渦法による浮体構造物の非線形波浪中挙動解析法の開発

－第3報 浮体式振動水柱型波力発電装置の一次変換性能解析－

正会員 永 田 修 一* 正会員 大 窪 慈 生**
 正会員 今 井 康 貴* 正会員 村 上 天 元*
 正会員 岡 本 豊***

Simulation of Floating Body in Nonlinear Waves by Vortex Method
 - Part3, Simulation of 2-Dimensional Floating OWC-type Wave Energy Converter -

by Shuichi Nagata, *Member* Shigeki Okubo, *Member*
 Yasutaka Imai, *Member* Tengen Murakami, *Member*
 Yutaka Okamoto, *Member*

Summary

In order to design a floating OWC (Oscillating Water Column)-type wave energy converter such as Backward Bent Duct Buoy (BBDB) optimally, it is necessary to develop a numerical method to make clear an optimal hull shape which maximizes the generating electrical energy.

In this paper, a two-dimensional numerical method in time domain to estimate the primary conversion efficiency of a floating OWC-type wave energy converter with arbitrary cross section is proposed. The fluid motion in water waves is calculated by using vortex method which can consider viscosity of the fluid, vortex generation from the floating body surface and diffusion of the vortex into the fluid. For air flow in air chamber, equations of state, conservation of mass and energy with the assumption of air being the perfect gas are used. From these equations, motions of floating body, air pressure and free surface elevation in air chamber and primary conversion efficiency etc. are calculated. Wave tank tests are also carried out for BBDB in regular waves. Numerical results are compared with experimental results.

1. 結 言

現在、化石燃料の枯渇や地球温暖化の対策として、海洋エネルギーが注目され、波力発電、潮流・海流発電、海洋温度差発電等に関する研究開発が世界各所で進められている。これらの発電装置の中で、波力発電装置(Wave Energy Converter: WEC) は、設置場所の制約が少なく、様々なコンセプトに基づいた提案が可能なことから、多くの研究開発が行われている¹⁾。今日までに提案された装置は、振動水柱型(Oscillating Water Column: OWC)、可動物体型、越波型の3つに大別される。

著者らは、現在、浮体式の振動水柱型波力発電装置“後ろ曲げダクトブイ(Backward Bent Duct Buoy、以後 BBDB)”の実用化を目指した研究を行っている。Masuda²⁾によって

Fig. 1 Floating OWC type WEC “BBDB”.

提案された BBDB は、Fig.1 に示すように、浮力体、L 型の水中ダクト、空気室、タービン・発電機で構成されている。著者らは、2 次元及び 3 次元造波水槽において、この装置に関する規則波中性性能評価実験を行い、この装置が優れた特性を持つことを確認している^{3),4),5)}。特に、3 次元実験では、小型模型（長さ 0.85m、幅 0.78m、高さ 0.6m）の一次変換効率（波パワーから空気パワーへの変換効率）の最大値が 98% と非常に高効率であることや、佐賀大学で開発した案内羽根付の衝動タービンを搭載した中型模型（長さ 2.5m、幅 2.3m、高さ 1.8m）を用いた水槽実験での発電効率の最大値

* 佐賀大学海洋エネルギー研究センター

** 日立造船（株）社会インフラ事業部

*** 日立造船（株）技術研究所

原稿受理 平成29年 3 月 1 日

は約 30%と高効率であることを確認している。また、BBDB は、特定の周波数帯の波作用下で、波上側へ微速前進する特性を有することも確認したが、この特性は、多数の周波数帯の波が混在する実海域では、波下側へ働く波漂流力を低減でき、係留コストを低減できるという利点となる。

BBDB の設計のために、数値解析ツールの開発も試みられている。しかしながら、その多くは、流体運動を非圧縮、非粘性の無渦運動と仮定したポテンシャル理論に基づくものである。

周波数領域の計算に関しては、Suzuki 他⁶⁾が、タービン負荷をオリフィス負荷(空気室天井にオリフィスを有すると仮定)と置き換えた 2 次元 BBDB を対象に、規則波中の一次変換性能計算を行っている。この計算では、水の解析にポテンシャル理論に基づいた領域分割法を用い、空気室内の空気の挙動に関しては、未知量である空気圧力が空気室内平均水面の上下速度の 2 乗に比例するとして、実験的に求められた比例係数を用いている。著者ら⁷⁾も、空気室天井にオリフィスを有する 2 次元 BBDB 模型の規則波中一次変換性能実験に対応する計算を行うために、水の解析にポテンシャル理論に基づいた境界要素法を、空気室内の空気の解析に、状態方程式、質量保存則、エネルギー保存則を用いる方法を提案している。この計算では、水中ダクト内の振動水柱と入射波の共振周期において、水の粘性を無視したことにより生じる空気室内の水面の大変位を抑えるために、空気室内の自由表面条件に、レーリーの人工粘性係数を導入している。

時間領域の計算に関しては、Koo 他⁸⁾が、2 次元 BBDB と流体の非線形連成運動と一次変換性能を求めるためにポテンシャル理論に基づいた計算を行っている。空気室内の水面変位を抑えるために、著者らと同様なレーリーの人工粘性係数の導入の他、浮体運動に伴って浮体端部から発生する渦による減衰を考慮するために、浮体の運動方程式に、浮体の上下速度及び回転速度に比例する減衰項を別途導入し、実験結果を基に、その係数を与えているが、レーリーの人工粘性係数と浮体に関する減衰係数の関係等、不明な点が多い。また、Kurniawan 他⁹⁾は、3 次元 BBDB を対象に、ポテンシャル理論に基づいた周波数領域の解をベースに、浮体の動揺と空気室内の空気圧力のメモリー影響を考慮した浮体運動と空気室内圧力で表示した浮体の運動方程式を時間領域で計算することを試みているが、空気タービンの影響を正確に考慮していないことや、共振周期での空気室内の水面変位の抑制法や浮体端部からの渦の発生によって生じるダンピングを考慮していないことのために、このモデルによる実現現象の表現には疑問が残る。

構造物や浮体端部からの渦の発生による流体減衰を考慮するために、流体を粘性流体と考えて OWC 装置の性能評価を行った例としては、沿岸固定式 OWC 装置に関して、差分法や有限要素法の適用があるものの、浮体式である BBDB の挙動解析を試みた例は無いようである。また、粒子法であ

る MPS 法や SPH 法を用いて BBDB の挙動解析を試みた例^{10), 11)}もあるが、BBDB の運動に関する計算値と実験値を比較するレベルには達していない。

一般に、OWC 型波力発電装置の設計においては、振動水柱の固有周期を、装置設置海域に入射する卓越波の周期に一致させることにより発電量の向上を図る方法が採用される。このため、浮体式 OWC 装置による発電量を正確に推定するためには、入射波と共振状態での浮体運動や振動水柱の挙動を精度良く推定する計算手法が必須となる。具体的には、浮体動揺の共振状態では、浮体運動に伴う浮体端部から生じる渦の生成と拡散や、振動水柱の壁面摩擦による減衰等の流体の粘性に伴うダンピングが浮体運動に大きく影響するため、流体の粘性影響を正確に考慮できる流体解析法が必要である。しかしながら、先に述べたように、現状では、流体の粘性影響を考慮した、精度の良い BBDB 挙動解析は行われていないようである。

著者らは、このような目的に適した手法として、粘性流体を対象とした、渦法による 2 次元浮体構造物の非線形波浪中挙動解析法を提案して、没水平板の鉛直運動、係留された矩形や三角形断面浮体の波浪中運動に関する計算結果と実験結果と比較することにより、提案した計算手法の有効性を示している^{12), 13)}。提案した“渦法による粘性流体解析法”は、①アルゴリズムが簡単である、②高レイノルズ数流れの計算に適している、③数値安定性が良い、④数値拡散の原因を本質的に持たない、⑤空間に格子形成を必要としないという利点に加え、⑥流体解析には境界積分方程式法を用いるため、任意の浮体形状に適用可能で、浮体や自由表面等の流体境界の時間的な移動や変形を正確に追跡できるとともに、計算における未知量が流体境界上のみに存在し、流体内部には存在しないので計算容量を小さくできる、⑦時間方向の計算には、Fractional step 法を導入して、時間方向の 1 ステップの計算を、前半と後半の 2 つに分けて行うが、前半の Convection step の計算では、非回転成分の複素速度ポテンシャルに関する境界積分方程式を、自由表面や物体表面上の境界条件等を考慮して解くため、この計算には Vinje 他¹⁴⁾が提案した非線形水波の非定常計算法の考え方をそのまま利用できる、等の利点がある。このように、渦法による波浪中運動解析法は、従来の流体の粘性と渦を無視した特異点分布法等の境界積分方程式法を粘性流体へ拡張した方法と考えることもできる。

本論文では、この“渦法を用いた粘性流体解析法”をベースに、空気室天井にオリフィスを有する 2 次元 BBDB の一次変換性能を評価する計算法を提案する。空気室内の空気の挙動解析には、状態方程式、質量保存則、エネルギー保存則を用いる。BBDB 模型を対象とした 2 次元造波実験も併せて行い、浮体の運動、空気室内の水面変位と空気圧力、一次変換効率に関する計算値と実験値を比較することにより、提案した計算法の有効性を示す。また、前報で明確に示してい

なかった浮体の接線方向に働く粘性流体力の計算法や、Gauss 分布を持つ渦 blob によって生じる“回転成分に対応する流れ関数”の厳密な解の表示についても併せて示す。

2. 渦法計算手法

2.1 渦法の基礎方程式

2 次元粘性流体の基礎式を渦度と流れ関数で表すと次のようになる。

$$\frac{D\xi}{Dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} = \nu \nabla^2 \xi \quad (1)$$

$$\nabla^2 \psi = -\xi \quad (2)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

ここで、 u は x 方向流速、 v は y 方向流速、 ξ は渦度、 ψ は流れ関数、 ν は動粘性係数、 t は時間である。

式(1)の渦度方程式は、Fractional step 法を用いて、以下の Convection step と、Diffusion step の二つの式に分離する。

i) Convection step

$$\frac{D\xi}{Dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

ii) Diffusion step

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \nu \nabla^2 \xi \quad (5)$$

式(4)は、渦度が局所流速によってラグランジュ的に移流し、その渦強さは変化しないことを表しており、非粘性流体の移流方程式に対応する。式(5)は、渦度に関する 2 次元の拡散方程式を表している。

渦度場は多数の Vortex blob を用いて次式で表現する。

$$\xi(X, t) = \sum_{m=1}^N \xi_m(X, t) = \sum_{m=1}^N \Gamma_m G(X - X_m(t)) \quad (6)$$

ここで、 $X = (x, y)$ は流体領域内の位置、 $X_m(t) = (x_m(t), y_m(t))$ は時刻 t での Vortex blob の位置、 Γ_m は Vortex blob の循環量、 N は Vortex blob の総数、 G は渦度分布関数である。

渦法の具体的な計算は、一つの時間ステップの前半に Convection step の計算を行い、後半に Diffusion step の計算を行う。Convection step では、流れに関して与えられた境界条件の下で式(4)と式(2)を、複素速度ポテンシャルをベースとした境界要素法を用いて解くが、流れ関数 ψ は、次式のように非回転成分に対応する流れ関数 ψ_h と、回転成分に対応する流れ関数 ψ_v に分解して計算を行う。

$$\psi = \psi_v + \psi_h \quad (7)$$

式(7)を式(2)に代入して次式が得られる。

$$\nabla^2 \psi_v = -\xi \quad (8)$$

$$\nabla^2 \psi_h = 0 \quad (9)$$

Diffusion step では、式(5)のみを解く。

2.2 流れ関数の計算（前半のステップ）

ψ_h の解を得るために、複素速度ポテンシャル β_h 、 β_v を導入する。

$$\beta_h = \phi_h + i\psi_h \quad (10)$$

$$\beta_v = \phi_v + i\psi_v \quad (11)$$

ここで、 ϕ_h は非回転成分に対応する速度ポテンシャル、 ϕ_v は回転成分に対応する速度ポテンシャル、 i は虚数単位である。

式(6)の渦度分布関数 G に関して Gauss 関数型を考えると、渦度場 ξ_m は次式で表される。

$$\xi_m(X, t) = \frac{\Gamma_m}{\pi \cdot \varepsilon_m(t)^2} \exp\left(-\frac{r_m^2}{\varepsilon_m(t)^2}\right) \quad (12)$$

ここで、 $r_m = |X - X_m(t)|$ 、 $\varepsilon_m(t)$ は渦要素のコア半径である。式(12)は、式(5)で表される 2 次元拡散方程式の解に対応している。

式(12)で与えた m 番目の渦要素による“回転成分に対応する流れ関数 $\psi_{v,m}$ ”及び渦要素の総和に対応する ψ_v の誘導については、前報において説明を省略していたので、以下に示す。

m 番目の渦要素の中心を原点として、式(8)を極座標表示すると次のようになる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_{v,m}}{\partial r} \right) = -\xi_m \quad (13)$$

ここで、 $\psi_{v,m}$ は m 番目の渦要素による回転成分に対応する流れ関数である。

今、式(12)を式(13)に代入して積分すると、 m 番目の渦要素による周方向の誘導速度 $u_{\theta,m}$ と $\psi_{v,m}$ が次式で得られる。

$$u_{\theta,m}(X, t) = -\frac{\partial \psi_{v,m}}{\partial r} = \frac{\Gamma_m}{2\pi r_m} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{r_m^2}{\varepsilon_m(t)^2}\right) \right\} \quad (14)$$

$$\psi_{v,m}(X, t) = -\frac{\Gamma_m}{2\pi} \left\{ \log r_m + \int_{r_m}^1 \frac{\exp\left(-\frac{t^2}{\varepsilon_m^2}\right)}{t} dt \right\} \quad (15)$$

具体的な計算においては、式(15)における ε_m が小さいとして、右辺第二項を零と近似して、式(15)の右辺第 1 項に対応する複素速度ポテンシャル β_v を次式で表している。

$$\beta_v = -\sum_{m=1}^N \frac{i\Gamma_m}{2\pi} \ln(X - X_m) \quad (16)$$

一方、 β_h の解は、次式で表されるコーシーの積分公式を、複素変数境界要素法を用いて解く。

$$\beta_h(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{\beta_h(\zeta)}{\zeta - X} d\zeta \quad (17)$$

ここで、 D は境界を表し、 ζ は境界 D 上の点である。式(17)の解を得るため双量倒置法¹⁵⁾を用いる。各要素を線形要素で離散化することで、各節点において速度ポテンシャルおよび流れ関数に関する方程式が得られる。流体の境界における境界条件も含め、計算方法の詳細は前報^{12),13)}のとおりであるが、空気室内の水面条件については、空気室内の空気圧

力は時間的に変化するが、空間的に一定と考え、以下のよう
に与える。

$$\frac{DX}{Dt} = w^*(X; t) \quad (18)$$

$$\frac{D\phi_h}{Dt} = -\frac{D\phi_v}{Dt} + \frac{1}{2}w \cdot w^* - gy - \frac{p - p_0}{\rho} \quad (19)$$

ここで、 g は重力加速度、 ρ は水の密度、 p は空気圧力、 p_0 は大気圧、 w は複素速度 ($w = u - iv$)、 w^* は w の共役複素数を表す。

また、入射波境界位置での水面変位と速度ポテンシャルについては、次式のように、微小振幅波理論で得られる規則波の解を与える。

$$\eta = -a \sin \omega t \quad (20)$$

$$\phi_h = -\frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh} \cos \omega t \quad (21)$$

ここで、 a, ω, k は、それぞれ入射波の振幅、角周波数、波数である。また、 h は水深である。

物体表面の運動学的条件についても、前報と同様に与えるが、2次元 BBDB の没水表面は、浮体表面と水中ダクト表面で構成されるため、Fig.2 のように、二つの基準節点 (Reference node 1, Reference node 2) を設けて、BBDB の没水表面上の流れ関数を次式で表す。

$$\begin{aligned} -\psi_{h,A} + \psi_{h,j} &= \psi_{v,A} - \psi_{v,j} + U_b(y_j - y_A) \\ &\quad - V_b(x_j - x_A) - \frac{1}{2}\Omega(R_j^2 - R_A^2) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{cases} R_j = \{(x_j - x_0)^2 + (y_j - y_0)^2\}^{1/2} \\ R_A = \{(x_A - x_0)^2 + (y_A - y_0)^2\}^{1/2} \end{cases}$$

ここで、浮体表面上の任意の節点 $\zeta_j = (x_j, y_j)$ での流れ関数を $\psi_j = \psi_{h,j} + \psi_{v,j}$ 、基準節点 $\zeta_A = (x_A, y_A)$ での流れ関数を $\psi_A = \psi_{h,A} + \psi_{v,A}$ としている。 (x_0, y_0) は浮体の重心座標、 U_b 、 V_b はそれぞれ浮体の x, y 方向の並進運動速度、 Ω は浮体重心まわりの回転角速度である

基準節点では、速度ポテンシャルと流れ関数が共に未知であるため、式(17)の実数部と虚数部として得られる速度ポテンシャルに関する式と流れ関数に関する式の両式を用いる。

Fig.2 Reference nodes on BBDB.

2.3 Diffusion step の計算 (後半のステップ)

後半の Diffusion step においては、式(5)で示される渦度に関する拡散方程式を Core-Spreading 法¹⁶⁾を用いて解く。

Core-Spreading法では、 m 番目の Vortex blob による渦度場と誘導速度を、それぞれ式(12)と式(14)で与える。この方法では、渦の粘性拡散を、渦要素コア $\varepsilon_m(t)$ の時間進行による増大で表現するが、この渦要素コア $\varepsilon_m(t)$ の増大率を 2 次元拡散方程式の解との対応から次式で与える。

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{2\nu}{\varepsilon(t)} \quad (23)$$

2.4 渦度の導入モデル

物体表面からの渦度の生成と流体領域への拡散のモデルについては、前報と同じく、滑らかな物体表面については渦層モデル¹⁷⁾、物体の角部については Vorticity shedding モデル¹⁸⁾の 2 つのモデルを併用する方法を用いる。モデルの詳細は前報において記載済みであるので、以下では概要について述べる。

2.4.1 渦層モデル

物体の滑らかな表面から流体領域への渦度の生成と拡散については、Fig.3 に示すような渦層モデルを用いる。この方法では、物体表面の渦層内では速度勾配が一定で、渦度が一樣との仮定の下に、渦層内の渦度の移流と拡散を計算して、渦要素を渦層外の流場へ流出させることで、物体表面から流場への渦度の流出を表現する。

Fig.3 Vortex generation from smooth body surface.

2.4.2 Vorticity shedding モデル

物体の角部から発生する渦度の表現には、Vorticity shedding モデルを用いる(Fig.4)。この方法では、物体の角部における相対流速ベクトルの大きさに等しい渦強さを持つ Vortex sheet が、物体端部から流体内に、相対流速ベクトルの向きに放出されるとする。物体角部から放出された Vortex sheet は、その循環量に等しい Vortex blob に変換されると考える。

Fig.4 Vortex generation from sharp edged body.

2.5 空気室内の空気に関する熱力学

空気室内の空気を理想気体と見なせば、次の状態方程式、質量保存則、エネルギー保存則が成り立つ。(小島他¹⁹⁾)

$$\frac{p_a}{\rho_a} = RT_a \quad (24)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho_a V_a) + \frac{dm_a}{dt} = 0 \quad (25)$$

$$p_a \frac{dV_a}{dt} + C_v \frac{d}{dt} \left(\frac{p_a V_a}{R} \right) + C_p T_e \frac{dm_a}{dt} = 0 \quad (26)$$

ここで、 p_a は空気室内の空気圧力、 ρ_a は空気室内の空気密度、 R は気体定数、 V_a は空気室内の気体の体積、 C_v は定容比熱、 $C_p (=C_v + R)$ は定圧比熱である。 T_e については、 T_a を空気室内の絶対温度、 T_0 を外気の絶対温度とする時、オリフィスから空気が流出する場合は $T_e = T_a$ 、オリフィスから空気が流入する場合は $T_e = T_0$ である。また、 dm_a/dt は空気室天井に設置したオリフィスから出入りする空気の質量の時間変化で、付録に示すように、以下の式で表す。

$$\frac{dm_a}{dt} = \pm \rho_e \varepsilon A_w \frac{C_d C_s}{\sqrt{1 - C_d^2 \varepsilon^2}} \sqrt{2C_p |T_a - T_0|} \quad (27)$$

ここで、 C_d は縮流係数、 C_s は速度係数、 $\gamma (=C_p/C_v)$ は比熱比である。 A_w は空気室内水面の水線面積で、空気室の幅 W と長さ l_e の積として表わされる。オリフィスの開口面積を A_n とすると、オリフィスの開口比 ε は $\varepsilon = A_n/A_w$ で定義される。 ρ_e は空気流の密度で、流出時は $\rho_e = \rho_a$ 、流入時は $\rho_e = \rho_0$ である。ここで、 ρ_0 は外気の密度である。

式(24)と式(25)より次式が得られる。

$$\frac{V_a}{RT} \frac{dp_a}{dt} + \frac{p_a}{RT_a} \frac{dV_a}{dt} - \frac{p_a V_a}{RT_a^2} \frac{dT_a}{dt} + \frac{dm_a}{dt} = 0 \quad (28)$$

式(24)と式(26)より次式が得られる。

$$C_v \frac{V_a}{R} \frac{dp_a}{dt} + p_a \frac{dV_a}{dt} \left(1 + \frac{C_v}{R} \right) + C_p T_e \frac{dm_a}{dt} = 0 \quad (29)$$

今、 p_a, T_a, V_a の変動が小さいと仮定して、大気圧 p_0, T_0 、静水時の空気室の体積 V_0 とそれぞれの変動量 p_s, T_s, V_s を用いて次のように表す。

$$p_a(t) = p_0 + p_s(t) \quad (30)$$

$$T_a(t) = T_0 + T_s(t) \quad (31)$$

$$V_a(t) = V_0 + V_s(t) \quad (32)$$

式(30)~式(32)を、式(28),(29)に代入して、微小な項を省略して、空気室からの空気の流出時と流入時に分けて整理すると次のようになる。

a) 流出時

$$\frac{dp_s}{dt} = -\gamma \frac{p_0}{V_0} \left(\frac{dV_s}{dt} + \varepsilon A_w \frac{C_d C_s}{\sqrt{1 - C_d^2 \varepsilon^2}} \sqrt{2C_p |T_s|} \right) \quad (33)$$

$$\frac{dT_s}{dt} = (1 - \gamma) \frac{T_0}{V_0} \left(\frac{dV_s}{dt} + \varepsilon A_w \frac{C_d C_s}{\sqrt{1 - C_d^2 \varepsilon^2}} \sqrt{2C_p |T_s|} \right) \quad (34)$$

b) 流入時

$$\frac{dp_s}{dt} = -\gamma \frac{p_0}{V_0} \left(\frac{dV_s}{dt} - \varepsilon A_w \frac{C_d C_s}{\sqrt{1 - C_d^2 \varepsilon^2}} \sqrt{2C_p |T_s|} \right) \quad (35)$$

$$\frac{dT_s}{dt} = (1 - \gamma) \frac{T_0}{V_0} \left(\frac{dV_s}{dt} - \varepsilon A_w \frac{C_d C_s}{\sqrt{1 - C_d^2 \varepsilon^2}} \sqrt{2C_p |T_s|} \right) \quad (36)$$

時刻 t の p_s, T_s が既知であれば、式(33)~(36)を用いて時刻 $t + \Delta t$ における p_s, T_s を求めることができる。

2.6 BBDBの運動方程式

BBDBの2次元運動を考える。Fig.1に示すように、 x 軸と y 軸方向の並進運動をSurge運動、Heave運動、BBDBの重心周りの反時計方向の回転運動をPitch運動と定義する。

本論文では、水を粘性流体として扱うために、浮体没水部の表面には、法線方向に働く流体圧力と接線方向に働く摩擦力が作用する。

浮体表面の法線方向に働く流体圧力に関しては、前報と同じく、Uhlman²⁰⁾によって提案された、粘性流体の基礎式から導かれた“総エネルギーに関する境界積分方程式”を用いて計算する。境界上の節点 i において、次の積分方程式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \theta_i B(\mathbf{X}_i; t) + \int_C B(\zeta; t) \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r_{i\zeta}} \right) dC_\zeta \\ & = - \int_C \left[a_n \left(\ln \frac{1}{r_{i\zeta}} \right) + v \frac{\mathbf{r}_{i\zeta} \cdot (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\xi})}{r_{i\zeta}^2} \right] dC_\zeta + \iint_A \frac{\mathbf{r}_{i\zeta} \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi})}{r_{i\zeta}^2} dA_\zeta \end{aligned} \quad (37)$$

ここで、 θ_i は節点 i における内角、 $\partial/\partial n$ は境界上での法線方向微分、 $\mathbf{u}$ は流速ベクトル、 $\boldsymbol{\xi}$ は渦度ベクトル、 ζ は流体領域内もしくは境界上の位置、 $\mathbf{n}$ は境界上での法線方向ベクトル、 C_ζ は境界、 A_ζ は流体領域内を表す。 $B, a_n, r_{i\zeta}$ はそれぞれ次式で与えられる。

$$B = \frac{p}{\rho} + g y + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \quad (38)$$

$$a_n = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad (39)$$

$$r_{i\zeta} = |\mathbf{r}_{i\zeta}| = |\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\zeta}| = \{(x_i - \zeta_1)^2 + (y_i - \zeta_2)^2\}^{1/2} \quad (40)$$

ここで、 p は流体圧力である。式(37)において、未知数は B あるいは、法線方向の流体加速度 a_n であり、どちらか一方の既知数が境界条件として与えられる。

式(37)を解くための境界条件に関しては、自由表面において、圧力 p は空気室内で $p = p_a$ 、空気室外で $p = p_0$ で、節点位置及び節点の流速は既知であるから、式(38)より B を求めることができる。水底では、流速の法線方向成分は零であるため、 $a_n = 0$ である。浮体表面では、浮体の加速度を用いて、 a_n を次のように表す。

$$a_n = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (n_1 u + n_2 v) = n_1 \frac{\partial u}{\partial t} + n_2 \frac{\partial v}{\partial t} \quad (41)$$

$$= n_1 [\dot{U}_b - (y - y_0) \dot{\Omega}] + n_2 [\dot{V}_b + (x - x_0) \dot{\Omega}]$$

ここで、 $\dot{U}_b, \dot{V}_b$ は浮体の加速度の x, y 方向成分、 $\dot{\Omega}_b$ は浮体の重心まわりの回転角加速度、 n_1, n_2 は浮体表面における法線方向ベクトルの x, y 方向成分である。 $\dot{U}_b, \dot{V}_b, \dot{\Omega}_b$ はニュートン第 2 法則より次のように表すことができる。

$$M \dot{U}_b = \int_{S_b} (p n_1 - \mu n_2 \xi) dC_\zeta + F_1 \quad (42)$$

$$M \dot{V}_b = \int_{S_b} (p n_2 + \mu n_1 \xi) dC_\zeta - Mg + F_2 \quad (43)$$

$$I \dot{\Omega}_b = \int_{S_b} (p n_3 + \mu n_4 \xi) dC_\zeta + F_3 \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} n_3 &= -n_1(y - y_0) + n_2(x - x_0) \\ n_4 &= n_2(y - y_0) + n_1(x - x_0) \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

ここで、 M は浮体の質量、 I は浮体の重心周りの慣性モーメント、 μ は粘性係数、 $F_1 \sim F_3$ は、係留力等の流体力以外の外力、 S_b は浮体表面の境界を表す。

式(42)~(44)の右辺の積分項の中の第 2 項は摩擦力を示すが、以下のようにして求めている。

Fig.3 に示すような物体表面の接線方向に働くせん断応力 τ は次式で表される。

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial s} \quad (46)$$

一方、物体表面での滑りなしの条件より、渦層内の渦度は次式で表される。

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial n} \approx -\frac{\partial u}{\partial n} \quad (47)$$

式(47)を式(46)に代入することにより、せん断応力 τ が次式で得られる。

$$\tau = -\mu \xi \quad (48)$$

このせん断応力を物体境界周りに積分することにより、物体に働く摩擦力の合力を求める。

浮体が線形バネで係留された場合を考えると、式(42)~(44)は、式(38)を用いて次のように書き換えることができる。

$$M \dot{U}_b - \rho \int_{S_b} B n_1 dC_\zeta = \int_{S_b} \{-\rho f(y, \mathbf{u}) n_1 - \mu n_2 \xi\} dC_\zeta - \sum_{n=1}^{n_M} k_n (l_n(t) - l_{0,n}) \cos \varphi_n(t) \quad (49)$$

$$M \dot{V}_b - \rho \int_{S_b} B n_2 dC_\zeta = \int_{S_b} \{-\rho f(y, \mathbf{u}) n_2 + \mu n_1 \xi\} dC_\zeta - Mg - \sum_{n=1}^{n_M} k_n (l_n(t) - l_{0,n}) \sin \varphi_n(t) \quad (50)$$

$$I \dot{\Omega}_b - \rho \int_{S_b} B n_3 dC_\zeta = \int_{S_b} \{-\rho f(y, \mathbf{u}) n_3 + \mu n_4 \xi\} dC_\zeta + \sum_{m=1}^{n_M} [-k_n (l_n(t) - l_{0,n}) (y_n(t) - y_0(t)) \cos \varphi_n(t) + k_n (l_n(t) - l_{0,n}) (x_n(t) - x_0(t)) \sin \varphi_n(t)] \quad (51)$$

$$f(y, \mathbf{u}) = g y + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \quad (52)$$

ここで、 n_M は線形バネの総数、添え字 n は n 番目の線形バネに関する変数であることを表す。 k_n はバネ定数、 $l_n(t)$ は時刻 t での線形バネの長さ、 $l_{0,n}$ は無荷重時の線形バネの長さ、 $\varphi_n(t)$ は時刻 t での線形バネの着底点における水平軸と線形バネのなす角、 $(x_n(t), y_n(t))$ は時刻 t における浮体側係留点の座標である。

式(37), (49)~(51)を用いた $N+3$ 元の連立方程式を解くことにより、各境界における B, a_n 及び浮体の加速度 $\dot{U}_b, \dot{V}_b, \dot{\Omega}_b$ を求めることができる。

2.7 一次変換効率の計算法

入射波の進行方向に単位時間に輸送されるエネルギー束の平均値 E_w は次式で表わされる。

$$E_w = \frac{\rho g^2 a^2 W}{4 \sigma f(kh)}, \quad f(kh) = \frac{2 \cosh^2 kh}{2kh + \sinh 2kh} \quad (53)$$

空気室のオリフィスを通して出入りする空気の流量を $Q(t)$ 、上付きバーで一周期に渡る時間平均を表わすものとする、オリフィスから出入りする空気流エネルギー E_{air} は以下の式で表わされる。

$$E_{air} = \overline{p_a(t) \cdot Q(t)} \quad (54)$$

今、次式を考慮すると

$$Q(t) = \pm \varepsilon A_w \frac{C_d C_s}{\sqrt{1 - C_d^2 \varepsilon^2}} \sqrt{2 C_p |T_s|} \quad (55)$$

一次変換効率 η_E は次式で表わされる。

$$\eta_E = E_{air} / E_w \quad (56)$$

3. 水槽実験

Fig.5 Arrangement of BBDB Model.

Fig.5 に示すように、BBDB の一次変換効率に関する規則波中実験を佐賀大学海洋エネルギー研究センターの 2 次元造波水槽で行った。水槽は長さ 19.5m、幅 0.8m、高さ 1.2m で、

水槽の両端に吸収式造波機が設置されている。水深は 1.0m である。実験に用いた BBDB 模型は、Fig.6 に示すような、長さ 0.85m、幅 0.78m、高さ 0.6m の大きさで、バラストの質量も含めた質量は 87.5kg である。オリフィス開口比 ε は 0.0076 である。BBDB 模型は、水槽中央部に緩係留され、波浪中で平衡位置に保持するために、波下側にもナイロン糸を用いて緩く引っ張られている。波下側の初期張力は 1N である。実験では入射波、反射波および透過波を計測するための波高計を 8 本(1ch~8ch)、使用した。また、空気室内の水面変動を計測するために 2 個の超音波式変位計(9ch,10ch) を、空気室内の空気圧力を計測するために圧力計(12ch)を取り付けた。BBDB の運動は、高速度ビデオカメラと MVTec 社製の画像処理システム HALCON を用いて、非接触方式で計測した。

Fig.6 BBDB Model.

4. 計算結果と実験結果の比較

計算法の妥当性を検証するために、BBDB 模型実験対応の計算を行い、計算結果と実験結果の比較を行った。計算では、 $t=0$ sec で流体は静止状態とし、入射波境界から規則波を入射させた。浮体は線形バネで係留されている。流体境界に近づく浮体からの反射波や透過波は、ダンピングレイヤーにより減衰させる。計算では、物体表面で渦度が発生させず、Diffusion step の計算も行わない計算（水の運動を β_h のみで行うため、ポテンシャル計算に相当する）も併せて行い、浮体運動に及ぼす流体の粘性影響、渦度の影響を明らかにする。Fig.6 に、模型の幾何学的な緒元を示しているが、その他の計算条件を Table 1 に示す。

Table 1 Calculation condition

Depth (m)	1.00
Length of BBDB (m)	0.85
Weight of BBDB (kg/m)	107.0
Moment of inertia of BBDB ($\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{m}$)	13.4
Spring constant (kg/m)	51.0
Incident wave amplitude (a ; cm)	2.5
Non-dimensional time step (ΔT^*)	0.01
Total calculation Time (T^*)	30
Ratio of wave and BBDB length (λ/L)	2.0 ~ 6.0

表中の浮体重量、慣性モーメントは単位奥行当たりの値である。入射波の周期 T を用いて無次元時間を $T^*=t/T$ と定義し、計算の時間ステップは $\Delta T^*=0.01$ とする。計算は $T^*=30$ まで行った。また、渦層モデルにおける渦層厚さ Δh は、前報で示したように、一様流中にある 2 次元円柱周りの流れにおける円柱後流の流速分布に関する実験結果と計算結果の比較から、その一致度が最も良かったものとして、次式で求めている。

$$\Delta h/L = 0.5/\sqrt{Re}, \quad Re = u_{max}L/\nu \quad (57)$$

ここで、 Re はレイノルズ数、 L は BBDB の長さ、 u_{max} は規則波中の最大水平流速である。

Fig.7 Calculated and measured surge amplitude of "BBDB".

Fig.8 Calculated and measured heave amplitude of "BBDB".

Fig.9 Calculated and measured pitch amplitude of "BBDB".

$T^*=20\sim30$ の間の BBDB の運動, 空気室内の空気圧力と水面変位に関する時系列を用いて, FFT を用いて, 入射波と等しい周波数成分の振幅を求めた。

Fig.7~Fig.13 に計算結果と実験結果の比較を示す。図では, 提案した渦法による粘性流体解析法により得られた計算値 (図中の Vortex method) と実験値の比較を示している。また, 図には, 水の運動を非粘性の渦無し流れと仮定し, 前半のステップでの複素速度ポテンシャルに関する計算のみを行う時系列計算法から得られた値 (図中の Potential theory) も併せて示している。それぞれの図において, 横軸は, 入射波の波長 λ と浮体長さ L の比 (λ/L) を示す。縦軸は, 入射波の振幅 a や波数 k 等を用いて無次元化している。

計算では, 式(27)に示した速度係数 C_s と縮流係数 C_d を与える必要がある。 C_s は 1.0 にきわめて近く, $C_s=1.0$ としても大きな誤差を生じないとされているので, ここでは $C_s=1.0$ とする²¹⁾。また, 縮流係数 C_d については, 流体が水の場合には 0.6~0.7 程度とされるが, 流体が空気の場合は, 付録に示した, エッジが尖った通常のオリフィス板に関する JIS 規格の実験式²²⁾等が示されている。JIS 規格では, 流出係数 $C (=C_d C_s / \sqrt{1-C_d^2 \varepsilon^2})$ の値が, オリフィス開口比 ε をパラメータとして, 管内レイノルズ数 $Re_D (=D_1 u_1 / \nu)$ を横軸とした図として示されているが, 本実験に近い条件として, $\varepsilon=0.1$ の場合に C_d は 0.6 程度となる。本実験では, オリフィスは, 板に穴をあけただけで, 先端は, エッジ型になっていないこと, オリフィス開口比 ε は 0.0076 と JIS 規格範囲外の値であること, を考慮して, 本計算では, C_d の値を 0.6, 0.7, 0.8 と変化させた計算を行った。

Fig.7~Fig.9 は, BBDB の運動振幅 (Surge: X_a , Heave: Y_a , Pitch: θ_a) に関する比較である。また, Fig.10 と Fig.11 は, Fig.5 に示した空気室内の 2 つの内部波高計測点位置 (9ch, 10ch) における水面変動振幅に関する計算値と実験値の比較を示している。Fig.12 及び Fig.13 は, それぞれ, 空気室内の空気圧力振幅と一次変換効率に関する計算値と実験値の比較を示している。流体の粘性や渦の影響を無視したポテンシャル理論に基づく計算値は, Heave や Pitch の共振点付近で, 実験値よりも大きくなっている。このため, 空気室内の水面変位と空気圧力や一次変換効率に関しても, ポテンシャル理論による計算結果は, 共振周波数近傍の周波数帯で, 実験結果と大きな差が生じている。また, Surge 等の浮体運動に関しては, 渦法による計算値と実験値には差が表れている周波数帯がある。これは, 実験において, BBDB の波下側運動時に弛んでいたナイロン係留索を計算では線形バネとして扱ったこと等による影響と思われる。

縮流係数 C_d が計算結果に与える影響に関しては, C_d の変化は浮体運動に大きな影響を与えていないが, C_d の減少に伴い Heave は僅かながら大きくなっている。 C_d が大きくなると空気室から出入りする空気量が増加するため, 空気室内の水面変位振幅が大きくなるとともに, 空気室内の空

気圧力が低下する。一次変換効率に関しては, C_d の増減に伴い, 空気室内の水面変動量は同様な増減傾向を示すが, 空気室内の空気圧力は逆の傾向を示す。このため, 空気室内の空気圧力とオリフィスから出入りする空気量 (水面変位に伴って変化する空気室内の体積変化にほぼ等しい) の積で定義される空気パワーは, 一次変換が最大になる周波数以外の周波数帯では, C_d が変化しても大きな影響を受けないようである。

以上の計算結果と実験結果との比較から, 粘性流体解析法としての渦法による計算結果は, BBDB の運動, 空気室内の水面変動と空気圧力, 一次変換効率のいずれについても実験結果と概略一致しており, 計算法の妥当性は確認されたものと考えられる。計算に用いる C_d の値については, 実用的には $C_d=0.6\sim0.7$ 程度で良いように思われる。

次に, $\lambda/L=4.5$ の入射波の場合に, 渦法計算で求めた $T^*=20, 20.25, 20.5, 20.75$ の 4 つの時刻での BBDB 周りの渦度分布と流速分布を Fig.14, Fig.15 に示す。各時刻での水面位置も示している。BBDB の角部, 水中ダクト前方の外側の角部, 水中ダクト後方の角部付近で渦が発生している。特に, 水中ダクト後方の角部付近で生じている渦度は, 他の角部と比べ, 強さ, 空間的な広がりとも大きく広がっている。

Fig.10 Calculated and measured amplitude of internal free surface elevation at No.9 wave gauge position.

Fig.11 Calculated and measured amplitude of internal free surface elevation at No.10 wave gauge position.

Fig.12 Calculated and measured amplitude of air pressure in air chamber.

Fig.13 Calculated and measured primary conversion efficiency.

5. 結論

本論文では、著者らが提案した渦法による2次元粘性流体解析法を用いて、浮体式の振動水柱型波力発電装置の一次変換性能を評価する方法を示した。計算では、タービン負荷をオリフィス負荷に置き換え、空気室内の空気の挙動解析には、状態方程式、質量保存則、エネルギー保存則を用いた。BBDBモデルを対象とした2次元水槽実験対応の計算を行い、浮体の運動、空気室内の水面変位と空気圧力、一次変換効率に関する計算値と実験値を比較した結果、Surge等の浮体運動に関して多少の差があるものの、計算結果は概略、実験結果に一致することがわかった。このことから、提案した時系列計算手法は、振動水柱型波力発電装置の一次変換性能を評価する方法として有用であると思われる。

謝 辞

本研究は、科学研究費（基盤研究(B) 26289337）の助成のもとに実施されたことを付記し、謝意を表します。

参考文献

- 1) A.F. de O.Falcão, : Wave Energy Utilization: A Review of the Technologies, Renewable and Sustainable Energy Reviews, vol.14, pp.899-918, 2010.
- 2) Masuda, Y.: Experiences in Pneumatic Wave Energy Conversion, Utilization of Ocean Waves – Wave to Energy Conversion, ASCE, pp. 1-33, 1986.
- 3) Imai, Y., Toyota, K., Nagata, S., Setoguchi, T., Oda, J., Matsunaga, M., Manago, Y. and Shimozono, T. : Experimental Study on Negative Drift Force Acting on a Floating OWC-type Wave Energy Converter, Proc. of the 19th ISOPE Conference, pp 331-338, 2009.
- 4) Toyota, K., Nagata, S., Imai, Y., Oda, J. and Setoguchi, T. : Primary Energy Conversion Characteristics of a Floating OWC “Backward Bent Duct Buoy”, Proc. of the 20th ISOPE Conference, pp.850-855, 2010.
- 5) Imai, Y., Toyota, K., Nagata, S., Setoguchi, T. and Takao, M. : An Experimental Study on Generating Efficiency of a Wave Energy Converter “Backward bent Duct Buoy”, Proc. of 9th European Wave and Tidal Energy Conference, 2011.
- 6) Suzuki, M., Kuboki, T., Nagata, S., and Setoguchi, T.: Numerical Investigation of 2-D Optimal Profile of Backward-Bent Duct Type Wave Energy Converter, Proc of Int. Conf. on Ocean and Arctic Eng, OMAE, OMAE2009-79719, 2009.
- 7) 永田修一、豊田和隆、今井康貴、瀬戸口俊明、中川寛之：浮体式振動水柱型波力発電装置の一次変換性能評価法の開発、(第1報 周波数領域での2次元問題解析法)、日本船舶海洋工学会論文集、第14号、pp.123-133, 2011.
- 8) Koo, W.C. and Lee, K.R.: Numerical and Experimental Analysis of Backward Bent Duct Buoy (BBDB) Wave Energy Converter, in Proc. of the 21st ISOPE Conference, pp.655-660, 2011.
- 9) Kurniawan, A., Hals, J. and Moan, T. : Modeling and Simulation of a Floating Oscillating Water Column, in Proc. of the 30th Int. Conf. on Ocean, Offshore and Arctic Eng., OMAE2011-49263, 2011.
- 10) Mamun, M.A.H., Nagata, S., Toyota, K., Imai, Y. and Setoguchi, T. : Numerical Simulation of Backward Bent Duct buoy by Moving Particle Semi-implicit Method, Proc. of the 13th Asian Congress of Fluid Mechanics, Duaka, Bangladesh, 2010.
- 11) Chen, D.W., Nagata, S., Imai, Y.: Modelling Wave-induced Motions of a Floating WEC with Mooring Lines using the SPH Method, Proc. of the Asian Wave & Tidal Energy Conference, pp.449-454, 2016.
- 12) 大窪慈生、永田修一、今井康貴、豊田和隆、新里英幸：渦法による浮体構造物の非線形波浪中挙動解析法の開発 ー第1報：自由表面下で振動する物体に働く流体力ー、日本船舶海洋工学会論文集、第16号、pp.49-58, 2012.
- 13) 大窪慈生、永田修一、今井康貴、新里英幸：渦法によ

る浮体構造物の非線形波浪中挙動解析法の開発 — 第 2 報：矩形および三角形浮体の 2 次元動揺問題 —, 日本船舶海洋工学会論文集, 第 22 号, pp.55-65, 2015.

- 14) Vinge, T., P. Brevig, P.: Nonlinear ship Motion”, Proc. of the 3rd. Int. Conf. on Num. Ship Hydro., pp.IV-3-1 IV-3-10, 1981.
- 15) 佐藤光三：ポテンシャル流れの複素変数境界要素法, 培風館, 2002.
- 16) Leonard, A.: Vortex methods for flow simulation, J. Computational Physics, 37, pp.289-335, 1980.
- 17) 磯良行, 亀本喬司：渦法と粒子追跡法による固液二相流解析の内部流への適用, 日本機械学会論文集 (B 編), 71 巻 711 号, pp.2671-2678, 2005.

18) Lewis, R. I.: Surface Vorticity Modeling of Separated Flows from Two-Dimensional Bluff Bodies of Arbitrary Shape, J. Mechanical Engineering Science, 23-1, pp.1-12, 1981.

- 19) 小島朗史、合田良実、鈴木諭司：波力発電ケーソンの空気出力効率の解析 —波エネルギーに関する研究 第 1 報—, 港湾技術研究所報告, 第 22 巻, 第 3 号, pp.125-158, 1983.
- 20) Uhlman, J. S. Jr. : An Integral Equation Formulation of the Equations of Motion of an Incompressible Fluid, Naval Undersea Warfare Center Division Newport, Rhode Island, Technical Report, 10,086, 1992.
- 21) 松尾一泰：圧縮性流体力学, 理工学社, 1994.
- 22) JIS Z8762-2: 円形管路の絞り機構による流量測定方法— 第 2 部：オリフィス板, 2007.

Fig.14 Vorticity distribution around the BBDB

Fig.15 Velocity vector around the BBDB

付 録

絶対温度を用いた管オリフィスを通る質量流量の表示

Fig. A1 Air flow through tube orifice

本論文では、式(27)のように、管オリフィスを通る気体の質量流量を、オリフィス前後の絶対温度を用いて表した。多くの文献では、オリフィス前後の圧力差を用いた式が示されている。ここでは、圧力差を用いた式を誘導している松尾²¹⁾に従い、絶対温度を用いた式を誘導、整理する。

オリフィス上流の断面 1 における断面積を A_1 、気体の圧力と密度を p_1, ρ_1 、断面平均流速を u_1 、内部エネルギーを e_1 、絶対温度を T_1 とする。また、縮流部である断面 2 における断面積、気体の圧力と密度、断面平均流速、内部エネルギー、絶対温度を、それぞれ、 $A_e, p_2, \rho_2, u_2, e_2, T_2$ とおく。さらに、オリフィス位置での断面積を A_0 とおく。流れを一次元の等エントロピー一定常流れで断熱流れと仮定すると、連続の式とエネルギー式は以下ようになる。

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_e \quad (A1)$$

$$e_1 + p_1 / \rho_1 + u_1^2 / 2 = e_2 + p_2 / \rho_2 + u_2^2 / 2 \quad (A2)$$

今、気体が完全気体で、定圧比熱 C_p が温度に無関係という仮定を設け、単位質量当たりのエンタルピーを h とすると次式が成り立つ。

$$h = e + p / \rho = C_p T \quad (A3)$$

式(A3)を式(A2)に代入すると、次式が得られる。

$$C_p T_1 + u_1^2 / 2 = C_p T_2 + u_2^2 / 2 \quad (A4)$$

等エントロピー流れでは、比熱比を γ とすると、 $T / \rho^{\gamma-1}$ が一定であるため、二つの断面において、次式が成り立つ。

$$T_1 / \rho_1^{\gamma-1} = T_2 / \rho_2^{\gamma-1} \quad (A5)$$

式(A1), (A4), (A5)から、次式が得られる。

$$u_2 = \sqrt{\frac{2C_p(T_1 - T_2)}{1 - C_p^2 \beta^2 (T_2 / T_1)^{\frac{2}{\gamma-1}}}} \quad (A6)$$

よって、理論質量流量 $\dot{m}_l$ は次式で求められる。

$$\dot{m}_l = \rho_2 A_e u_2 \quad (A7)$$

実際の質量流量 $\dot{m}_a$ は、速度係数 C_s を導入すると次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{m}_a &= C_s \dot{m}_l \\ &= \rho_1 \varepsilon C_d C_s A_1 \frac{(T_2 / T_1)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\sqrt{1 - C_d^2 \varepsilon^2 (T_2 / T_1)^{\frac{2}{\gamma-1}}}} \sqrt{2C_p |T_a - T_0|} \end{aligned} \quad (A8)$$

今、 ρ_1 と ρ_2 の差が小さく、 $\rho_1 = \rho_2$ と考えると、式(A8)は次のようになる。

$$\dot{m}_a = \rho_1 \varepsilon A_1 \frac{C_d C_s}{\sqrt{1 - C_d^2 \varepsilon^2}} \sqrt{2C_p |T_a - T_0|} \quad (A9)$$