\beta m}]^2 \quad (22)$$

$M = 51, k = 101$ として解析した結果を Fig.5 に示す. T'_β が少し大きい, ほぼ正解を得た. 時系列データの精度は小数点以下3桁である. このように通常操舵に近い航跡と回頭角からでも各指数を逆算できる.

Fig.5 Solutions of the problem 1.

問題 2 舵角関数及び航跡の時系列が既知

1. 設定した $K', T', \delta'_r, K_\beta, T'_\beta$ の範囲を $k-1$ 等分割する。
 2. 分割した値を用いて (9), (10) 式から $y_\psi(t_m)$ 及び $y_{\psi\beta}(t_m)$ を計算する。
 3. (22) 式の残差 R が最小となる $K', T', \delta'_r, K_\beta, T'_\beta$ を解とする。
- $M = 51, k = 101$ として解析した結果を Fig. 6 示す。時系列データの精度は小数点以下 3 桁及び 4 桁である。

Fig. 6 Solutions of the problem 2.

大体正解が得られるが、問題 1 に比べると横流れ指数の精度が落ちる。小数点以下 4 桁に精度を上げると改善する。これは付録 C に示すように、航跡の変化率が回頭角のそれに比べると小さいことに起因すると思われる。精度向上のために k の増加は有効であるが、計算時間がかなり長くなる。

計算時間を短縮するためには、(22) 式の残差を最小にする $T', K', \delta'_r, T'_\beta, K_\beta$ の組み合わせを効率的に探索するロジック検討が課題である。

問題 3 回頭角及び航跡の時系列（少量）が既知

この問題の場合、舵角関数が未知なので、回頭角時系列を回頭角の通過点とみなした変分問題を解いて a_n を求める。

1. 設定した K', T', δ'_r の範囲を $k-1$ 等分割する。
2. 以下の式から δ'_r の影響を除去した時系列 $\hat{\psi}_m$ を計算する。

$$h_{nm} = K' \hat{\phi}_n^{(1)}(T', t_m) \quad (23)$$

$$\hat{\psi}_m = \psi_m - \delta'_r \sum_{n=1}^U c_n h_{nm} \quad (24)$$

3. 以下に示す変分問題を解いて正弦級数の係数を求める。

$$E = \int_0^{t_\infty} \delta^2 dt + \sum_{m=2}^M \lambda_m \left[\sum_{n=1}^U a_n h_{nm} - \hat{\psi}_m \right] \quad (25)$$

右辺第 1 項は舵角関数の 2 乗積分であり、この項により舵中央からの偏移量が少ない舵角関数が探索される。 λ_m はラグランジュの未定乗数である。E を級数表現すると、

$$E = \sum_{n=1}^U \sum_{v=1}^U a_n a_v \Gamma_{nv} + \sum_{m=2}^M \lambda_m \left[\sum_{n=1}^U a_n h_{nm} - \hat{\psi}_m \right] \quad (26)$$

$$\Gamma_{nv} = \int_0^{t_\infty} \sin npt \sin vpt dt = \begin{cases} t_\infty/2 & , n = v \\ 0 & , n \neq v \end{cases} \quad (27)$$

解くべき連立方程式は、

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a_n} = 2 \sum_{v=1}^U a_v \Gamma_{nv} + \sum_{m=2}^M \lambda_m h_{nm} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial \lambda_m} = \sum_{n=1}^U a_n h_{nm} - \hat{\psi}_m = 0 \end{cases} \quad (28)$$

a_n が決まれば舵角関数が決まるが、同じ回頭角時系列を示す指数と舵角関数の組み合わせは無数に存在するので、何らかの条件で舵角関数を特定する必要がある。本論では舵中央状態が最も長く続く舵角関数を舵角解とした。具体的には $0 \leq t \leq t_\infty$ 間を 400 等分に分割し、(12) 式で δ_μ ($1 \leq \mu \leq 401$) を計算し、以下に示す指数 Q が最大となる δ を舵角解とした。

$$Q = \sum_{\mu=1}^{401} \sigma_\mu, \quad \sigma_\mu = \begin{cases} \sigma_\mu + 1 & , |\delta_\mu| < 1/50 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases} \quad (29)$$

舵角解が求まれば K', T', δ'_r が決まる。

4. 設定した K_β, T'_β の範囲を $k-1$ 等分割する。
5. 3 項で決めた解及び分割した K_β, T'_β を用いて、以下の式から航跡を計算する。

$$H_{nm} = K' \hat{\phi}_n^{(1)}(T', t_m) - K_\beta \hat{\phi}_n^{(1)}(T'_\beta, t_m) \quad (30)$$

$$y_{\psi\beta}(t_m) = \omega \sum_{n=1}^U (a_n + \delta'_r c_n) H_{nm} \quad (31)$$

6. 以下に示す残差 R が最小となる K_β, T'_β を解とする。

$$R^2 = \sum_{m=1}^M [y_{\psi\beta}(t_m) - y_{\psi\beta m}]^2 \quad (32)$$

$M = 51, U = 200, k = 51$ として解析結果を Fig. 7 に示す。

Fig. 7 Solutions of the problem 3.

舵角関数及び指数の逆算結果は、定性的に傾向を掴んでいるが、十分な精度ではない。 K' が大きくなるのは、舵力が強ければ、小さい舵角で同じ航跡を辿れることを示している。

舵角関数と指数は 1 対 1 対応を示しており、正しい指数を入力すれば正解に近い舵角解を得る (図中 $\delta_{3 \text{ digit}}^{\text{Answer}}$)。

時系列データの精度は小数点以下 3 桁と 4 桁の両方を計算したが、舵角関数に大きな差異はない。回頭角の変化率が航跡に比べて大きいのが要因と思われる。

問題 4 航跡の時系列（少量）のみが既知

この問題の場合、航跡の時系列をウェイポイントと考えて変分問題を解くことにより a_n を求めることができる。

1. 設定した $K', T', \delta'_r, K_\beta, T'_\beta$ の範囲を $k-1$ 等分割する。

2. 以下の式から δ'_r の影響を除去した $\hat{y}_{\psi\beta m}$ を計算する.

$$\hat{y}_{\psi\beta m} = y_{\psi\beta m} - \omega \delta'_r \sum_{n=1}^U c_n H_{nm} \quad (33)$$

3. 以下に示す変分問題を解いて正弦級数の係数を求める.

$$E = \int_0^{t_\infty} \delta^2 dt + \sum_{m=2}^M \lambda_m \left[\omega \sum_{n=1}^U a_n H_{nm} - \hat{y}_{\psi\beta m} \right] \quad (34)$$

解くべき連立方程式は, (26)式の h_{nm} を ωH_{nm} と置換して,

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a_n} = 2 \sum_{v=1}^U a_v \Gamma_{nv} + \omega \sum_{m=2}^M \lambda_m H_{nm} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial \lambda_m} = \omega \sum_{v=1}^U a_v H_{vm} - \hat{y}_{\psi\beta m} = 0 \end{cases} \quad (35)$$

舵角関数は(29)式で特定した. 舵角解が決まれば $K', T', \delta'_r, K_\beta, T'_\beta$ が決まる.

$M = 51, U = 200, k = 21$ とした解析結果を Fig.8 に示す.

Fig.8 Solutions of the problem 4.

航跡時系列のデータ精度は,小数点以下 3~5 桁の 3 種類計算した.精度を上げるにつれて舵角関数の振動は収まる.やはり K' が大きくなる傾向を示す.小数点以下 3 桁では振動が激しくて解とは言えない.このように変化率が小さい航跡のみから舵角関数を逆算するのは難しい.

正しい指数を入力すれば正解に近い舵角関数が得られる(図中 $\delta_{4 \text{ digit}}^{\text{Answer}}$)ことから,指数が既知である場合,本方法で航跡から舵角関数の概要を推定できる可能性がある.

問題 5 回頭角と航跡の時系列 (高精度かつ多量) が既知

この問題の場合,最小 2 乗法を用いて舵角関数を求めることができる.

1. 設定した K', T', δ'_r の範囲を $k-1$ 等分割する.
2. (24)式から δ'_r の影響を除去した $\hat{\psi}_m$ を計算する.
3. 以下に示す最小 2 乗法を用いて a_n を求める. δ'_r の影響を除去した回頭角は,

$$\hat{\psi}(t_m) = \sum_{n=1}^U a_n h_{nm} \quad (36)$$

と表されるので,級数で表現した累積 2 乗誤差 E は,

$$E = \sum_{n=1}^U \sum_{v=1}^U a_n a_v J_{nv} - 2 \sum_{n=1}^U a_n j_n + \sum_{m=1}^M \hat{\psi}_m^2 \quad (37)$$

ここに係数は,

$$J_{nv} = \sum_{m=1}^M h_{nm} h_{vm}, \quad j_n = \sum_{m=1}^M \hat{\psi}_m h_{nm} \quad (38)$$

解くべき連立方程式は,

$$\frac{\partial E}{\partial a_n} = 2 \sum_{v=1}^U a_v J_{nv} - 2 j_n = 0 \quad (39)$$

これで分割された操縦性指数に対応する a_n が求まる.舵角解の特定には(29)式を用いた.

4. 設定した K_β, T'_β を $k-1$ 等分割する.

5. 3 項で決めた解及び分割された K_β, T'_β を用いて(31)式から航跡を計算する.

6. (32)式に示す残差 R が最小となる K_β, T'_β を求め解とする.

$M = 401, U = 200, k = 101$ とした解析結果を Fig.9 に示す. 時系列のデータ精度は小数点以下 4,5 桁の 2 種類計算した.

Fig.9 Solutions of the problem 5.

小数点以下 4 桁まで精度を上げないと舵角関数の振動が収まらない.4 桁以上では,定性的な傾向は示すが,定量的には十分でない.やはり K' が大きい舵角解を探す傾向がある.

正しい指数を入力すればほぼ正しい舵角関数が得られる(図中 $\delta_{4 \text{ digit}}^{\text{Answer}}$).

問題 6 航跡の時系列 (高精度かつ多量) のみが既知

この問題の場合,最小 2 乗法を用いて舵角関数を求めることができる.

1. 設定した $K', T', \delta'_r, K_\beta, T'_\beta$ の範囲を $k-1$ 等分割する.
2. (33)式から δ'_r の影響を除去した航跡 $\hat{y}_{\psi\beta m}$ を計算する.
3. 以下に示す最小 2 乗法を用いて a_n を求める. δ'_r の効果を除去した航跡は,

$$\hat{y}_{\psi\beta}(t_m) = \omega \sum_{n=1}^U a_n H_{nm} \quad (40)$$

と表せるので,級数で表現した累積 2 乗誤差 E は,

$$E = \sum_{n=1}^U \sum_{v=1}^U a_n a_v G_{nv} - 2 \sum_{n=1}^U a_n g_n + \sum_{m=1}^M \hat{y}_{\psi\beta m}^2 \quad (41)$$

ここに係数は,

$$G_{nv} = \omega^2 \sum_{m=1}^M H_{mn} H_{mv}, \quad g_n = \omega \sum_{m=1}^M \hat{y}_{\psi\beta m} H_{mn} \quad (42)$$

解くべき連立方程式は,

$$\frac{\partial E}{\partial a_n} = 2 \sum_{v=1}^U a_v G_{nv} - 2 g_n = 0 \quad (43)$$

舵角解の特定は(29)式によった. $M = 401$, $U = 200$, $k = 21$ とした解析結果を Fig.10 に示す.時系列のデータ精度は小数点以下 5,6 桁について計算した. 小数点以下 4 桁では舵角関数の振動が激しい.

Fig.10 Solutions of the problem 6.

5 桁の解析結果でも,多少振動が残るが舵角関数の形状は理解でき,指数も定性的に傾向を示す.やはり K' が大きい解を探してしまう.

正しい指数を入力すればほぼ正しい舵角解を得る(図中 $\delta_{6 \text{ digit}}^{\text{Answer}}$)ので,高精度かつ多量の航跡データがあり,指数が既知の場合は,本方法で舵角関数を推定できる可能性がある.

5. K_β の違いによる船尾横滑りの違い

横流れ強さ K_β の大きさが異なる場合の変針時の横滑りについて考察する. 解析対象は SR108⁸⁾である. Fig.11 は,他の指数は変えずに K_β を 0.97 及び 0.32 の 2 種類変化させた時の航跡計算を示す.図は, Fig.3 の舵角関数を与えて船体中心点の航跡と回頭角を求め,船首尾の航跡を計算し,航跡の第 1 第 2 操舵付近を拡大したものである.

Fig.11 Trajectories in the case of $K_\beta = 0.97$ and 0.32.

K_β が 0.97 の場合は,下方に大きく滑りながら変針している. y 方向の最大距離は,実船換算で 5.3m であり, 船幅の 20% である. 他方 K_β が 0.32 の場合は 1.8m であり, K_β 比と同様約 1/3 である. 操縦性指数が同じでも K_β の違いで変針時の旋回挙動が大きく異なるのは興味深い.

Fig.4 を見ると, δ と $\dot{\beta}$ は位相がほとんど同じであり,関数形も,舵角保持部分や後半で少し異なるが一般的に良く似ている.これは,横流れ角速度は舵力が作用している間に発生していることを示すと思われる.一般に,強い舵力は大きな横流れ角速度を誘起しようとするであろう.その際, 旋回抵抗が小さければ船尾が滑り, $\dot{\beta}$ が大きくなるため β も大きくなる. β が大きければ K_β は大きい.旋回抵抗が大きければその逆である. そう考えると K_β は K' に比例し, 旋回抵抗に反比例することが理解できる¹⁾.

Fig.4 で第 1 操舵に注目すると, $\dot{\beta}$ は舵中央から最大舵角に達した時に最大となり,船体が旋回し始めると小さくなる.このように $\dot{\beta}$ は $\dot{\psi}$ よりも早く応答する.しかし, β は $\dot{\psi}$ よりも少し遅れる.これは T_β' が T' よりも少し大きいことに起因する.

β と ψ , y_β と ψ の関数形が良く似ているのは T_β' と T' が大体等しいことによる.

6. 結 言

以上分かったことを簡単にまとめると,

- (1) 通常操舵に近い航跡や回頭角の時系列からでも操縦性指数及び横流れ指数を求めることができる.
- (2) 舵角関数が既知の場合,航跡及び回頭角の時系列から精度良く各指数を求めることができる. 航跡の時系列のみから求める場合は,操縦性指数等の分割数を増やすか,データの精度を上げると逆算精度が上がる.
- (3) 舵角関数が未知の場合,ウェイポイント通過理論や最小 2 乗法を用いて,舵角関数, 操縦性指数及び横流れ指数を求めることができる.ただし定性的な傾向は示すが,定量的に十分な精度ではない. 舵角解の安定のためにはデータの精度を上げる必要がある.
- (4) 舵角関数が未知の場合,同じ航跡を示す指数と舵角関数の組み合わせは無数にあるため,舵角解を特定する考え方が必要である.
- (5) 本論の計算方法によると, SR108 の計算では, 取り舵 10 度, 当て舵 5 度で変針する場合, K_β を 0.97 とすると, 船首尾は最大で, 幅の 20% 程度 y 方向に横滑りする.

参 考 文 献

- 1) 野本謙作: 船の操縦性, 造船協会誌第 424 号, pp.8-22, 1964.11.
- 2) 藤井斉, 野本謙作: 操縦性試験法, 第 2 回操縦性シンポジウム, pp.1-39, 1970.11, 日本造船学会.

- 3) 造船協会試験水槽委員会,操縦性分科会:実船操縦性試験法の標準,造船協会誌 442 号,pp.32-41,1966.5.
- 4) 佐久間俊,成瀬俊宏:ポッド推進器装備船の操縦性指数について,日本船舶海洋工学会論文集,Vol.23,pp.27-pp.32,2016.6.
- 5) 松本憲洋,末光啓二:横流れ角を考慮した操縦性係数の解析,関西造船協会誌,第 180 号,pp.87-95,1981.3.
- 6) 佐久間俊,成瀬俊宏:等時間Z操舵における船の応答について,日本船舶海洋工学会論文集,Vol.22,pp.113-117,2015.12.
- 7) S. Sakuma, T. Naruse: The optimal steering calculation method of passing through several waypoints, Journal of the Japan Society of Naval Architects and Ocean Engineers, Vol.23,pp. 223-230, June 2016.
- 8) 安川宏紀:波浪中における船の操縦運動シミュレーション(第2報:zig-zag運動とプロペラ逆転停止運動),日本船舶海洋工学会論文集,Vol.7,pp.163-170,2008.6.
- 9) 鳥野慶一:実船周波数応答特性の測定-実船における平行移動操舵試験-,日本造船学会論文集第 128 号,pp.103-118,1970.11.
- 10) 野本謙作,小瀬邦治,芳村康男:Z 試験の新しい解析法,日本造船学会論文集第 134 号,pp.183-pp.192,1973.11.
- 11) 金鐘三,小林英一,野本謙作:操縦性試験の最小自乗法解析,日本造船学会論文集第 144 号,pp.40-49,1978.11.

付録 A F_1 関数

舵角関数を折れ線関数として考えた場合,回頭角速度の解析的表現には以下の関数を用いる⁴⁾.

$$\dot{F}_1(T', t, \tau, \delta, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-\infty i}^{\xi+\infty i} \frac{(\delta q + \alpha)e^{(t-\tau)q}}{q^2(T'q + 1)} dq \quad (A1)$$

ξ は実軸上の極より大きな正数である. また α は計算対象

とする直線の傾きである. 積分を実行すると,

$$0 \leq t < \tau \text{ の時は } \dot{F}_1 = 0 \quad (A2)$$

$\tau \leq t < \infty$ の時は,

$$\dot{F}_1(T', t, \tau, \delta, \alpha) = (\delta - \alpha T')(1 - e^{-(t-\tau)/T'}) + \alpha(t - \tau) \quad (A3)$$

この関数の微分, 積分を考える.

$$\ddot{F}_1 = \frac{d\dot{F}_1}{dt}, \quad F_1 = \int_{\tau}^t \dot{F}_1 dt', \quad \hat{F}_1 = \int_{\tau}^t F_1 dt' \quad (A4)$$

と定義すると,

$$0 \leq t < \tau \text{ の時は, } \ddot{F}_1 = F_1 = \hat{F}_1 = 0 \quad (A5)$$

$\tau \leq t < \infty$ の時は,

$$\ddot{F}_1(T', t, \tau, \delta, \alpha) = \frac{\delta - \alpha T'}{T'} e^{-(t-\tau)/T'} + \alpha \quad (A6)$$

$$F_1(T', t, \tau, \delta, \alpha) = (\delta - \alpha T') [t - \tau - T'(1 - e^{-(t-\tau)/T'})] + \frac{\alpha}{2} (t - \tau)^2 \quad (A7)$$

$$\hat{F}_1(T', t, \tau, \delta, \alpha) = (\delta - \alpha T') \left[\frac{(t - \tau)^2}{2} - T'(t - \tau) + T'^2 (1 - e^{-(t-\tau)/T'}) \right] + \frac{\alpha}{6} (t - \tau)^3 \quad (A8)$$

付録 B $O_n^{(1)}$ 関数

舵角関数をフーリエ正弦級数として考えた場合, 回頭角速度の解析的表現には以下の関数を用いる⁷⁾.

$$O_n^{(1)}(T', t) = \frac{-1}{2\pi} \int_{\xi-\infty i}^{\xi+\infty i} \frac{e^{qt} dq}{(T'q + 1)(q - inp)} \quad (B1)$$

ξ は実軸上の極よりも大きい正数である. 積分を実行すると

$$O_n^{(1)}(T', t) = \frac{e^{inpt} - e^{-t/T'}}{i - npT'} \quad (B2)$$

この関数の微分, 積分を考え, 新たな関数を定義する.

$$\dot{O}_n^{(1)}(T', t) = \frac{d}{dt} O_n^{(1)}(T', t) \quad (B3)$$

$$\hat{O}_n^{(1)}(T', t) = \int_0^t O_n^{(1)}(T', t') dt' \quad (B4)$$

$$\hat{O}_n^{*(1)}(T', t) = \int_0^t \hat{O}_n^{(1)}(T', t') dt' \quad (B5)$$

積分を実行すると, それぞれの関数は,

$$\dot{O}_n^{(1)}(T', t) = \frac{inpT' e^{inpt} + e^{-t/T'}}{T'(i - npT')} \quad (B6)$$

$$\hat{O}_n^{(1)}(T', t) = \frac{1}{i - npT'} \left[\frac{e^{inpt} - 1}{inp} + T'(e^{-t/T'} - 1) \right] \quad (B7)$$

$$\hat{O}_n^{*(1)}(T', t) = \frac{1 + inpt - e^{inpt}}{(np)^2(i - npT')} + \frac{T'[T'(1 - e^{-t/T'}) - t]}{i - npT} \quad (B8)$$

ただし, 全ての関数は実部をとるものとする.

付録 C 航跡及び回頭角の微小変化

航跡と回頭角の変化の大きさについて考察する. 微小時間 Δt の間に回頭角及び航跡は $\Delta\psi$, Δy だけ変化するとする.

Fig. C1 The rate of change in heading angle and trajectory.

ψ の積分を三角形の面積で近似し, δ_0 を 10deg. とすると,

$$\frac{\Delta y}{\Delta\psi} = \frac{\omega}{\Delta\psi} \int_0^{\Delta t} \psi(t) dt \cong \frac{\omega \Delta t}{2} \cong \frac{\Delta t}{10} \quad (C1)$$

このように Δy は $\Delta\psi$ の約 0.1 Δt 倍である. 時系列データが増えれば Δt に比例して更に小さくなる.