部分積み時の非真球タンクの座屈強度に関する研究

—第1報：形状初期不整による座屈強度低下率の推定法の開発—

正会員 佐野 敦 司*

正会員 藤久保 昌 彦**

Buckling Strength of a Non-Spherical Tank in the Partially Filled Condition
-Estimation of the reduction factor due to initial shape imperfection-

by Atsushi Sano, *Member*

Masahiko Fujikubo, *Member*

Summary

Buckling strength of a non-spherical tank in the partially filled condition, which is one of the severest loading conditions in terms of the buckling design of Moss-type LNG tanks, is investigated both experimentally and theoretically. As the first part of the study, an axisymmetric loading condition for an upright tank position is considered. The buckling collapse test of scaled models is performed under the loading condition similar to the partially filled condition. The non-linear FE analyses of the test models are carried out and the results are compared with the test results to verify the accuracy of the imperfection sensitivity obtained by the FE analysis. A method to estimate the reduction factor of the elastic buckling strength due to initial shape imperfection is proposed by introducing a concept of an equivalent toroidal shell analogy and applying the Hutchinson's solution to the toroidal shell under combined circumferential compression and meridional tension based on the Koiter's initial post-buckling theory. A simplified method to estimate the elastoplastic buckling strength is also proposed by applying the Mises's type plastic correction to the estimated elastic buckling strength. The reasonable accuracy of the estimated elastic and elastoplastic buckling strengths is demonstrated through a comparison with the results of scaled model tests and FE analyses.

1. 緒 言

モス方式のLNGタンクは、球形タンクまたは円筒部を延長させたストレッチタンクと円筒スカートによって構成される。著者の一人は、タンクの容積効率を向上させるために、球形タンクの形状を真球殻から楕円球殻に置き換え、円筒部と繋ぎ合わせた非真球タンクのプロトタイプ¹⁾を行った。

一般的に、殻構造物の座屈強度は形状初期不整によって低下することが知られている。非真球タンクにおいて座屈強度に対する安全係数および許容工作精度基準を構築するためには、形状初期不整による座屈強度低下率を調査することが必要である。

球形タンクおよび非真球タンクにおいて座屈強度上最も厳しい条件の一つが、部分積み条件である。部分積み条件ではFig. 1に示すように自重と鉛直方向加速度の作用により、

タンク下部は子午線方向に引張、周方向に圧縮条件となる。部分積み条件は、直立状態の軸対称荷重条件のみならず、Heel状態のような非軸対称条件についても座屈設計に考慮しなければならない。

Fig. 1 Deformation of tank shell in partially filled condition

Pedersenら²⁻⁴⁾は、モス方式のLNG球形タンクを対象に、弾性座屈強度に関する理論的および実験的研究を行っている。初期不整を有するシェルの後座屈挙動に関するKoiter理論⁵⁾に基づき、直立およびHeel状態の部分積みタンクについて、初期不整による座屈強度低下率を調べた。その結果、初期不整による座屈強度低下率は荷重条件によって異なり、部分積み時の球形シェルでは、子午線方向の引張力の作用により、一様外圧による二軸圧縮状態に比べて、低下率は小さいことを示した。

* 川崎重工業株式会社

** 大阪大学大学院工学研究科

Odland⁶⁾は、軸方向引張および外圧を組み合わせた条件下でトロイダルシェルセグメントによる種々の座屈試験を実施し、初期不整を有する球形シェルの弾性座屈強度は、圧縮側の最大主応力だけではなく主応力比にも依存することを明らかにするとともに、初期不整と座屈荷重の低下の関係を明らかにした。また、Koiter 理論が球形シェルの初期不整感を簡易かつ明確に表すことを示した。

中村ら⁷⁾は、球殻の座屈強度に及ぼす形状初期不整の影響を明らかにし、部分積み時の座屈強度に関する簡易設計式を提案している。

一方、著者らが調べた範囲では、部分積み時の非真球タンクの座屈強度に関する研究はこれまで行われていない。非真球タンクの座屈強度に関する基礎的な研究として、著者ら¹⁾はシェル構造物の膜理論をもとに部分積み時の非真球タンクの座屈前応力分布の解析解を導出し、初期不整が無い非真球タンクの弾性座屈強度推定方法を提案した。

本研究では、軸対称荷重条件での非真球タンクの座屈強度に対する初期不整の影響を実験および理論解析の両面から調べる。まず、部分積みを模擬した荷重条件で半楕円球殻と円筒部で構成される模型について座屈試験を実施する。試験体の板厚および形状初期不整は 3 次元レーザースキャナによって計測し、座屈強度の初期不整感度を実験的に調べる。さらに、試験体の弾塑性大変形 FEM 解析を実施し、試験結果との比較を行って、解析で得られた初期不整感度の推定精度を検証する。

次に、模型サイズの非真球タンクについて、FEM 解析を用いて一連の線形応力解析と大変形弾性座屈解析を実施し、弾性座屈強度に対する形状初期不整の影響を調べる。次に、Koiter の初期後座屈挙動理論 (Initial post-buckling theory) および Hutchinson⁸⁾によるトロイダルシェルに関する理論解に基づき、弾性座屈強度低下率の推定を試みる。本研究で対象とする座屈現象は、二方向のシェル曲率比と各方向の膜応力比の組み合わせが本質的な要因であると考え、その上で、既に理論解が存在しかつ、上記の支配因子が考慮可能であるトロイダルシェルに置き換えて、適用性を調べた。また、推定した低下率と FEM 解析から得られた低下率の比較を行う。さらに、導出された弾性座屈強度低下率と Mises 型塑性修正を組み合わせ、部分積み時の非真球タンクの弾塑性座屈強度 (最終強度) の実用的推定法を提案し、FEM 解析および模型試験の結果との比較により適用性を検証する。実スケールタンクの初期不整感度については、船体の Heel 状態といった非軸対称条件も加えた結果を次報にて報告する。

2. 模型座屈試験

2.1 試験概要

Fig. 2 に、試験体の断面図を示す。試験体は、長径 1,000mm、短径 560mm の楕円球殻に、半径 1,000mm、高さ 300mm の

円筒殻を接合した構造とし、合計 5 体製作した。試験体の材料はアルミニウム合金(A5083-O)とした。部分積み時の応力状態を再現するために、楕円球殻の頂点に鉛直上向きの荷重を作用させた。板厚は実タンクと寸法比がほぼ等価となるよう 2mm とし、その領域で座屈が生じるよう設計した。また、楕円球殻の頂点周辺は、荷重負荷に対する剛性を確保するため厚板とした。

Fig. 3 に示すように、楕円球殻部は板厚 5mm の円板から絞り加工によって成形した。円筒部はロール成形によって製作し、楕円球殻と円筒部を突き合わせ溶接によって接合した。上記の加工による残留応力影響も考えられるが、熱処理は実施していない。

Fig. 4 に試験治具を示す。H 型鋼で構成された治具に試験体を搭載し、フランジ部を介してボルト、ナットで固定した。ボルトは周方向に 30°ピッチで配置し、内外面合わせて 24 箇所を固定した。鉛直荷重は 1 本の油圧ジャッキで与えた。

(a) Cross section

(b) Shell thickness of the ellipsoidal shell part

Fig. 2 Test model

Fig. 3 Process of the spinning work for the ellipsoidal shell part

Fig. 4 Test setup

2.2 材料

試験体の楕円殻部は絞り加工で製作されており, 成形による加工硬化の影響で素材と材料特性が異なると考えられたことから, 未使用の試験体から試験片を取り出し材料特性を取得した。

Table 1 および Fig. 5 に, 成形の影響を含む試験片から取得した材料特性を示す。取得した弾塑性領域の応力-ひずみ線図は後述する FEM 解析で用いた。また比較のために未使用の素材から取得した材料特性も合わせて示す。

Table 1 Material properties of A5083

	Young's modulus (MPa)	Poisson's ratio	0.2% proof strength (MPa)
Base metal	70,000	0.3	149
Spinning worked metal	70,000	0.3	219

Fig. 5 Material model

2.3 形状初期不整と板厚

絞り加工による成形のため, 楕円球殻部では形状初期不整および板厚もばらつきが生じる。各試験体の初期形状を精度良く測定するため, 非接触式のレーザースキャナを用いて, 試験体の内面および外面に対して 3 次元形状計測を実施した。計測では子午線方向および周方向に 0.5mm ピッチで計測を実施し試験体表面の座標を同定した。得られた座標データから, Fig. 6 に示す CAD システムによって 3 次元データを生成し, 板厚分布および形状初期不整を数値的に評価した。

Fig. 6 Generation of FE-model

(a) Result of shape measurement (model No.1)

(b) Definition of height z

(c) Definition of shape imperfection

Fig. 7 Three-dimensional shape measurement results

Fig. 7 (a) に代表的な高さ z について, 外表面の測定データから得られた水平面での形状分布を示す。また, Fig. 7 (b) に z 軸の定義を示す。Fig. 7 (a) の縦軸は, シェルの水平方向半径に関する図面データと測定データとの差を示す。Fig. 7 (c) に示す通り, ゲージ長 s と定義した仮想的な円形のテンプレートを用いて局所的に真円からのずれ量を算出し, これらの最大値を初期不整 δ と定義する。座屈強度に関して, 形状初期不整が座屈固有モードと一致するときが最も厳しい

とされるが, Odland は座屈モードより長い波長の初期不整でも, 振幅が大きい場合は, 座屈モードと同等に影響を与える可能性があるとして指摘している⁶⁾. また, 座屈波長に関する解析的検討より, 球形シェルセグメントの形状初期不整を定義する上で適切なゲージ長として, $s = \sqrt{2RT}$ と推奨している. 本研究では, 本推奨値に基づいてゲージ長を 100mm とした.

板厚については, 内面と外面の計測データをもとに, 内面の法線方向外向きの直線と外面との交点で得られる距離から板厚を算出した. Fig. 8 に試験体 No.1 の板厚分布を示す. 設計板厚 2mm に対して局部的に 1.5mm 前後まで薄くなっている領域が確認された. 均一な厚さの板材を使用した場合と比較して, 絞り加工を適用した場合は板厚のばらつきが大きくなっている. そのため, 本研究での試験結果は形状初期不整のみならず板厚のばらつき影響の両者を含んだ結果であることを記しておく.

Fig. 8 Distribution of shell thickness obtained for model No.1

2.4 試験結果

Table 2 に各試験体のピーク荷重 (最終強度) 並びに座屈領域の周方向位置を示す. また, 座屈後の最大残留変形位置での δ/t を併せて示す. Fig. 9 に試験と FEM 解析での座屈後の最大残留変形の比較を示す. 全ての試験体において, 板厚が 1.5mm 前後の領域, かつ相対的に初期不整 δ が大きい箇所で座屈が生じた.

Table 2 Comparison of the ultimate load and position

		No.1	No.2	No.3	No.4	No.5
Ultimate Load (kN)	Exp.	550.6	620.0	552.6	485.5	674.0
	FEM	536.1	638.3	583.2	520.8	646.2
Position of Buckling Initiation (deg.)	Exp.	270.0	287.5	325.0	65.0	260.0
	FEM	269.3	286.3	318.1	65.7	260.3
Thickness of buckled part (mm)		1.9	2.0	2.1	2.1	2.1
δ/t		0.39	0.24	0.31	0.76	0.16

試験体 No.1 の座屈発生位置のひずみ計測点について, 内面および外面の荷重-周方向ひずみ関係を Fig. 10 に黒色のマーカーで示す. グラフ中では内面および外面をそれぞれ "Inside", "Outside" と示す. この結果から, 座屈による曲げひずみが増大した直後に, 球殻の最終強度に達していること

がわかる. Fig. 11 に各試験体のピーク荷重と δ/t の関係を整理した結果を示す. この結果から δ/t が増加すると最終強度が低下することがわかった.

Fig. 9 Comparison of residual deformation

Fig. 10 Load-circumferential strain curve for model No.1

Fig. 11 Relationship between ultimate load and δ/t

2.5 非線形 FEM 解析

初期不整を考慮した試験体の弾塑性座屈挙動を再現するため非線形 FEM 解析を実施した. 各試験体について形状初期不整および板厚分布を考慮した CAD データからモデル化し, 試験体の全領域を対象に解析を実施した.

解析は, 汎用有限要素法ソフトウェア Abaqus/standard⁹⁾ を用いた. 要素タイプは, 曲面の形状を精度良く表現すべく 8 節点次数低減積分シェル要素 (S8R5) とした. 要素分割数は, 周方向 400 分割, 子午線方向は楕円球殻の座屈発生領域における要素のアスペクト比が 1 程度になるよう設定した.

Fig. 12 に試験体 No.5 の座屈モードの写真を示す。図中の黒線は周方向に対して 5° ピッチで罫書きした子午線である。この結果から座屈モードの半波長はほぼ 5° ピッチに等しいことが確認できる。よって、FE モデルにおいて半波長の変形が 5 要素以上で表現できており、最低次の弾性座屈モードおよび最終的な座屈モードを再現する上で、要素分割数は十分であると考えられる。

各要素の板厚は要素中心位置における測定データから定義した。境界条件については、ボルト締結されたフランジ位置の節点の並進および回転変位の全てを固定し、試験体頂点のジャッキとの接触領域に一樣圧力を作用させた。非線形座屈挙動は弧長増分法を用いて解析した。

Fig. 12 Buckling mode of test model No.5

2.6 比較結果と考察

試験体 No.1 の荷重-ひずみ関係について、試験と FEM 解析の比較結果を Fig. 10 に示す。座屈変形挙動および最終強度は、良く一致していることがわかる。

Table 2 および Fig. 11 に、各試験体の実験および FEM 解析で得られた座屈荷重を整理した。FEM 結果は、いずれの試験体についても試験結果と良く一致し、初期不整の増加とともに最終強度が減少する傾向を良く捉えている。よってこれまで示した板厚分布および形状初期不整を考慮した FEM 解析によって、半楕円球殻の弾塑性座屈挙動を精度良く再現できることが確認できた。

3. 弾性座屈強度に対する形状初期不整の影響

3.1 検討手順

部分積み時の非真球タンクの座屈強度に対する形状初期不整の影響について、まず弾性座屈強度について検討する。2 章で述べたように、適切な形状・材料モデルと要素分割を用いれば、FEM によりタンクの座屈挙動を形状初期不整の影響を含めて実用上十分な精度で推定することが可能である。一方、実設計においては、弾性応力解析と弾性座屈固有値解析は必須の解析として実施されるものの、初期不整を考慮した大変形 FEM 解析を、多様な形状、寸法、荷重および初期不整条件ごとに実施することは、非常に手間と時間を要し、実用上困難である。しかし、非真球タンクの弾性座屈強

度の初期不整感度については、船級規則にも明確な評価方法が示されていないのが現状である。

そこで、初期不整のない完全シェルの座屈前応力分布、弾性座屈強度（座屈固有値）および座屈モードは FEM 解析により与えられることを前提として、その初期不整感度を、理論解を基に簡易的に推定する方法を検討する。すなわち、

- 1) 座屈前応力分布と弾性座屈強度の FEM 解析結果から、対象タンクの座屈領域を、形状および作用応力の点で等価と見なせるトロイダルシェルに置換する。
- 2) 形状初期不整による等価トロイダルシェルの初期不整感度（弾性座屈強度低下率）を、Koiter 理論⁵⁾に基づく Hutchinson 解⁸⁾により推定する。
- 3) 2)で得られた低下率を(1)の FEM 解析結果に乗じて、弾性座屈強度に対する形状初期不整の影響を考慮する。

以下では、まず部分積み状態の非真球タンクの形状と座屈前応力分布および弾性座屈強度の関係を明らかにする。次に、等価トロイダルシェルの概念と弾性座屈強度低下率の理論解について説明する。求められた弾性座屈強度低下率の適用性を FEM による弾性大変形解析の結果と比較して調べる。

3.2 対象モデル

部分積み時の非真球タンクの座屈部には、周方向に圧縮、子午線方向に引張が作用する。タンクの弾性座屈強度は、座屈部の周方向および子午線方向の形状曲率の比と作用応力の比に依存すると考えられる。ここでは、Fig. 13 に示す楕円球殻と円筒部で構成される扁平度の異なる 4 つの非真球タンク形状を対象とする。対象モデルのサイズは模型試験体と同等とする。板厚も、試験体と同等になるように楕円球殻は 2mm、円筒部は 5mm とし、それぞれ一樣板厚と仮定する。解析には Abaqus/standard を用い、要素分割、赤道部の変位境界条件および材料特性は、模型試験と同じとする。

積載荷重は、液面からの鉛直距離に比例する圧力荷重により負荷する。液位は、各モデルで体積比 10% まで貨物を搭載した状態とし、 $a/b=1.0$ のモデルにおいて LNG を搭載した場合を基準に、その他のモデルでは同一の積載重量となるよう貨物の密度を調整する。

Fig. 13 Subject model

3.3 座屈前応力分布および弾性座屈強度

非真球タンクの座屈前応力分布について、著者らはこれまでの研究で、FEM による弾性応力解析で得られる応力分布が、シェルの膜理論に基づき導き出した解析解と非常に良く一致することを確認している¹⁾。このことは、対象とする薄肉タンクでは、タンク支持部の局所的な変形を除いて、曲げ応力よりも膜応力が支配的となることを示す。よって、座屈前応力分布を膜応力の点から考察する。

Fig. 14 に、 $a/b=1.0$ および 1.5 のモデルの、同一鉛直荷重下での座屈前変形を比較する。破線が、元形状、実線が変形後を表す。変形倍率は 10^4 倍としている。また Fig. 15 に、 $a/b=1.0, 1.3, 1.5, 1.8$ の各モデルの弾性座屈モードを示し、合わせて液面ラインを示す。最大たわみ位置は $a/b=1.8$ のモデルのみ液面ラインより下方にあり、その他のモデルは液面ラインと同じ位置または上方にあることがわかった。Fig. 14 より、タンクが鉛直下方にたわむ結果、座屈領域付近では、周方向に収縮が生じ、圧縮応力が発生する。Table 3 に、同一積載荷重条件下で、座屈によるたわみが最大となる位置の周方向膜応力 σ_θ 、子午線方向膜応力 σ_ϕ および応力比 $\sigma_\theta/\sigma_\phi$ の絶対値を示す。子午線方向引張応力 σ_ϕ と比較すると、周方向圧縮応力 σ_θ は、扁平度 a/b が大きいほど増加することがわかる。これは、Fig. 14 から分かるように、 $a/b=1.0$ の真球タンクに比べて $a/b=1.5$ の非真球タンクは、底部が平坦になるため、鉛直荷重を膜力で保持するために鉛直方向の変形量が大きくなり、その結果、水平方向の収縮量が大きくなることによる。すなわち、非真球化により座屈部の周方向圧縮応力は、相対的に増加する。

Fig. 14 Comparison of deflection between $a/b=1.0$ and 1.5

Fig. 15 Elastic buckling mode of each model

Table 3 Membrane stresses calculated by FEM

Model (a/b)	Circumferential Stress σ_θ [MPa]	Meridional Stress σ_ϕ [MPa]	Stress ratio $ \sigma_\theta/\sigma_\phi $
1.0	-0.24	0.24	1.01
1.3	-0.33	0.24	1.38
1.5	-0.42	0.24	1.77
1.8	-0.50	0.24	2.07

次に Table 4 に、Fig.14 の座屈前変形を考慮して求められた、各モデルの弾性座屈固有値 λ_c （ここでは座屈時の積載荷重に対応）と Table 3 の σ_θ から算出した座屈時の最大たわみ位置の周方向圧縮応力 $\sigma_{b\theta}$ を示す。また、 $a/b=1.0$ の場合の $\sigma_{b\theta}$ に対する、他の扁平度の場合の $\sigma_{b\theta}$ の比、 $\sigma_{b\theta}/\sigma_{b\theta,1.0}$ を示す。 $\sigma_{b\theta}/\sigma_{b\theta,1.0}$ の値より、扁平度 a/b が増加するほど座屈応力 $\sigma_{b\theta}$ は増加することがわかる。これは、扁平度が大きいほど、タンク形状の子午線方向の曲率変化が大きくなり、Fig. 15 に示すように、より狭い子午線方向範囲の座屈となるためである。この時、周方向の座屈波長も短くなり半波数が増加する。

ここで、Table 3 の周方向と子午線方向の膜応力比 $\sigma_\theta/\sigma_\phi$ （扁平化による周方向圧縮応力の上昇率）と、Table 4 の座屈時の周方向圧縮応力の比 $\sigma_{b\theta}/\sigma_{b\theta,1.0}$ （扁平化による座屈応力の上昇率）を比べると、前者の方が大きい。結果として、Table 4 の λ_c が示すように、扁平度 a/b が大きいほど、より小さい積載荷重で弾性座屈が生じる。

Table 4 Elastic buckling strength calculated by FEM

Model (a/b)	Buckling Eigenvalue λ_c	Buckling Circumferential Stress $\sigma_{b\theta}$ [MPa]	Buckling Stress ratio $\sigma_{b\theta}/\sigma_{b\theta,1.0}$	Number of half waves
1.0	393	-94.3	1.00	35
1.3	376	-124.1	1.32	40
1.5	364	-152.9	1.62	46
1.8	352	-176.0	1.87	50

3.4 等価トロイダルシェルへの置換

非真球タンクの弾性座屈強度低下率を簡易的に推定するために、座屈領域に着目し、等価トロイダルシェルへの置換を試みる。なお、トロイダルシェルは、周方向と子午線方向で曲率の異なるシェルをいい、子午線方向曲率が周方向に比べて十分大きい場合はドーナツ状になり、両曲率が等しい場合は真球となる。本研究では、子午線方向曲率が周方向より小さい場合に相当する。まず、軸対称殻の形状パラメータと平衡方程式を整理する。

Fig.16 左図は、 z 軸周りの軸対称殻の断面を示す。 r は着目点 P と z 軸との距離、すなわち回転半径を表す。 ϕ は点 P におけるシェルの法線と z 軸のなす角度である。 r_1 は r - z 面内のシェルの曲率半径を、また r_2 は、点 P における法線が z 軸と交わる点 A と点 P との距離である。一方、Fig.16 右図の $N_\phi (= \sigma_\phi t)$ は、子午線方向の単位幅当たり膜力を、また $N_\theta (= \sigma_\theta t)$ は周方向の単位幅当たり膜力を表す。シェルの膜

理論に従うと、法線方向に圧力 p_r をうける軸対称シェルにおいて、次の平衡方程式が成立する。

$$\frac{N_\phi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = p_r \quad (1)$$

Fig. 16 Shell of revolution

Fig.15の各座屈半波を見ると、最大たわみ位置を中心に、子午線方向に、ある長さ l の範囲が座屈していると見なすことができる。Fig.16の点Pを最大たわみ点と見なすと、その子午線方向に引張が、周方向 (r - z 面に垂直方向) に圧縮が作用する。ここで、Fig.17(a)のような、2つの曲率半径 r_x, r_y と長さ l で定義されるトロイダルシェルを考える。トロイダルシェルは、上下対称の軸対称シェルであり、 r_x は、鉛直方向の曲率半径を、また r_y は深さ方向中央の水平断面の曲率半径を表す。いま Fig.17(b)のように、非真球殻の座屈部(点P)から法線を伸ばし、回転軸との交点Aを定めると、距離APは、Fig.16の r_2 を与える。このことを考慮して、部分積み状態の非真球殻の弾性座屈強度を考える上での「等価トロイダルシェル」を次のように定義する。

- 1) FEMにより求めた弾性座屈モード (Fig.15) の座屈半波の最大たわみ位置を点Pとする。
- 2) シェルの元形状について、点Pから伸ばした法線と回転軸との交点Aを定め、距離AP ($=r_2$) を求める。
- 3) シェルの元形状について、点Pにおける子午線方向の曲率半径 r_1 を求める。
- 4) Fig.17(b)右図のように、座屈たわみが最大値 (点P) の1%となる二点間の距離を長さ l とする。
- 5) 主曲率が $r_x=r_1$, $r_y=r_2$, 長さが l なる Fig.17(a)のトロイダルシェルを定義する。

部分積み状態の非真球殻のように、面外圧 p_r よりも積載荷重による膜力が支配的となる軸対称殻では、式(1)で $p_r=0$ においても、膜力 N_ϕ と N_θ の関係は近似的に成立する¹⁾。そこで、 $r_1=r_x$, $r_2=r_y$, $p_r=0$ において次式を得る。

$$\frac{N_\phi}{r_x} + \frac{N_\theta}{r_y} = 0 \quad (2)$$

Fig.17(a)において、軸方向に引張膜力 $N_\phi=N_x$ が作用する場合を考えると、式(2)より周方向膜力 N_θ は、次式となる。

$$N_\theta = -\frac{r_y}{r_x} N_x \quad (3)$$

すなわち、周方向には圧縮膜力が発生し、部分積み状態の非真球殻と類似の座屈前応力分布が生じる。

(a) Configuration of toroidal shell segments

(b) Equivalent toroidal shell segment

Fig. 17 Replacement of toroidal shell segments

Fig.15の各扁平度のタンクについてFEM解析結果を基に等価トロイダルシェルを定め、子午線方向引張応力 σ_ϕ がタンクと等価となるように、引張荷重を与えた。なお、点Pが液面ラインより下方にある場合は、付録1に示す力のつり合い関係から膜力 N_θ を算出する。得られた膜応力および膜応力比をTable 5に示す。Table 3に示したFEM解析による非真球殻の座屈前応力と、各応力成分および応力比とも精度良く推定できている。ただし、扁平度が大きいほど、等価トロイダルシェルの方が、周方向応力をやや高めに推定する傾向がある。これは扁平度が大きいほど、子午線方向のタンク形状の曲率変化が大きくなり、トロイダルシェルによる近似度が低下するためと考えられる。

Table 5 Membrane stresses in an equivalent toroidal shell

Model (a/b)	Circumferential Stress σ_θ [MPa]	Meridional Stress σ_ϕ [MPa]	Stress ratio $ \sigma_\theta/\sigma_\phi $
1.0	-0.24	0.24	1.00
1.3	-0.32	0.24	1.37
1.5	-0.44	0.24	1.84
1.8	-0.55	0.24	2.27

ところで、Hutchinsonは、子午線方向に単位幅当たり N_x , 周方向に N_y のような膜力分布を受けるトロイダルシェルの弾性座屈固有値の理論解を式(4)のように求めている⁸⁾。シェ

ルの上下縁の回転に対して、単純支持条件を仮定している。式(3)の関係を式(4)に代入して求めた等価トロイダルシェル
の弾性座屈応力を Table 6 に示す。

$$\lambda_{mn} = -\frac{D\pi^2}{l^2} \frac{1}{(N_x^0 m^2 + N_y^0 n^2)} \left[\frac{(m^2 + \bar{n}^2)^2}{D} + \frac{12z^2(m^2 + \bar{n}^2 r_y/r_x)^2}{\pi^4} \right] \quad (4)$$

$$\bar{n} = \frac{nl}{\pi r_y} \quad (6)$$

$$z = \sqrt{1 - \nu^2} \frac{l^2}{r_y h} \quad (7)$$

ここで、 m, n は、それぞれ子午線方向の半波数および周方向の波数を示す。

Table 6 Elastic buckling strength of an equivalent toroidal shell

Model (a/b)	Buckling Eigenvalue λ_c	Buckling Circumferential Stress $\sigma_{b\theta}$ [MPa]	Buckling Stress ratio $\sigma_{b\theta}/\sigma_{b\theta,1.0}$	Number of half waves
1.0	192	-46.0	1.00	41
1.3	182	-58.2	1.30	48
1.5	179	-78.7	1.65	55
1.8	170	-93.4	1.87	60

Fig. 18 Comparison of circumferential stress in a/b=1.5

Table 4 および Table 6 より、等価トロイダルシェルの弾性座屈応力の Hutchinson 解と非真球タンクの FEM 解を比較すると、扁平度 a/b による弾性座屈応力の変化の割合 $\sigma_{b\theta}/\sigma_{b\theta,1}$ は、両者でよく一致しているが、座屈応力 $\sigma_{b\theta}$ 自体は、FEM の方が扁平度に関わらず約 2 倍大きい結果となった。この主要因は、座屈領域での周方向圧縮応力の分布の差と考えている。この点を明確にするため、等価トロイダルシェルの FEM モデルを別途作成し、弾性解析を行い、部分積ミタンクで発生する周方向圧縮応力との比較を行った。

Fig. 18 に、 $a/b=1.5$ のモデルの、同一鉛直荷重下での周方向応力分布を比較する。破線が、等価トロイダルシェル、実線がタンクの応力を表す。トロイダルシェルでは端部を除き子午線方向にほぼ様な圧縮応力分布となる。一方、タンクでは、座屈モードの最大たわみ点より下方は、圧縮応力が

低下する。そのため、座屈時の最大たわみ点の圧縮応力は、トロイダルシェルよりも高くなる。トロイダルシェルは、ほぼ様な圧縮応力分布ならびに周辺単純支持条件を仮定する分、安全側の座屈強度を推定する。そこで、これに対する Hutchinson 解に基づいて形状初期不整の影響を推定する。

3.5 形状初期不整による弾性座屈強度低下率

Hutchinson⁸⁾は、Koiter の Initial post-buckling theory⁵⁾に基づいて、トロイダルシェルにおける初期形状不整による弾性座屈荷重低下率の理論式を導出した。Koiter 理論では、弾性座屈後の初期段階 (initial post-buckling stage) における座屈変形を摂動解で近似し、幾何学的非線形影響を考慮して後座屈挙動を定式化する。形状初期不整には座屈モードを仮定する。付録 2 に示す理論および手順により摂動解を導き、その 3 次項までとると、座屈後の平衡方程式が次式の形で与えられる。

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_c}\right) \xi + b \xi^3 = \frac{\lambda}{\lambda_c} \bar{\xi} \quad (8)$$

ここで、 λ は荷重パラメータ、 λ_c は弾性座屈固有値、 ξ は座屈変形量パラメータ、 $\bar{\xi}$ は板厚に対する形状初期不整の大きさの比 δ/t を表すパラメータとなる。形状初期不整量パラメータである。係数 b は b ファクタとよばれ、Fig. 19 に示すように、 b ファクタが正のとき、座屈後に耐荷力は上昇し、負のとき耐荷力は低下する。

Fig. 19 Load-deflection behavior of cubic structure

式(8)を ξ について微分することにより、 b ファクタが負の場合における λ の極大値 λ^* が、次式のように求められる。

$$\left(1 - \frac{\lambda^*}{\lambda_c}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \sqrt{-b} |\bar{\xi}| \frac{\lambda^*}{\lambda_c} \quad (9)$$

b ファクタが負側で大きいほど、形状初期不整 $\bar{\xi}$ による λ^* の低下は大となる。すなわち、次式の弾性座屈強度低下率 ρ が低下する。

$$\rho = \frac{\lambda^*}{\lambda_c} \quad (10)$$

3.4 の 1)~5) の手順で等価トロイダルシェルが定まると、

その軸方向に引張膜力 $\bar{N}_x$ を加えた時の周方向膜力 $\bar{N}_y$ が式(3)により与えられる。この $\bar{N}_x$ と $\bar{N}_y$ を式(B6)に代入して b ファクタが、さらに式(9)より低下率 ρ が求められる。

提案法で得られる弾性座屈強度低下率について、FEM との比較を行う。FEM では、初期不整がない完全な形状に対する弾性座屈固有値解析と、初期不整を考慮した弾性大たわみ解析をそれぞれ実施し、前者で得られた弾性座屈固有値に対する、後者の弾性大たわみ解析の座屈荷重（ピーク荷重）の比を荷重低下率として算出した。

Fig. 20 (a) に推定式から求めた弾性座屈強度低下率と最大初期たわみ/板厚比、 δ/t の関係を示す。いずれの形状においても δ/t の増加とともに弾性座屈強度が低下することが確認できる。また、 $a/b=1.0$ に比べて扁平度の大きい方が低下率は大きいことから、真球タンクに比べて非真球タンクの方が弾性座屈強度が低下しやすいことがわかる。これは非真球タンクの方が座屈領域において子午線方向の引張成分に比べて、周方向の圧縮成分が相対的に大きいためと考えている。

Fig. 20 (b) に推定式と FEM 解析との比較を示す。両者は良い相関を示しており、弾性座屈強度低下率の推定精度が確認された。また、推定式の方がやや安全側にあり、初期不整が大きいほどより低めの値となることがわかる。

(a) Relationship between reduction factor and δ/t

(b) Comparison between estimation and FEA

Fig. 20 Imperfection sensitivity of elastic buckling strength

4. 弾塑性座屈強度に対する形状初期不整の影響

4.1 完全および不完全なシェル構造の弾塑性座屈強度

2章の模型座屈試験と同様に、実船タンクは、弾塑性領域の座屈により最終強度に達すると考えられる。また、部分積み条件では周方向に圧縮、子午線方向に引張となるため、単軸圧縮に比べて塑性影響を受けやすい。そこで多軸応力を考慮した塑性修正を行い、弾塑性座屈強度を推定する。

一様引張を受けるトロイダルシェルでは、式(3)に示す周方向応力と子午線方向応力の平衡条件が常に成立する。すなわち周方向の最大圧縮強度が決まると、子午線方向の引張応力の上限も決まる。記述のように、式(3)の応力比は Table 3 の FEM 解析とも一致する。

等価トロイダルシェルの定義で用いたと同様に、代表応力の値を FEM で求められる座屈波の最大たわみ位置の周方向膜応力 $\sigma_{\theta m}$ および子午線方向膜応力 $\sigma_{\phi m}$ とする。また、弾塑性座屈強度の推定には、Cho and Frieze¹⁰⁾が提案した次の Mises 型塑性修正を適用する。

$$\left(\frac{\sigma_{\theta m}}{\rho \sigma_{\theta m E}} + \frac{\sigma_{\phi m}}{\rho \sigma_{\phi m E}} \right)^2 + \frac{\sigma_{\theta m}^2 - \sigma_{\theta m} \sigma_{\phi m} + \sigma_{\phi m}^2}{\sigma_Y^2} = 1 \quad (11)$$

Cho and Frieze の式は、第 1 項目は座屈項として弾性座屈強度に対する作用応力の比を表し、第 2 項目は降伏項として Mises 型の塑性修正を行っている。ここで、Cho and Frieze の式では、式(11)のように、周方向と子午線方向を独立に考慮しているが、一方向が引張の場合は引張側の応力項を 0 として扱う。今回対象とする非真球タンクでは、周方向膜応力と子午線方向膜応力は比例関係にあり、タンクの曲率に応じて平衡条件から応力比が決まる。そこで、次の通り周方向応力を代表値として第 1 項目を表す。

$$\left(\frac{\sigma_{\theta m}}{\rho \sigma_{\theta m E}} \right)^2 + \frac{\sigma_{\theta m}^2 - \sigma_{\theta m} \sigma_{\phi m} + \sigma_{\phi m}^2}{\sigma_Y^2} = 1 \quad (12)$$

単位荷重あたりの子午線方向応力を $\sigma_{\theta 0}$ 、周方向応力を $\sigma_{\phi 0}$ 、また荷重パラメータを λ^* で表すと、 $\sigma_{\theta} = \lambda^* \sigma_{\theta 0}$ 、 $\sigma_{\phi} = \lambda^* \sigma_{\phi 0}$ となり、これらを式(12)に代入して、弾塑性座屈強度を与える荷重パラメータ λ_p^* が次式により求められる。

$$\left(\frac{\lambda_p^*}{\rho \lambda_c^*} \right)^2 + \frac{1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}}{\sigma_Y^2} (\lambda_p^* \sigma_{\theta 0})^2 = 1 \quad (13)$$

$$\alpha = \sigma_{\theta} / \sigma_{\phi}$$

4.2 形状初期不整による弾塑性座屈強度低下率

形状初期不整による弾塑性領域での座屈強度低下率について、提案法と FEM で比較を行う。3.5 節と同様に、FEM を用いて初期不整が無い完全な状態と初期不整を考慮した

状態で弾塑性大たわみ解析を実施し荷重低下率を算出した。

Fig. 21 (a) に推定式から得られた弾塑性座屈強度低下率と δ/t の関係を示す。弾性時と同様、いずれの形状においても δ/t の増加とともに弾塑性座屈強度がより大きく低下することがわかる。弾性時に比べて全体的に座屈荷重が低下することは当然であるが、Fig. 20 (a) の弾性時よりも δ/t に対する傾きが緩やかである。すなわち、 δ/t が小さいほど、降伏の影響をより大きく受けている。これは、初期不整が小さい領域では、座屈前の一軸圧縮・一軸引張による降伏の影響をより大きく受け、初期不整が大きい場合は、変形初期段階から面外変形が進行するため、面内膜応力による座屈・降伏影響を受けにくくなるためと考えられる。

(a) Relationship between reduction factor and δ/t

(b) Comparison between estimation and FEA

Fig. 21 Imperfection sensitivity of elastoplastic buckling strength

Fig. 21 (b) に推定式と FEM 解析との弾塑性座屈強度低下率の比較を示す。両者間で良い相関が得られている。また、弾性範囲と同様に推定式の方がやや安全側の推定となる。ただし、初期不整が小さい場合の方がより安全側となる傾向となっており、ここは弾性範囲の推定と異なる。これは、式(12)において、初期不整の小さい場合は一軸圧縮・一軸引張による面内の降伏影響を受けやすくなるためと考えられる。本論文では式(13)の弾性座屈項の次数を 2 としているが、より適

切な次数について今後さらに検討する予定である。Fig. 21 (b) には、第 2 章の模型座屈試験で得られた荷重低下率を併せて示している。縦軸に (試験結果) / (初期不整が無い場合の FEA) による荷重低下率、横軸に (初期不整を考慮した FEA) / (初期不整が無い場合の FEA) による荷重低下率の値を示す。試験結果は FEM 結果とよく一致し、上述のように、推定値はこれらに比べて安全側の数値を与える。

以上の結果から、提案式の妥当性が示された。なお、扁平度が大きいほど弾塑性座屈強度の低下率が大きいことを示したが、2 章の座屈試験結果と Odland⁶⁾が実施した二軸圧縮条件下での座屈試験結果を比較すると、子午線方向の引張成分の効果もあり、弾塑性座屈強度低下率は真球シェルの 2 軸圧縮に比べて緩やかになることを確認している¹¹⁾。

5. 結論

本論文では、部分積み状態の非真球 LNG タンクの座屈強度に対する初期不整影響を明らかにするため、部分積みを模擬した荷重条件で半楕円球殻と円筒部で構成される模型について座屈試験を実施した。さらに、試験体の弾塑性大変形 FEM 解析を実施し、解析で得られた弾塑性座屈強度低下率の推定精度を検証した。座屈部の子午線および周方向の膜応力比およびシェル曲率比に基づく等価トロイダルシェルの概念を提案し、Koiter の Initial post-buckling theory およびこれに基づく Hutchinson 解を用いて、形状初期不整による弾性座屈強度低下率の推定を試みた。さらに、これと Mises 型塑性修正を組み合わせて、弾塑性座屈強度低下率の推定を行った。以下に得られた主な結果を述べる。

- (1) 模型座屈試験より、初期不整が大きいほど、最終強度が低下することを示した。また、FEM による弾塑性大変形解析により、非真球シェルの弾塑性座屈強度低下率を良好な精度で推定できることを確認した。
- (2) 等価トロイダルシェルの考えを適用し、形状初期不整による弾性座屈強度低下率の推定式を導出した。推定値は FEM 解析との良い相関を示し、かつ安全側の推定結果を与えた。
- (3) Mises の降伏条件と弾性座屈強度低下率を組み合わせた、弾塑性座屈強度の推定式を導出した。推定値は FEM 解析ならびに模型座屈試験からと良い相関を示し、かつ安全側の推定結果を与えた。
- (4) 部分積み条件において、非真球タンクは真球に比べて、周方向圧縮応力が子午線方向引張応力よりも相対的に大きくなるため、座屈強度に対する初期不整影響に、より配慮が必要である。ただし、子午線方向引張応力の存在により、外圧を受ける球殻のような二軸圧縮応力状態に比べて、初期不整による座屈強度低下は緩やかとなる。

今後の課題として実機サイズおよびタンク傾斜時での適

用性を検証する必要がある。次報では、本論文の提案法をこれらのケースに適用し、より汎用的かつ実用的な形状初期不整影響の推定法を確立する。

謝 辞

本研究の一部は、国土交通省による委託調査業務「シェールガスの海上輸送体制確立に向けた新形式 LNG 運搬船の設計強度に係る評価手法の調査」の一環として行われたものであり、関係各位に謝意を表します。また初期不整感度解析の一部は、大阪大学大学院工学研究科博士課程前期、木村勇貴氏により実施されたものであり、同氏の労に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Sano, A. Izumi, N. Matsubara, N. Fujikubo, M., 2017, Estimation of the elastic buckling strength of a non-spherical tank in the partially filled condition, ASME 2017 36th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering, OMAE2017-61397
- 2) Pedersen, P.T. and Jensen, J.J., 1976, Buckling of spherical cargo tanks for liquid natural gas, Royal Institution of Naval Architects, Transactions 118 pp. 193-205.
- 3) Pedersen, P.T. and Jensen, J.J., 1976, Correlation between experimental Buckling loads and theoretical predictions for spherical cargo tanks for LNG, Steel Plated Structures, An international Symposium, Crosby Lockwood Staples, London, pp.638-657.
- 4) Pedersen, P.T. and Jensen, J.J., 1977, On design criteria for elastic buckling of shells, PRADS-International Symposium on Practical Design in Shipbuilding, Tokyo.
- 5) Koiter, W. T., 1969, The nonlinear buckling pressure of a complete spherical shell under uniform external pressure, I, II, III and IV, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., B 72, pp 40-123.
- 6) Odland, J., 1981, Theoretical and Experimental Buckling Loads of Imperfect Spherical Shell Segments, Journal of Ship Research, Vol.25 No.3.
- 7) Nakamura, A. Yasukawa, W. Kawakami, H. Kamo, N. Yoshikawa, T., 1983, A Calculation Method for Buckling Strength of Moss Type LNG Tank System –Effect of Initial Imperfections, Journal of Kansai Society of Naval Architects, No.189, 1983.
- 8) Hutchinson, J.W., 1967, Initial Post-Buckling Behavior of Toroidal Shell Segments, Int. Journal, Solids and Structures, Vol.3 (1967)
- 9) Abaqus 2017 Abaqus Analysis User's Guide.
- 10) Cho, S.R., Frieze P.A., 1988, Strength formulation for ring-stiffened cylinders under combined axial loading and

radial pressure, Journal of Constructional Steel Research, 9 (1) (1988), pp. 3-34

- 11) Sano, A, Matsubara, N, Imai, T and Izumi, N., 2015, An experimental study for buckling strength of ellipsoidal spherical shell with initial imperfection, Technical Exchange and Advisory Meeting on Marine Structures, TEAM2015, Vladivostok, pp. 339-345.

付録 1 部分積み時の液面下のタンク子午線方向膜力の算出

部分積み時のタンクについて、液面下の子午線方向の膜力 N_ϕ を算出する。Fig. A1 に示すように、液面間の作用反作用およびタンクと液体間の内力の関係から、以下の関係が成り立つ。 n_z は、タンク法線の鉛直方向の方向余弦である。

$$M_1 g - F - \int_{s_1} p n_z dS = 0 \quad (A1)$$

$$M_2 g + F - \int_{s_2} p n_z dS = 0 \quad (A2)$$

$$-N'_\phi 2\pi r'_0 \sin\phi' + \int_{s_1} p n_z dS + N_\phi 2\pi r_0 \sin\phi = 0 \quad (A3)$$

$$-N_\phi 2\pi r_0 \sin\phi + \int_{s_2} p n_z dS = 0 \quad (A4)$$

式(A1)~(A4)を足し合わせると、次式となる。

$$-N'_\phi 2\pi r'_0 \sin\phi' + (M_1 + M_2)g = 0 \quad (A5)$$

式(A3),(A5)より子午線方向膜力 N_ϕ が算出される。

$$N_\phi = \frac{1}{2\pi r_0 \sin\phi} \left\{ (M_1 + M_2)g - \int_{s_1} p n_z dS \right\} \quad (A6)$$

Fig. A1 Equilibrium of tank in partially filled condition

付録 2 Koiter 理論とトロイダルシェルの Hutchinson 解

Koiter の Initial post-buckling theory と、これに基づくトロ

イダルシエルに対する Hutchinson 解について概説する。

Initial post-buckling theory は、後座屈挙動の初期段階、すなわちわずかに座屈変形が生じた時点での平衡状態を論じる理論である。まず、後座屈変形 $u(p)$ を次式のように表す。

$$u(p) = \bar{u}(p) + \xi u_1 + w \quad (B1)$$

ここで、 $\bar{u}(p)$ は座屈前変形を表し、荷重 p の関数である。 u_1 は座屈モードを表し、 ξ はその大きさを表す。 w は座屈後 u_1 と共に生じる高次項である。 w は次式のように ξ に関する摂動解として表される。

$$w = \xi^2 u_2 + \xi^3 u_3 + \dots \quad (B2)$$

$u_n (n=2,3, \dots)$ として、座屈モード u_1 に対する直交関数系を選ぶ。これらを次の仮想仕事の原理に代入する。

$$\int \sigma \cdot \delta \varepsilon dV = \int q \cdot \delta u dS \quad (B3)$$

ここで、 σ は応力テンソル、 $\delta \varepsilon$ は仮想ひずみテンソル、 q は荷重ベクトル、 δu は境界条件を満足する任意の仮想変位ベクトルである。式(B3)は、次式のように展開される。

$$\begin{aligned} & \xi [\{\bar{\sigma}_c + (ap_c \xi + bp_c \xi^2 + \dots) \bar{\sigma}'_c + \dots\} L_{11}(u_1, \delta u) \\ & + \sigma_1 \{L_1(\delta u) + L_{11}(\bar{u}_c + (ap_c \xi + bp_c \xi^2 + \dots) \bar{u}'_c, \delta u)\} \\ & + \xi^2 [\{\bar{\sigma}_c + (ap_c \xi + bp_c \xi^2 + \dots) \bar{\sigma}'_c + \dots\} L_{11}(u_2, \delta u) \\ & + \sigma_1 L_{11}(u_1, \delta u) + \sigma_2 \{L_1(\delta u) + L_{11}(\bar{u}_c \\ & + (ap_c \xi + bp_c \xi^2 + \dots) \bar{u}'_c, \delta u)\} \\ & + \xi^3 [\{\bar{\sigma}_c + (ap_c \xi + bp_c \xi^2 + \dots) \bar{\sigma}'_c + \dots\} L_{11}(u_3, \delta u) \\ & + \sigma_1 L_{11}(u_2, \delta u) + \sigma_2 L_{11}(u_1, \delta u) \\ & + \sigma_3 \{L_1(\delta u) + L_{11}(\bar{u}_c + (ap_c \xi + bp_c \xi^2 + \dots) \bar{u}'_c, \delta u)\} + \dots \\ & = 0 \end{aligned} \quad (B4)$$

任意の仮想変位に対して式(B4)が成り立つためには、 $\xi, \xi^2, \xi^3 \dots$ の各次数の係数がゼロでなければならない。ここで、 $u_1, u_2, u_3 \dots$ が互いに直交関数系であることを考慮しつつ相反定理を適用すると、係数 a, b が比較的簡潔な形で求められる。また、後座屈挙動がたわみの正負方向によらない時、 $a=0$ となる。(B4)式について 3 次の項まで考慮すると、本文中の式(8)を得る。

Hutchinson は、Koiter 理論を多様な構造部材に適用し、弾性座屈強度に対する形状初期不整の影響を明らかにしている。本研究では、トロイダルシエルに関する導出結果を適用

する。Fig.17(a)のトロイダルシエルの上下縁の回転変位に単純支持条件を仮定して、座屈モード w を次式で表す。

$$w = \xi h \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{r_y}\right) \quad (B5)$$

式(B5)を式 (B4)に適用する事により、 b ファクタが次式のように求められる⁸⁾。

$$b = \frac{-8(1-\nu^2)\bar{n}^4}{\lambda_c(\bar{N}_x^0 + \bar{N}_y^0 \bar{n}^2)} \left[\left(\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \bar{\beta}_i \frac{i}{(i^2-4)} + 2 \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \bar{\delta}_i \frac{1}{i} \right) \pi^2/z \right. \\ \left. - 2A \left(\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \bar{\alpha}_i \frac{i}{(i^2-4)} + 2 \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \bar{\gamma}_i \frac{1}{i} \right) \right] \quad (B6)$$

$$\bar{\alpha}_i = (Ai^2 + \frac{1}{2})/Q_i$$

$$\bar{\beta}_i = \left(\frac{\pi^2 i^2}{24z} + \frac{\lambda_c \bar{N}_x^0}{2} - \frac{Az}{\pi^2} \right) / Q_i$$

$$\bar{\gamma}_i = \left[A(i^2 + 4\bar{n}^2) + \frac{i^2}{2} + \frac{2\bar{n}^2 r_y}{r_x} \right] / H_i$$

$$\bar{\delta}_i = \left[\frac{\pi^2(i^2 + 4\bar{n}^2)^2}{24z} + \frac{\lambda_c \bar{N}_x^0 i^2}{2} + 2\lambda_c \bar{N}_y^0 \bar{n}^2 \right. \\ \left. - \frac{z \left(i^2 + 4\bar{n}^2 \frac{r_y}{r_x} \right) A}{\pi^2} \right] / H_i$$

$$i = 1, 3, 5, \dots$$

$$Q_i = i(i^2 - 4) \left(\frac{\pi^4 i^4}{12z} + \lambda_c \bar{N}_x^0 \pi^2 i^2 + z \right) / 4$$

$$H_i = i \left[\frac{\pi^4(i^2 + 4\bar{n}^2)}{12z} + \lambda_c \bar{N}_x^0 \pi^2 i^2 (i^2 + 4\bar{n}^2)^2 \right. \\ \left. + \lambda_c \bar{N}_y^0 4\pi^2 \bar{n}^2 (i^2 + 4\bar{n}^2)^2 + z \left(i^2 + 4\bar{n}^2 \frac{r_y}{r_x} \right)^2 \right]$$

$$\lambda_c \bar{N}_x^0 = \frac{\lambda_c (1 - \nu^2)^{\frac{1}{2}} r_y N_x^0}{\pi E h^2}$$

$$\lambda_c \bar{N}_y^0 = \frac{\lambda_c (1 - \nu^2)^{\frac{1}{2}} r_y N_y^0}{E h^2}$$

$$z = \sqrt{1 - \nu^2} \frac{l^2}{r_y h}$$