カルマン・シェーンヘルの式から導出された比例関係を用いた 形状影響係数の決定

正会員 藪 下 和 樹* 正会員 岡 畑 豪*

Determination of Form Factor Using Proportional Relationship
Derived From Kármán-Schoenherr Formula

by Kazuki Yabushita, Member Go Okahata, Member

Summary

An exact solution of the Kármán-Schoenherr equation is presented using a similar derivation of the PKN equation solution. The Lambert W function, a special function, is used in the derivation. A proportional relationship of the skin-friction resistance coefficient of a flat plate in the turbulent flow is obtained by means of the exact solution. An expression which expresses a proportion of the viscous resistance coefficient is also found. Thus, the total resistance coefficient can be approximated by a simple power function. We perform curve fitting to some results of the ship resistance tests using the power function. Consequently, it can be found that the present approach for determination of the form factor is quite useful.

1. 緒 言

船舶の抵抗を推定するときは、通常、乱流中の平板の摩擦抵抗係数 C_F を基礎に、形状影響係数 $1 + K$ を掛けたものを粘性抵抗係数 $C_V = (1 + K)C_F$ と考える¹⁾。更に造波抵抗係数 C_W が加わったものが全抵抗係数 $C_T = (1 + K)C_F + C_W$ である。ただし、実船の場合はこれに粗度係数 ΔC_F が加わる。

このように平板の摩擦抵抗係数 C_F は船舶工学では重要な式で

$$C_F = \frac{\alpha}{(\log_{10} Re - \beta)^\gamma} \quad (1)$$

と表されることも多い。ここで Re は平板の長さに基づいたレイノルズ数である。例えば ITTC の式²⁾は平板の摩擦抵抗係数という位置づけではないが、 $\alpha = 0.075$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$ である。また、Hughes の式¹⁾は $\alpha = 0.066$, $\beta = 2.03$, $\gamma = 2$ である。更に Conn の式³⁾は $\alpha = 0.463$, $\beta = 0$, $\gamma = 2.6$ である。近年、Grigson 等⁴⁾⁵⁾は境界層積分式の数値計算結果から平板の摩擦抵抗則を上式のようにまとめている。また、勝井等⁶⁾⁷⁾は更に綿密な数値計算を行い $\alpha = 0.0066577$, $\beta = 4.3762$, $\gamma = 0.042612 \log_{10} Re + 0.56725$ とまとめている。

横軸を X 、縦軸を Y として、次のように定義すれば式 (1) は傾き 1 の比例式となる。

$$X = \eta \quad (2)$$

$$Y = \left(\frac{\alpha}{C_F} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (3)$$

ただし、

$$\eta = \log_{10} Re - \beta \quad (4)$$

である。著者等⁸⁾は粘性抵抗係数 C_V を

$$X = \eta \quad (5)$$

$$Y = \left(\frac{\alpha}{C_V} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (6)$$

とすれば粘性抵抗係数も比例式となることを示した。ただし傾きは $1/(1 + K)^{\frac{1}{\gamma}}$ である。更に著者等は全抵抗係数 C_T をべき関数で表し、長年の経験がなくとも機械的に形状影響係数を求める方法を提案しているが、これも粘性抵抗係数が比例式として表されているからできることである。

一方、平板の摩擦抵抗係数の陰的な表記としてカルマンの乱流修正式⁹⁾¹⁰⁾¹¹⁾

$$\frac{\sqrt{2}\kappa}{\sqrt{C_F}} = \log(ReC_F) + C_1 \quad (7)$$

がある。ここで κ はカルマン定数である。Kármán は上式の係数を実験で決定し

$$\frac{1}{\sqrt{C_F}} = A \log_{10}(ReC_F) + B \quad (8)$$

$$A = 4.15, \quad B = 1.7 \quad (9)$$

としている。更に Schoenherr¹²⁾¹¹⁾は様々な実験値より

$$\frac{A}{\sqrt{C_F}} = \log_{10}(ReC_F) \quad (10)$$

$$A = 0.242 \quad (11)$$

* 防衛大学校機械システム工学科

原稿受理 平成 30 年 2 月 21 日

としている。この式をカルマン・シェーンヘルの式と呼ぶ。特に日本の大学、研究機関、造船所ではカルマン・シェーンヘルの式が使われることが多いが、陰的な表記となっているために上述のような粘性抵抗の比例式化がむづかしい。

そこで本研究では、カルマン・シェーンヘルの式からその解を求め、まず平板の摩擦抵抗係数を比例式に変換し、続いて粘性抵抗係数も比例式にできることを示す。更に、既存の抵抗試験の結果から実際に形状影響係数を求めることを試みる。加えて、式 (1) の平板の摩擦抵抗則における α (カルマン定数に相当) や β 値についてカルマン・シェーンヘルの式と比較する。

2. カルマン・シェーンヘルの式の解とその性質

2.1 カルマン・シェーンヘルの式の解

本節ではカルマン・シェーンヘルの式の解を求める方法を紹介する。Goudar 等¹³⁾¹⁴⁾は PKN 方程式

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = C_1 \log(Re\sqrt{f}) + C_2 \quad (12)$$

の解を Lambert の W 関数¹⁵⁾¹⁶⁾¹⁷⁾¹⁸⁾を用いて得ている。

本論ではカルマンの乱流修正式とカルマン・シェーンヘルの式を併せて以下のように書く。

$$\frac{\sqrt{2}\kappa}{\sqrt{C_F}} = \log(CReC_F) \quad (13)$$

ただし、 $\log$ の底は e とする。カルマン・シェーンヘルの式の場合、 $\kappa = 0.394$ (式 (30))、 $C = 1$ である。また、カルマンの乱流修正式の場合、 $\kappa = 0.392$ (式 (28))、 $C = 10^{1.7/4.15} \approx 2.568$ である。

著者等は PKN 方程式の解を参考に、PKN 方程式と多少異なるカルマン・シェーンヘルの式の厳密解を導く。カルマン・シェーンヘルの式、式 (13) に対して指数関数をとれば

$$CReC_F = e^{\frac{\sqrt{2}\kappa}{\sqrt{C_F}}} \quad (14)$$

$$C_F = \frac{1}{CRe} e^{\frac{\sqrt{2}\kappa}{\sqrt{C_F}}} \quad (15)$$

ここで

$$f(Re) = \frac{\kappa}{\sqrt{2C_F}} \quad (16)$$

と C_F を $f(Re)$ に変換する。ここで $\kappa > 0$ より $f(Re) > 0$ である。

$$\frac{\kappa^2}{2f(Re)^2} = \frac{1}{CRe} e^{2f(Re)} \quad (17)$$

$$f(Re)^2 e^{2f(Re)} = \frac{\kappa^2}{2} CRe \quad (18)$$

更に

$$\xi = \sqrt{\frac{\kappa^2}{2} CRe} \quad (19)$$

と Re を ξ に変換する。ただし、 $\xi > 0$ である。

$$f(\xi)^2 e^{2f(\xi)} = \xi^2 \quad (20)$$

$$f(\xi) e^{f(\xi)} = \xi \quad (21)$$

上式を満たす関数は Lambert の W 関数¹⁵⁾¹⁶⁾¹⁷⁾¹⁸⁾ (1758 年) と知られている特殊関数である (付録 A)。

$$f(\xi) = W(\xi) \quad (22)$$

よって、式 (16) より平板の摩擦抵抗係数は

$$C_F = \frac{\kappa^2}{2W(\xi)^2} = \frac{\frac{\kappa^2}{2}}{W\left(\sqrt{\frac{\kappa^2}{2} CRe}\right)^2} \quad (23)$$

である。以上、カルマン・シェーンヘルの式とカルマンの乱流修正式の厳密解が得られた。

2.2 摩擦抵抗係数の比較のための漸近展開

本論の主題の粘性抵抗係数の比例関係を用いた形状影響係数の決定とは直接関係ないが、カルマン・シェーンヘルの式の解を得たことにより、カルマン・シェーンヘルの式と式 (1) の摩擦抵抗係数との比較が可能となったので、ここに記しておく。しかしながら式 (23) のままでは比較することができないので、式 (A4) の Lambert の W 関数の漸近展開を使って以下のように変形した。

$$C_F = \frac{\alpha}{(\log_{10} Re - \beta)^2} \quad (24)$$

$$\alpha = \frac{2\kappa^2}{(\log 10)^2} \quad (25)$$

$$\beta = \frac{2}{\log 10} \left(-\log \sqrt{\frac{\kappa^2}{2} C} + \log \log \sqrt{\frac{\kappa^2}{2} CRe} - \frac{\log \log \sqrt{\frac{\kappa^2}{2} CRe}}{\log \sqrt{\frac{\kappa^2}{2} CRe}} \right) \quad (26)$$

ただし、式 (1) の $\gamma = 2$ の場合のみを比較する。

2.3 カルマン定数

カルマン定数 κ は、近年の壁面摩擦応力と速度分布を計測した Österlund の研究¹⁹⁾ (1999 年) によれば $\kappa = 0.38$ とされている定数である。各摩擦抵抗係数のカルマン定数を計算すると以下のようになる。

式 (7) と式 (8), (9) を比較してカルマンの乱流修正式のカルマン定数を求めると

$$\frac{\sqrt{2}\kappa}{\log 10} = \frac{1}{4.15} \quad (27)$$

$$\kappa = \frac{\log 10}{\sqrt{2} \times 4.15} \approx 0.392 \quad (28)$$

である。式 (7) と式 (10), (11) を比較してカルマン・シェーンヘルの式のカルマン定数を得ると

$$\frac{\sqrt{2}\kappa}{\log 10} = 0.242 \quad (29)$$

$$\kappa = \frac{0.242 \times \log 10}{\sqrt{2}} \approx 0.394 \quad (30)$$

である。式 (1) が ITTC の式の場合、カルマン定数を式 (24), (25) との比較から求めれば

$$\frac{2\kappa^2}{(\log 10)^2} = 0.075 \quad (31)$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{0.075}{2}} \times \log 10 \approx 0.446 \quad (32)$$

である。Hughes の式のカルマン定数を式 (1) と式 (24), (25) との比較から求めれば

$$\frac{2\kappa^2}{(\log 10)^2} = 0.066 \quad (33)$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{0.066}{2}} \times \log 10 \approx 0.418 \quad (34)$$

である。ちなみに Grigson⁴⁾⁵⁾ や勝井⁶⁾⁷⁾ は $\kappa = 0.41$ を採用している。カルマン定数のみについて見れば、古典的なカルマンの乱流修正式やカルマン・シェーンヘルの式が現代的な Österlund の値に近いようである。

2.4 β 値

式 (1) の β の値は、Hughes の式では $\beta = 2.03$, ITTC の式では $\beta = 2$ である。一方、カルマン・シェーンヘルの式の場合は式 (26) のようになる。Fig.1 に式 (26) と Hughes の式と ITTC の式の β 値の比較を行った。カルマン・シェーンヘルの式の β 値と Hughes の式、ITTC の式の値はかなり違うものであった。

Fig. 1 Comparison of β Values

3. 粘性抵抗係数の比例式への変換

3.1 カルマン・シェーンヘルの式の比例式への変換例

粘性抵抗係数の比例式を用いた形状影響係数の決定へ話題を戻す。式 (13) を比例式へ変換する場合、例えば

$$X = \log(CReC_F) \quad (35)$$

$$Y = \frac{\sqrt{2}\kappa}{\sqrt{C_F}} \quad (36)$$

としても比例式化できるが、横軸に C_F が含まれると抵抗試験の解析が不可能になるので X は Re のみで表され、 Y は C_F のみで表される場合のみを考えることとする。

このような条件でカルマン・シェーンヘルの式を比例式化するものとして様々な可能性の中から常識的に横軸を $\log Re$ と選べば

$$X = \log Re \quad (37)$$

$$Y = \frac{\sqrt{2}\kappa}{\sqrt{C_F}} - \log CC_F \quad (38)$$

が考えられる。Fig.2 に示すように上式の平板の抵抗則は比例式に変換されていることが分かる。

Fig. 2 An Example of Proportional Relationship of Kármán-Schoenherr Formula and Failure Case of Proportional Relationship of Viscous Resistance Coefficient

3.2 粘性抵抗係数の比例式への変換の失敗

式 (37), 式 (38) の C_F を単純に C_V に替えると

$$X = \log Re \quad (39)$$

$$Y = \frac{\sqrt{2}\kappa}{\sqrt{C_V}} - \log CC_V \quad (40)$$

となるが、式 (40) は式 (38) の定数倍でないで粘性抵抗係数は比例式に変換することはできない。Fig.2 に示すように、実際に計算してみても比例式でないことは明らかである。ただし、形状影響係数 K が小さい場合は直線に近く、直線でないことを明確に示すため、図上では非常識に大きな K に対しても計算している。

3.3 カルマン・シェーンヘルの式の比例式への変換

式 (23) にカルマン・シェーンヘルの式の厳密解が得られたので、

$$X = \eta \quad (41)$$

$$Y = \frac{\kappa}{\sqrt{2C_F}} \quad (42)$$

とすれば、平板の摩擦抵抗係数 C_F は原点を通る傾き 1 の比例式となる。ただし

$$\eta = W \left(\sqrt{\frac{\kappa^2}{2} C_F Re} \right) \quad (43)$$

である。Fig.3 に実線で比例式化されたカルマン・シェーンヘルの式のグラフを示す。原点は速度がゼロで、摩擦抵抗係数は無限大であることを表している。また、式 (43) の η とレイノルズ数 Re も同時に示す。模型船のレイノルズ数から実船のレイノルズ数に当たる $10^6 \leq Re \leq 10^{10}$ では、レイノルズ数の指数部と η はおおよそ定数差であることが分かる。

Fig. 3 Proportional Relationship of Kármán-Schoenherr Formula and Viscous Resistance Coefficient when Form Factor $K = 0.2$

3.4 粘性抵抗係数の比例式への変換

得られた厳密解、式 (23) を用いれば、3.2 章で失敗した粘性抵抗係数 C_V も比例式に変換できることがわかる。

$$X = \eta \quad (44)$$

$$Y = \frac{\kappa}{\sqrt{2C_V}} = \frac{\kappa}{\sqrt{2(1+K)C_F}} \quad (45)$$

ただし、この比例式の傾きは $1/\sqrt{1+K}$ である。Fig.3 に破線でこの比例式に変換された粘性抵抗係数を $K = 0.2$ の場合について示す。

4. 形状影響係数の決定

著者等⁸⁾は、式 (1) で摩擦抵抗係数が表される場合について、形状影響係数を経験がなくとも機械的に求めることができる方法を提案したが、カルマン・シェーンヘルの式の場合はその陰的な表現のため、この方法が適用できなかった。本論では粘性抵抗係数を比例式へ変換できたので、著者等の方法に適用してみる。全抵抗係数 C_T は著者等の方法と同じように

$$X = \eta \quad (46)$$

$$Y = \frac{\kappa}{\sqrt{2C_T}} = a_1\eta + a_n\eta^n + a_{n+1}\eta^{n+1} \quad (47)$$

とする。ここで n は正の整数である。また、上式の最後の 2 項が造波抵抗を表すものとしている。このように単純な式で表されるのも、カルマン・シェーンヘルの式を元にした粘性抵抗係数が比例式に変換できたためである。また、

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{1+K}} \quad (48)$$

である。まず n を定め、抵抗試験結果に対して式 (47) に最小二乗法でフィッティングすると a_1, a_n, a_{n+1} が求まる。次に n を変化させ、フィッティング曲線と抵抗試験結果の残差が最も小さい n を選び、最後に式 (48) より形状影響係数 K を求めることができる。なお、本論文では $n \geq 30$ とした。

5. 適用例

5.1 Lucy Ashton の抵抗試験

Lucy Ashton の抵抗試験の結果²⁰⁾へ著者等の方法を適用し、カルマン・シェーンヘルの式の比例式への変換に伴う粘性抵抗係数の比例式化が有効に働くことを確認する。Fig.4 に抵抗試験結果と式 (47) のフィッティング関数を示す。原点を通る直線が抵抗試験結果に向かいそこから抵抗試験に沿って曲がっている。最小二乗法から得られた係数は以下の通りである。

$$K = 0.080 \quad (49)$$

$$n = 66 \quad (50)$$

$$a_n = -7.54465 \times 10^{-48} \quad (51)$$

$$a_{n+1} = 1.33466 \times 10^{-48} \quad (52)$$

Fig.5 に拡大図を示す。実験値には多少の計測誤差の変動があるが、フィッティング関数がうまく実験値の中心を通っていることが分かる。Fig.6 に通常の抵抗試験結果の表示法で、抵抗試験結果の全抵抗係数 C_T 、平板の摩擦抵抗係数 C_F 、粘性抵抗係数 $(1+K)C_F$ を示す。比較のため、Prohaska の方法²¹⁾で得た形状影響係数による粘性抵抗係数も示す。日本では低速接線法が使われることが多いようであるが、すべての機関で同じ手順で行われる画一的手法ではないので、本論文では手順が明確に示されている Prohaska の方法と比較する。Prohaska の方法では図示しているように、フルード数が $0.1 \leq Fr \leq 0.2$ の間の抵抗試験結果のみから形状影響係数を推測する。一方、

著者等の方法では全データを使い解析する。Lucy Ashton の抵抗試験の場合は本法も Prohaska の方法もほぼ近い形状影響係数が得られているが、本法がわずかに大きな値である。

Fig. 4 Fitting Power Function and Resistance Test Result of Lucy Ashton

Fig. 5 Magnified Fitting Power Function and Resistance Test Result of Lucy Ashton

Fig. 6 Skin-Friction Resistance Coefficient, Viscous Resistance Coefficient and Resistance Test Result of Lucy Ashton

5.2 SR174 船型の抵抗試験

SR174 船型の抵抗試験²²⁾に適用する。Fig.7に抵抗試験結果とフィッティング関数を示す。最小二乗法から得られた係数は以下の通りである。

$$K = 0.361 \quad (53)$$

$$n = 76 \quad (54)$$

$$a_n = 8.03894 \times 10^{-55} \quad (55)$$

$$a_{n+1} = -2.76575 \times 10^{-55} \quad (56)$$

Fig.8に拡大図を示す。しばしば観察されるように、低速時には実験値にバラつきがあるが、フィッティング関数がうまく最低速時のデータを無視して中速時の実験値の中心を通っていることが分かる。Fig.9に通常の抵抗試験結果の表示法で、 C_T 、 C_F 、 $(1+K)C_F$ を示し、Prohaskaの方法と比較する。SR174船型の抵抗試験の場合は、本法の形状影響係数がProhaskaの方法よりも大きく、実験値に近いようにも見える。

Fig. 7 Fitting Power Function and Resistance Test Result of SR174

Fig. 8 Magnified Fitting Power Function and Resistance Test Result of SR174

Fig. 9 Skin-Friction Resistance Coefficient, Viscous Resistance Coefficient and Resistance Test Result of SR174

5.3 昌運丸の抵抗試験

昌運丸の抵抗試験²³⁾に適用する。Fig.10 に抵抗試験結果とフィッティング関数を示す。最小二乗法から得られた係数は以下の通りである。

$$K = 0.402 \quad (57)$$

$$n = 45 \quad (58)$$

$$a_n = 1.56647 \times 10^{-28} \quad (59)$$

$$a_{n+1} = -3.5809 \times 10^{-29} \quad (60)$$

Fig.11 に拡大図を示す。低速時の実験値にフィッティング関数がかうまく沿っていることが分かります。本試験は低速時も計測精度が良いことが推測される。Fig.12 に通常の抵抗試験結果の表示法で、 C_T 、 C_F 、 $(1+K)C_F$ を示し、Prohaskaの方法と比較する。昌運丸の抵抗試験の場合は本法の形状影響係数がProhaskaの方法よりも大きく、低速時の実験値が滑らかなので信頼できると仮定すれば、より実験値に沿った形状影響係数が得られているようにも見える。

Fig. 10 Fitting Power Function and Resistance Test Result of Shounmaru

Fig. 11 Magnified Fitting Power Function and Resistance Test Result of Shounmaru

Fig. 12 Skin-Friction Resistance Coefficient, Viscous Resistance Coefficient and Resistance Test Result of Shounmaru

5.4 ロバスト性

形状影響係数を機械的に決定することを著者等の方法⁸⁾は目的としており、抵抗実験で得られた計測値から経験に基づき適当なものを選び出すことをせず、すべての計測値から形状影響係数を決定する。実用性を考え、フルード数が大きい計測値が形状影響係数に影響しないことを確認する。まず、フルード数が最小の計測値番号を1、最大の計測値番号をNとする。最初に1~Nの計測値で形状影響係数を決定する。それがFig.13中の横軸が $m=0$ の値である。次に1~N-1の計測値で決定したものが $m=1$ の値である。そして、 m を増加させて1~N-mの計測値で形状影響係数を決定する。その結果をFig.13に示す。図から明らかなように、本方法で求めた形状影響係数はフルード数が大きな計測値が欠けてもほぼ一定の値が得られており、本法のロバスト性が確認できる。

6. 結言

本論ではPKN方程式の解を参考にカルマン・シェーンヘルズの式の解をLambertのW関数を使って導いた。この解を使えば、平板の摩擦抵抗係数を比例式へ変換できることを示し、

Fig. 13 Form Factors Obtained From 1st to $(N-m)$ -th Data of Resistance Test

更に粘性抵抗係数も比例式化できることを示した。この比例式化された粘性抵抗係数を使えば、抵抗試験の結果から機械的に形状影響係数を求めることができることを示し、実際に3つの抵抗試験の結果に適用し良好な結果を得ることができた。

加えて、カルマン定数や β 値について従来の平板の摩擦抵抗則の値とカルマン・シェーンヘルの式を比較した。

参考文献

- 1) Hughes, G. : Friction and Form Resistance in Turbulent Flow, and a Proposed Formulation for Use in Model and Ship Correlation, Transactions of the Institution of Naval Architects, 96, pp.314-376, 1954
- 2) Subjects 2 and 4 : Skin Friction and Turbulence Stimulation, 8th Inter. Towing Tank Conf., pp.71- 227, 1957
- 3) Conn, J. F. C. et al. : B. S. R. A. Resistance Experiments on the LUCY ASHTON, Part II - The Ship-Model Correlation for the Naked Hull Conditions, T. I. N. A., vol. 95, pp.350-436, 1953
- 4) Grigson, C.W.B. et al. : An Accurate Smooth Friction Line for Use in Performance Prediction, Trans. RINA A, Vol. 135, pp. 149-162, 1992
- 5) Grigson, C.W.B. : A Planar Friction Algorithm and Its Use in Analysing Hull Resistance, RINA, pp.76-115, 1999
- 6) 勝井辰博他 : 平板摩擦抵抗値の再検討について, 関西造船協会論文集, 239, pp.37-44, 2003
- 7) Katsui, T. et al. : The Proposal of a New Friction Line, Proc. Osaka Colloquium, pp.76-83, 2005
- 8) 岡畑豪, 藪下和樹 : 形状影響係数の一決定法, 日本船舶海洋工学会論文集, 26, pp.17-25, 2017
- 9) Kármán, T. von : Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz, Proc. 3rd Intern. Congress. Appl. Mech., Stockholm, 1930
- 10) Kármán, T. von : Turbulence and Skin Friction, J. of the Aeronautical Sciences, Vol.1, No.1, pp.1-20, 1934
- 11) 大串雅信 : 理論船舶工学 (下巻), 海文堂, 1958
- 12) Schoenherr, K. E. : Resistance of Flat Surfaces Moving Through a Fluid, Transactions Society of Naval Architects and Marine Engineers, Vol.40, pp.279-313, 1932
- 13) Goudar, C. T. and Sonnad, J. R. : Explicit Friction Factor Correlation for Turbulent Flow in Smooth Pipes. Industrial & Engineering Chemistry Research, 42(12), pp.2878-2880, 2003
- 14) Muzychka, Y. S., Duan, Z.P. and Yovanovich, M. M. : Fluid Friction and Heat Transfer in Microchannels. Microfluidics and Nanofluidics Handbook: Chemistry, Physics, and Life Science Principles, CRC Press, Boca Raton, 2011
- 15) Lambert, J. H. : Observations Variæ in Mathesin Puram, Acta Helvetica, Physico-Mathematico-Anatomico-Botanico-Medica 3, pp.128-168, 1758
- 16) Euler, L. : De Serie Lambertina Plurimisque Eius Insignibus Proprietatibus, Acta Acad. Scient. Petropol. 2, pp.29-51, 1783
- 17) de Bruijn, N. G. : Asymptotic Methods in Analysis, Amsterdam, North-Holland, 1961 (New York, Dover, pp.27-28, 1981)
- 18) Corless, R. M. et al. : On the Lambert W Function, Adv. Comput. Math. 5, pp.329-359, 1996
- 19) Österlund, J. M. : Experimental Studies of Zero Pressure-Gradient Turbulent Boundary-Layer Flow, Doctoral Thesis, Department of Mechanics, Royal Institute of Technology, 1999
- 20) Lackenby, H.: B.S.R.A. Resistance Experiments on the LUCY ASHTON, Part III- The Ship-Model Correlation for the Shaft-Appendage Conditions, T. I. N. A., Vol.97, pp.109-166, 1955
- 21) Prohaska, C. W.: A Simple Method for the Evaluation of the Form Factor and the Low Speed Wave Resistance, ITTC Resistance Session Brief Summary of Written Contributions, pp.65-66, 1966
- 22) 社団法人日本造船研究会 : 第 174 研究部会馬力節減を目的とした 1 軸中型船の船尾形状の開発に関する研究報告書, 1978, <http://www.jstra.jp/html/PDF/SR174-5303.pdf>

- 23) 多田納久義：工業高校における重錘式試験水槽利用の現状と問題点，全国造船教育研究会会誌，第 18 号，pp.27-36，1982

付 録

A1. Lambert の W 関数

Fig. A1 Lambert W Function

1758 年，数学者 Lambert¹⁵⁾ は後に Lambert の W 関数と呼ばれることになる特殊関数に関して研究した。また，1783 年，Euler¹⁶⁾ は Lambert の W 関数に関する論文を執筆する。Lambert や Euler の記述とは異なるが，Lambert の W 関数を本論文で用いる記法で定義すると

$$W(x)e^{W(x)} = x \quad (A1)$$

を満たす関数 $W(x)$ ということになる。そのグラフは Fig.A1 に示すような関数であり，対数関数に似ているが原点を通る。また，

$$W(0) = 0, \quad W(1) = \Omega, \quad W(e) = 1 \quad (A2)$$

という点を通る。 Ω はオメガ定数で $\Omega \approx 0.56714329$ で $\Omega e^\Omega = 1$ を満たす。船舶工学のカルマン・シェーンヘル¹⁷⁾の式の解で

はレイノルズ数¹⁷⁾が大きいこともあり，漸近展開が必要である。Lambert の W 関数の x が大きい場合の漸近展開は de Bruijn の著書¹⁷⁾(1981 年)にあるが，記述に間違いがあり，1996 年，Corless 等¹⁸⁾により訂正された。この漸近展開に著者等がコーシー積をとったものを以下に示す。

$$W(x) = \log x - \log \log x + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{m-k}}{k!} \left[\begin{matrix} m \\ m-k+1 \end{matrix} \right] \frac{(\log \log x)^k}{(\log x)^m} \quad (A3)$$

ここで上式の大括弧 $[m, m-k+1]$ は第 1 種スターリング数である。第 1 種スターリング数には 2 つの定義があるが，上式ではすべて正值である定義を採用した。第 1 種スターリング数を具体的に書けば Table A1 のようになる。

Table A1 Stirling Numbers of the First Kind $[n, k]$

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	2	3	1				
4	0	6	11	6	1			
5	0	24	50	35	10	1		
6	0	120	274	225	85	15	1	
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1

更に，式 (A3) を具体的に書けば

$$W(x) = \log x - \log \log x + \frac{\log \log x}{\log x} + \frac{\log \log x(-2 + \log \log x)}{2!(\log x)^2} + \frac{\log \log x(6 - 9 \log \log x + 2(\log \log x)^2)}{3!(\log x)^3} + \{\log \log x(-24 + 72 \log \log x - 44(\log \log x)^2 + 6(\log \log x)^3)\}/(4!(\log x)^4) + O\left(\left(\frac{\log \log x}{\log x}\right)^5\right) \quad (A4)$$

である。