トランサム船尾流場の解析法について

— 2次元 Neumann-Kelvin 問題による検討 —

正員 鈴木 勝 雄 *

A method of analyzing flow about transom stern in 2-D Neumann-Kelvin problem

by Katsuo Suzuki, Member

Summary

An analytical method in so-called Neumann-Kelvin problem is proposed to represent 2-D flow about semi-displacement type ship having blunt stern and transom stern. At first, the usual Neumann-Kelvin solution, complex potential, is deduced from Green's integral formula by using the boundary conditions on the linearized free surface and on the exact body surface and is represented by the velocity distribution along the body surface and by wave sources located at the fore and aft cross points. This new representation shows explicitly the non-uniqueness of Neumann-Kelvin solutions. Next, the transom wall is removed and the representation is reduced to the sum of integration along the body surface, the unknown being the velocity differences, and the wave source located at the fore cross point. The resulting boundary integral equation has two unknowns which are determined from planning conditions, Kutta velocity condition and the other wave height condition at the transom point. The numerically obtained solutions show good flows around the body with blunt stern and transom stern. It is reported to be able to assess the Froude number when planing starts by combining wave breaker indices, the values of resistance, lift and trim moment when the rise of center of gravity and the trim are varied and the Froude number when heave and pitch are unstable. It is also shown that a concave camber over the bottom of planing hull makes a profit for attitude and resistance. At last, a possibility is suggested to obtain a good evaluation of resistance for body with transom stern by using high-speed approximation of inverse mirror solution.

1. 序論

最近の高速船の発展や他の目的もあって船尾の切れ上がったいわゆるトランサム船尾形状を採用した船が多く建造されるようになってきている。従って、トランサム船尾まわりの流れの解析の重要性が増してきていると云えよう。現在では CFD の発達によりトランサム船尾まわりの流れを表現することも可能となったという云い方も可能である¹⁾。しかしながら、ポテンシャル理論的に、あるいは造波抵抗理論的に整合の取れた議論というものはあまり見受けられないという良い。CFD によればどんな流場も表現できるとは云いながら、流場の定性的な把握、見通しという面では理論的な解析法に劣るという面も有する。そうした面からも、トランサム船尾まわりの流場のポテンシャル理論的検討を行っておく必要があると考え本論を草した。

トランサム船尾流れを造波抵抗理論的に解析したのは Eseltine

ら²⁾らが最初であると云われており、無限に長い船体の後半部に3次元線形滑走板理論を適用して、トランサム後方に現実に即した波形を得ることに成功している。しかしながら船体の全体にわたってこの理論を適用することは、理論的、数値的に各種の問題があり³⁾、公表されたものとしては Doctors⁴⁾、Wellicome-Jahangeer⁵⁾のものがあるに過ぎない。最も困難な問題は船体の浮上量とトリム角を求めること、云い換えれば浸水面をどのように求めるかということである。

この滑走板理論はいくつかの問題点はあるにしろ、いわば閉じた理論であり、繰り返し法などを用いれば、トランサム船尾を有する船の浮上量、トリム角、浸水面などを決定でき、また、船体前面の圧力の特異性から飛沫抵抗をも推定できる優れた理論であると云える³⁾。しかしながらこの理論は船体の一様流に対する傾きが微小であるという仮定に基づいており、船体前面が垂直に切り立っているような物体については適用し難いという難点を有している。

半滑走、ないし、半排水量型の船は船の前半部は切り立った形状をしており、滑走艇理論の仮定にはなじまない。そうした船は高速であっても姿勢変化は滑走艇などに比べて少なく、浸水面の変化も小であり、船体の扱いはいましろ静止時のそれに固定した状

*防衛大学校

原稿受理 平成 18 年 9 月 27 日

態で扱い、姿勢変化は微小量とする方法が当を得ていると考えられる。

船体を固定して考え、船体前面が切り立っている場合には、浸水面の縁に沿って特異性を考慮する必要があり、その特異性の決定には解の不定性とも関連した問題と、それに関連して飛沫抵抗、更に運動量損失抵抗などの未解決の問題がある³⁾。これらについての議論はCFDの発展とともにいつしか忘れられてしまっているが、CFDの発展と理解を深めるためにも必須であると考えている。

最近では、船の造波抵抗は、いわゆる低速理論といわれる2重模型解を基とし、一部非線形項を考慮した理論により、かなりの程度実際に即した抵抗値を算出できると云われている⁶⁾。理論的に造波抵抗を扱う手法は実質的にはここまでで、あとはCFDが取って変わったと言っても良いだろう。こうした方法がトランサム船尾を有する船の造波に関わる抵抗を算定する上で有効かどうかは興味深い所であるが、十分な検討はされていない。

本論では、以上の事柄を考慮して、半滑走（半排水量）型の船体、即ち、トランサムの船尾を有し船首が切り立っているような船型を対象とすることにする。そのためには、線形滑走板理論は不適であり、船体表面上の条件は静止水面上ではなく船体表面上で厳密に満たす必要がある。線形滑走板理論が薄翼理論に対比されるとするならば、厚翼理論の採用が必要ということになる。解析を容易にするために自由表面条件は線形の条件を用いることにする。いわゆる Neumann-Kelvin 問題⁷⁾の範疇でトランサム船尾を有する船のまわりの流れを解析しようとするものである。この解の低速における極限は2重模型解と一致するから、低速理論の適用性の検討にも資すると考えられる。しかしながら Neumann-Kelvin 問題も線形滑走板理論と同様な難点を有しており、厳密に云えば、正確な数値解は得られていないと云って良い。そこで本論では数値解法の容易な2次元問題に議論を限定しておくこととする。

2. 2次元 Neumann-Kelvin 解の表示と性質

Neumann-Kelvin（以下 N-K）問題とは水上物体まわりの定常波動場を扱うとき、ポテンシャル流れを仮定し、物体表面上の条件としては厳密な（法線方向流速を0とする）ノイマンの条件を用い、自由表面条件としては静止水面上の線形自由表面条件を満たす解を求めるという問題のことを云う⁷⁾。

Fig. 1 Original 2-D Neumann-Kelvin problem

座標系を Fig.1 に示す。物体表面 ($y \leq 0$) を H 、物体後方の水面 ($y = 0$) を各々 F_F, F_A とし、物体表面は物体前後の各々の点、 $P_F(x = \xi_F), P_A(x = \xi_A)$ で交わっているものとする。なお、交点で物体表面は静止水面に直交しているものとする。そうでない場合は N-K 問題として適当ではない⁷⁾。

この点が線形滑走板理論と異なる点であり、排水量型水上物体まわりの流れを表現するのに N-K 問題が適している点である。

一様流速を U とし、座標点を $z = x + iy$ と複素表示しておく。流れ場は以下の複素ポテンシャルにて表現する。

$$\begin{aligned} F(z) &= \Phi(z) + i\Psi(z) \\ &= -Uz + f(z), \\ f(z) &= \phi(z) + i\psi(z) \end{aligned} \quad (1)$$

物体表面条件は以下と書ける。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -U \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad \text{on } H \quad (2)$$

あるいは流れ関数を用いて

$$\Psi = -Uy + \psi(z) = \Psi_H(\text{const}), \quad \text{on } H \quad (3)$$

と書ける。ここに Ψ_H の値は任意であることに注意しておく。

自由表面条件は $y = 0$ で線形化されたものを用いる。

$$\phi_{xx} + \kappa \phi_y = 0, \quad \text{on } F_F, F_A \quad (4)$$

ここで、 κ は波数で以下である。

$$\kappa = g/U^2 \quad (5)$$

式 (4) を x で積分すると以下を得る。

$$\phi_x - \kappa \psi = \begin{cases} -\kappa \Psi_F (= 0), & \text{on } F_F \\ -\kappa \Psi_A (\text{const}), & \text{on } F_A \end{cases} \quad (6)$$

ここで $\Psi_F = 0$ としておく。また Ψ_A は任意な定数である。水面の波高は以下である。

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \phi_x(x)/(\kappa U) \\ &= \begin{cases} \psi(x)/U, & \text{on } F_F \\ (\psi(x) - \Psi_A)/U, & \text{on } F_A \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Ψ_H, Ψ_A の物理的意味は後述する。

次に次式のグリーンの積分公式により N-K 解を表示し、それを変形することにより解析に便利な表示式を求める。

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{F_F + H + F_A} [\phi_n(\zeta) W_Q(z; \zeta) - \phi(\zeta) W_{Q_n}(z; \zeta)] ds \quad (8)$$

ここで添字 n は法線方向微分を示し、 z は流体中の点、 ζ は境界上の点を示す。また、 $W_Q(z; \zeta)$ 及び後述の $W_{Q_n}(z; \zeta)$ は、各々、吹き出し、渦の特異性を有し、線形自由表面条件 (4) を満たす核関数である。

$$\begin{aligned} W_Q(z; \zeta) &= \log(z - \zeta) + \log(z - \bar{\zeta}) + 2S_\kappa(z - \bar{\zeta}) \\ W_{Q_n}(z; \zeta) &= -i \log(z - \zeta) + i \log(z - \bar{\zeta}) + 2iS_\kappa(z - \bar{\zeta}) \\ S_\kappa(z) &= \lim_{\mu \rightarrow 0+} \int_0^\infty \frac{1}{k - \kappa - i\mu} e^{-ikz} dk \\ &= e^{-i\kappa z} E_1(-i\kappa z) + \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ 2\pi i e^{-i\kappa z}, & x < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

式 (8) を水面条件などを考慮して部分積分すると以下と変形できる⁷⁾。

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_H [\psi(z)W_{Q_s}(z; \zeta) - \phi_s(\zeta)W_R(z; \zeta)]ds - \frac{1}{2\pi} \Psi_A W_Q(z; \xi_A) \quad (10)$$

更に物体内部で正則な複素ポテンシャル

$$f_i(z) = \phi_i(z) + i\psi_i(z) \quad (11)$$

を種々の形に仮定することにより数値計算に便利な種々の表示式を得ることができる⁷⁾。物体内部の自由表面上で、

$$\phi_{ix} - \kappa\psi_i = 0, \quad \text{on } F_I \quad (12)$$

を満たす内部解を仮定すると物体外部の点で以下を得る。

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_H [\psi_i(\zeta)W_{Q_s}(z; \zeta) - \phi_{is}(\zeta)W_R(z; \zeta)]ds \quad (13)$$

この内部解として一様流を考える。

$$f_i(z) = -Uz + \Psi_I \quad (14)$$

式 (12) により Ψ_I の値は以下である必要がある。

$$\Psi_I = -\frac{1}{\kappa}U \quad (15)$$

式 (10) と (13) の差を取り、物体表面上の境界条件 (3) を代入し、部分積分することにより結局以下の表示式を得る。

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_H \frac{\partial \Phi}{\partial s}(\zeta)W_R(z; \zeta)ds - \frac{1}{2\pi}(\Psi_H + \Psi_I)W_Q(z; \xi_F) + \frac{1}{2\pi}(\Psi_H + \Psi_I - \Psi_A)W_Q(z; \xi_A) \quad (16)$$

この表示式は、 Ψ_H, Ψ_A を任意に与えたとき、攪乱複素ポテンシャルは、それらを強さとする前後両端点におかれた波吹き出しと、物体表面上の流速分布を強さとする波渦とで表現できることを示しており、恐らく 2 次元 N-K 解の新しい表示式である。2 次元 N-K 解が、 Ψ_H, Ψ_A という 2 つの任意の値によって規定されることを明示的に示している表示式であり、N-K 解の不定性を示すのに好都合な表示式でもある。

一般に、一様流中に置かれた 2 次元物体まわりの流れは、物体まわりの循環の値だけ不定であり、翼理論では Kutta の条件により、循環の値、及び、揚力の大きさが規定されるのに比し、2 次元水上物体については、N-K 問題では、 Ψ_H, Ψ_A の 2 量が不定ということになる⁷⁾。これらの値と揚力の関係については付録 B に述べることにする。3 次元 N-K 問題については水線に沿った連続的な点上の、いわゆる線積分項の強さが不定ということになる。

表示式 (16) の性質について検討すると、物体前後端 P_F, P_A において波吹き出し W_Q の特異性があることがわかる⁷⁾。この特異性は複素ポテンシャルについては有界連続であるが、流速については対数関数的特異性を有するので Ursell⁸⁾ は *weak singularity* と呼んでいる。以下、N-K 解の性質については付録 A に、各種保存則については付録 B にまとめた。

表示式 (16) の虚部を取り、式 (3) の境界条件を代入し、点 z を物体表面上にとると以下の境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_H \frac{\partial \Phi}{\partial s}(\zeta)\Im\{W_R(z; \zeta)\}ds = & -Uy - \Psi_H \\ & - \frac{1}{2\pi}(\Psi_H + \Psi_I)\Im\{W_Q(z; \xi_F)\} \\ & + \frac{1}{2\pi}(\Psi_H + \Psi_I - \Psi_A)\Im\{W_Q(z; \xi_A)\}, \quad \text{on } H \end{aligned} \quad (17)$$

右辺の Ψ_H, Ψ_A の値を与えるか、2 つの何らかの補助条件を課すことにより物体表面上の流速分布を得ることができる。なお、上式左辺の核関数は対数的特異性を有するので可積分であり、また、物体表面の表裏で連続であるので z を表面上に近づけたとき留数項は生じない。以下の数値計算では物体表面をメッシュに細分し、その上で流速が一定であるとして離散化を行っている。メッシュ上では付録 (A.9) 式のように核関数を解析的に積分した関数を用いている。

数値解の例 (流線と等ポテンシャル線) を Fig.2 に示す。対象物体は半没の楕円柱の後半を取り除いたもの ($d_E/L = 0.2$) である。計算例は $\Psi_H = \Psi_A = 0$ の閉塞条件を満たす解 (付録 B) である。トランサム下端で流線が急激にまき上がっており、トランサム部の流れとして適当でない。

Fig. 2 Original Neumann-Kelvin solution under zero-vertical flux condition ($F_n=1.0$)

そこでトランサム端点における条件を考える。端点 E (深さ d_E) では水は切れて直後で大気圧に接するから端点における流速 q_E はベルヌーイの定理、すなわち

$$\frac{1}{2}U^2 = \frac{1}{2}q_E^2 - gd_E$$

より以下でなければならない。

$$q_E/U = \sqrt{1 + 2\kappa d_E} \quad (18)$$

この条件を滑走板理論と同様に Kutta の条件と呼んでおく。N-K 問題においては未知量は 2 つであるのでもう一つの条件を導入しておく必要があり、トランサム端点における波高を与えることとする。すなわち以下の条件である。

$$\kappa\eta(\xi_A) = \phi_x(\xi_A, 0)/U = -\kappa d_E \quad (19)$$

この2条件を N-K 問題における滑走条件と呼んでおこう。滑走条件を満たす N-K 解の数値例を Fig.3 に示す。波形(破線)はトランサム端から出発しているが、流線はトランサムに沿って流れているとは云い難い。

Fig. 3 Original Neumann-Kelvin solution under planing conditions ($Fn=1.0$)

3. トランサム船尾を表現する Neumann-Kelvin 解

3.1 解法

前章で見たように従来の N-K 解ではトランサム船尾の流れを十分表現できない。そこで Fig.1 のトランサム $\overline{P_A E}$ の部分を物体内部に限りなく移動し、ついに物体表面 $\overline{P_F E}$ に一致させた。このときの物体表面 $\overline{P_F E}$ を H_0 、その裏側を H_i と称することにする (Fig.4)。この流れモデルを滑走 N-K 解と称することにする。N-K 解の表示 (16) 式は以下と退化する

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{H_0} \Delta \frac{\partial \Phi}{\partial s}(\zeta) W_I(z; \zeta) ds - \frac{1}{2\pi} \Psi_A W_Q(z; \xi_F) \quad (20)$$

ここで

$$\Delta \frac{\partial \Phi}{\partial s}(\zeta) = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \Big|_{H_0} + \frac{\partial \Phi}{\partial s} \Big|_{H_i} \quad (21)$$

を表すものとする。境界積分方程式 (17) は以下となる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{H_0} \Delta \frac{\partial \Phi}{\partial s}(\zeta) \Im \{W_I(z; \zeta)\} ds = -Uy - \Psi_H - \frac{1}{2\pi} \Psi_A \Im \{W_Q(z; \xi_F)\} \quad (22)$$

式 (20) の表示式は線形滑走板理論の表示式³⁾と形式的に一致し、滑走板理論が薄翼理論と類似しているのに比し、厚翼理論と類似していると見ることができる。この場合の保存則を付録 C に示した。

境界積分方程式 (22) は通常の N-K 解と同様 2つの未知量 Ψ_H, Ψ_A を含むので補助条件が必要であり前章と同様に滑走条件 (18,19) 式を採用するものとする。数値計算例を Fig.5 に示す。物体表面の裏面 H_i より上方の流れを無視すればトランサム部の流れは滑らかに満足すべき結果が得られている。

各フルード数について解いた結果の Ψ_H, Ψ_A の値を Fig.6 に示す。フルード数 0.5 以下で値が振動している。これは H_i 上方

の流れについて P_E 点における波高が 0 となるフルード数が存在し、滑走条件 (19) を満たすことができないためである。これ以上の高速域においてはこのことは発生しない。従って滑走 N-K 解はフルード数 0.5 以上でのみ意味を有する。なお図中には逆鏡像解による値を破線にて示した。

Fig. 4 Planing model for Neumann-Kelvin problem

Fig. 5 Planing Neumann-Kelvin solution ($Fn=1.0$)

3.2 滑走状態の判定

トランサム船尾を有する高速艇はあるフルード数に達すると滑走をはじめる。滑走の定義についてはいろいろな提案が行われている¹⁰⁾。本論では物体前面は切り立っており、圧力変化によるトリムや浮上量は基本的には考慮していない。従って前述のように半滑走、あるいは半排水量型といった表現が適切であろう。いずれにしろ、本論ではトランサム直後で水が切れ上がっており、トランサム底部に剥離領域や、波崩れによる後流の押し寄せが無い状態を滑走と称することにする。滑走 N-K モデルでは剥離は出現しないので後流の波崩れに着目する。碎波指標についてはいろいろあるが、2次元線形造波問題においては水面に相当する流線(波高の近似として高度の精度を有する)が閉じているかどうかを目安とすることが可能である¹¹⁾。

Fig.7 にフルード数 0.715 の場合の解を示す。トランサム端部より発する流線が後流の波頂付近でカスプ状となっている。前述の碎波指標によればこのフルード数以下では波崩れが発生するということになる。2次元滑走平板を用いた実験¹²⁾の目視観測によると、トリムを固定(8°, 14°)した場合の滑走開始フルード数は約 0.8 (航走時の浸水長ベースでは約 0.7)、上下動も自由とし

Fig. 6 Values of Ψ_H, Ψ_A vs. Froude number for planing Neumann-Kelvin solution

Fig. 7 Planing Neumann-Kelvin solution at low Froude number limit without wave breaking ($Fn=0.715$)

た場合には 0.6 (0.9) であった。形状の違い等を考慮すれば良い対応を示している。

3.3 姿勢変化による抵抗の変化

抵抗をどう算定するかについては Ψ_H の値の解釈により議論のわかれる所であるが^{3, 9)}、ここでは圧力抵抗値をもって抵抗値とする。トランサム部は抵抗に寄与しないので、圧力としては静水圧を含むものとする。また抗力、揚力、トリムモーメントは排水量と船長で無次元化している。

Fig.8 にフルード数を横軸に前述の半楕円柱に関する圧力抵抗 (実線) を示してある。この圧力抵抗の値は計算精度を考慮して (C.4) 式による計算値である。図中には半楕円柱を物体長の $\pm 2\%$ 沈下させた状態の抵抗値 (破線: 沈下、一点鎖線: 浮上) を示す。各抵抗値は低フルード数で静水圧のみによる抵抗値に漸近している。当然のことであるが、沈下 (破線) させると抵抗は増大する。

次に半楕円柱に物体長の $\pm 2\%$ だけトリム (船首上げを正) させたときの圧力抵抗値を Fig.9 に示す。船首を下げると大巾に抵抗が減少する (一点鎖線)。

3.4 揚力、トリムモーメントと姿勢安定性

沈下量を変化させたときの揚力を Fig.10 に示す。フルード数 1.25 以下では沈下させる (破線) と揚力は増加するので安定であるが、それより高速では逆の現象が生じ、上下揺れに関して不安

Fig. 8 Pressure resistance vs. Froude number for a semi-elliptic cylinder with sinkage ($0, \pm 2\% L_{pp}$)

Fig. 9 Pressure resistance vs. Froude number for a semi-elliptic cylinder with trim ($0, \pm 2\% L_{pp}$)

定であることが推測できる。これは線形理論的には物体形状に依らない性質である¹³⁾。トリム固定の滑走平板の実験¹²⁾によるとフルード数 1.2 (航走時浸水長ベースでは 1.3) 以上で上下揺れのポーポイジングが発生することが観察され、良い対応を示している。姿勢不安定の判定には種々の解析法が開発されているが、こうした静的判定法が簡便で且つ有効であることが知られている¹⁴⁾。

トリム (船首上げを正) を変化させたときのトリムモーメント (船首上げを正) を Fig.11 に示す。フルード数約 0.7 以上でトリムを大きくすると船首上げのトリムモーメントが増大し、縦揺れに関して不安定である。姿勢自由の滑走平板による実験¹²⁾によれば航走時の浸水長ベースのフルード数 1.5 以上でポーポイジングが発生するが、それ以下の速度でも外乱を与えると滑走と同時に弱いポーポイジングが発生するということに対応していると考えられる。

3.5 船底にキャンバーを付した場合

船底を下に凹の形にキャンバーを施すと圧力中心が前方に移動することにより、トリムが押さえられ、結果として抵抗を減ずる

Fig. 10 Lift vs. Froude number for a semi-elliptic cylinder with sinkage (0, $\pm 2\%L_{pp}$)

Fig. 11 Trim moment vs. Froude number for a semi-elliptic cylinder with trim (0, $\pm 2\%L_{pp}$)

ことは良く知られている。キャムバーの効果を調べるため、物体長の $\pm 2\%$ のキャムバーを付した半楕円柱について計算を行った (Fig.12,13)。正のキャムバーを付すと Fig.14 の破線に示すように揚力は大きく増大するので浮上量が増し、結果として抵抗を減じるし (Fig.8)、トリムモーメントは Fig.15 の破線に見るように減少するのでトリムが小となって抵抗を減ずる (Fig.9) ことになる。

4. 高速近似

序論で述べたようにいわゆる低速造波理論による造波抵抗の算定値は実験値と良く対応している。同様なことがトランサム船尾を有する物体に適用できるかどうかを2重模型解 (鏡像解) を基として線形自由表面条件の下に検討してみたが、結果はかんばしいものではなかった。トランサムを有する滑走状態は前章で見たように高速域でのみ発生し、滑走条件を満たす N-K 解についても高速域で成立する。そこでフルード数無限大のときの解である逆鏡像解を基に簡単な計算を試みた。

Fig.16 に逆鏡像解を示す。式 (22) の解である物体表面上の流速の差は高フルード数域の滑走 N-K 解のそれと良く一致していることを得ており、滑走 N-K 解は問題なく、逆鏡像解に収束す

Fig. 12 Planing solution for a semi-elliptic cylinder with camber $2\%L_{pp}$

Fig. 13 Planing solution for a semi-elliptic cylinder with camber $-2\%L_{pp}$

Fig. 14 Lift vs. Froude number for a semi-elliptic cylinder with camber (0, $\pm 2\%L_{pp}$)

ることを確かめることができた。そこで物体表面上の流速は逆鏡像の解を用い、 Ψ_H, Ψ_A の値は滑走 N-K 解の値 (Fig.6) を用いて、造波抵抗値 (物体表面上部の流れを含む) と圧力抵抗値を比較したものを Fig.17 に示した。実線は滑走 N-K モデルによる圧力抵抗値で黒丸は逆鏡像を用いた近似値である。高速域ではかなりの精度で良い対応を示していると云えよう。

Fig. 15 Trim moment vs Froude number for a semi-elliptic cylinder with camber ($0, \pm 2\% L_{pp}$)

Fig. 16 Inverse mirror solution

5. 結論と謝辞

トランサム船尾を有する物体まわりの自由表面流れに関して 2 次元 Neumann-Kelvin 問題において検討を行った結果、以下の結論を得た。

1. 滑走 Neumann-Kelvin 解はトランサム船尾まわりの滑走状態を良く表現している。
2. 滑走 Neumann-Kelvin 解による滑走状態となるフルード数の判定、姿勢変化による、揚力、トリムモーメントの変化より推測される姿勢不安定となるフルード数の判定が可能であり、実験とも良く対応している。

Fig. 17 Comparison of wave resistance and pressure resistance between Neumann-Kelvin solution and high speed approximation

3. 船底にキャムバーを付した場合の有利さを示すことができた。
4. トランサム船尾を有する物体の抵抗推定に関して、逆鏡像解を用いた高速近似の可能性を示した。

数値計算は本科学士 石谷和也、八木佑己両君の卒業研究として行われ、原稿作成については本谷由紀子女士の手をわずらわせた。記して謝意を表したい。

参考文献

- 1) Proc. CFD Workshop, Tokyo (2005)
- 2) R. T. Van Eseltine, H. J. Haussling : Flow about transom sterns, 3rd Int. Conf. Numerical Ship Hydrodynamics, pp. 121-131 (1981)
- 3) 鈴木勝雄 : 高速艇の流体力学 (その 2), 高速艇と性能シンポジウム, 日本造船学会, pp. 37-73 (1989)
- 4) L. J. Doctors : Representation of three-dimensional planing surfaces by finite elements, 1st ICNSH, pp. 517-537 (1975)
- 5) J. F. Wellicome, J. M. Jahangeer : The prediction of pressure loads on planing hull in calm water, TRINA, vol. 121, pp. 53-70 (1978)
- 6) 馬場栄一 : 低速造波理論の応用, 船型設計のための抵抗・推進理論シンポジウム, 日本造船学会, pp. 57-70 (1979)
- 7) 鈴木勝雄 : 二次元 Neumann-Kelvin 問題に関する考察とその応用について, 博士論文 (1985)
- 8) F. Ursell, Mathematical notes on the two-dimensional Kelvin-Neumann problem of ship hydrodynamics, 13th ONR Symp, pp. 245-255 (1980)
- 9) M. Bessho : Dreams towards the coming new century in the research on the seakeeping performance of ships and the ocean engineering, 4th Osaka Colloquium on Seakeeping Performance of Ships, pp.504-516 (2000)

- 10) 小松正彦, 山口真裕: 高速艇の推進性能, 高速艇と性能シンポジウム, 造船学会, pp. 75-118 (1989)
- 11) 鈴木勝雄: 線形砕波モデルと一応用, 第3回推進性能シンポジウム, 日本造船学会, pp. 32-61 (1989)
- 12) 鈴木勝雄, 大迫義谷: 2次元滑走板の姿勢変化について (その2: 実験との比較), 防大理工報 24-4, pp. 349-362 (1986)
- 13) 同上 (その1: 理論の展開), 防大理工報 24-3, 1986, pp. 257-274 (1986)
- 14) 別所正利, 鈴木勝雄: 2次元動揺滑走板の安定性について, 防大理工報 25-1, pp. 25-43 (1987)

A. Neumann-Klewin 解の性質

物体前後端で流れ関数の値は連続であるので水面 ($y = 0$) における撓乱流れ関数の値 ψ は

$$\psi(\xi_{F,A} - i0) = \Psi_H + U y(=0) = \Psi_H \quad (\text{A.1})$$

と物体表面上の流れ関数の値 Ψ_H と一致する。この関係を用いると物体前端 P_F における水面上の x 方向流速は本文の式 (6) より

$$\phi_x(\xi_F) = \kappa \Psi_H \quad (\text{A.2})$$

となる。点 P_F の水面直下における物体表面上の x 方向流速の値は、物体表面が $y = 0$ 面と直行しているという仮定から式 (2) より

$$\phi_x(\xi_F - i0) = U \quad (\text{A.3})$$

となって一般に式 (A.2) と一致しない。式 (16) より

$$\Psi_H = -\Psi_I = U/\kappa \quad (\text{A.4})$$

の場合のみ点 P_F の weak singularity は無くなり x 方向流速も連続となる。点 P_F における波高は式 (7) より以下となる。

$$\eta(\xi_F) = \Psi_H/U \quad (\text{A.5})$$

物体後端 P_A についても事情は同じで水面上及び水面直下の x 方向流速は各々式 (16) と式 (2) より

$$\phi_x(\xi_A) = \kappa(\Psi_H - \Psi_A) \quad (\text{A.6})$$

$$\phi_x(\xi_A - i0) = U \quad (\text{A.7})$$

となり式 (A.4) の条件と $\Psi_A = 0$ のときのみ両端点の特異性は消滅する。このときの解を正則解と名付けた⁷⁾。またその点の波高は式 (7) より以下となる。

$$\eta(\xi_A) = (\Psi_H - \Psi_A)/U \quad (\text{A.8})$$

物体両端点では物理的には定留点と考えられるのに比し、式 (21,23) では波高が任意に与えられることになり多少奇異な感じがあるが、線形自由表面条件を採用したことにより止むを得ないことであり、逆に、物理的条件を種々に与えることができると解釈した方が有用である。

参考のため式 (16) の核関数をメッシュ上で積分した式を以下に示しておく。

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} W_F(z; \zeta) ds = [W_F^I(z; \zeta)]_{\zeta_1}^{\zeta_2}$$

ここで

$$\zeta_2 - \zeta_1 = e^{i\gamma} ds$$

としておくと

$$\begin{aligned} W_F^I(z; \zeta) = & ie^{-i\gamma}(z - \zeta)\{\log(z - \zeta) - 1\} \\ & - ie^{i\gamma}(z - \bar{\zeta})\{\log(z - \bar{\zeta}) - 1\} \\ & + \frac{2}{\kappa} e^{i\gamma}\{\log(z - \bar{\zeta}) + S_\kappa(z - \bar{\zeta})\} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

B. Neumann-Kelvin 問題における 質量、抗力、揚力に関する保存則

N-K 問題における各種の保存則について調べておく。体積質量の保存則については以下が成り立つべきである。

$$Q_V = - \int_{\Sigma} \Phi_n ds - \int_{F_A} \Phi_n ds - \int_{F_F} \Phi_n ds = 0 \quad (\text{B.1})$$

ところで式に水面条件及び Σ を無限遠方にとったときの漸近値を用いて部分積分などを行えば右辺最初の2項は

$$- \int_{\Sigma+F_A} \Phi_n ds = -\Psi_H \quad (\text{B.2})$$

となり、第3項は以下となる。

$$- \int_{F_F} \Phi_n ds = \Psi_H \quad (\text{B.3})$$

従って確かに

$$Q_V = -\Psi_H + \Psi_H = 0 \quad (\text{B.4})$$

となり (B-1) 式は成立している。物理的解釈を行えば、物体前方の $y = 0$ 面からは Ψ_H なる体積質量が単位時間に流出し、後方の $y = 0$ 面及び検査面から同量の質量が流入していることになる。 Q_A 点を波高0となる点に取れば

$$- \int_{\Sigma} \Phi_n ds = -\Psi_A \quad (\text{B.5})$$

となるのでその時は検査面から Ψ_A だけ流入し F_A 面から $\Psi_H - \Psi_A$ だけ流出していることになる。 $\Psi_H = \Psi_A = 0$ となる解を閉塞条件を満たす解と名付けた⁷⁾。

次に物体に働く抗力に関連する x 方向の運動量の保存則 (運動量定理) について見てみる。流体中の圧力を以下と書いておく。

$$\begin{aligned} p_T &= p_D + p_S, \\ p_D &= \frac{\rho}{2}(U^2 - \nabla\Phi\nabla\Phi), \\ p_S &= -\rho g y \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

N-K 解における x 方向運動量保存則は以下と書ける。

$$\int_{H+F_F+F_A+\Sigma} (\rho\Phi_x\Phi_n + p_T n_x) ds = 0 \quad (\text{B.7})$$

総圧 p_T のうち p_S は上式に奇与しないから p_T の代わりに p_D としてよい。物体に働く圧力抗力を以下としておく。

$$R_p = \int_H p_D n_x ds \quad (B.8)$$

このとき x 方向運動量保存則は以下となる。

$$R_p = R_{FF} + R_{FA} + R_{\Sigma} \quad (B.9)$$

ここで右辺は以下の式であり、水面条件などを用いて部分積分などを用いて変形する。

$$\begin{aligned} R_{FF} &= -\rho \int_{FF} \Phi_x \Phi_n ds \\ &= -\rho U \Psi_H + \frac{1}{2} \rho \kappa \Psi_H^2 \\ R_{FA} &= -\rho \int_{FA} \Phi_x \Phi_n ds \\ &= \rho U \Psi_H - \frac{1}{2} \rho \kappa (\Psi_H - \Psi_A)^2 - \rho U \psi(Q_A) \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho \kappa (\psi(Q_A) - \Psi_A)^2 \\ R_{\Sigma} &= \rho U \psi(Q_A) - \frac{1}{2} \rho \int_{-\infty}^0 (\phi_x^2 - \phi_y^2) dy \end{aligned} \quad (B.10)$$

なお、最後の式の積分は無限下流の検査面上の積分とする。上式を (B.9) 式に代入すると以下の式を得る。

$$R_p = R_f + \Delta R \quad (B.11)$$

ここで

$$R_f = -\frac{1}{2} \rho \int_{-\infty}^0 (\phi_x^2 - \phi_y^2) dy + \frac{1}{2} \rho g \eta^2(Q_A) \quad (B.12)$$

となり、N-K 解における造波抵抗である。また

$$\begin{aligned} \Delta R &= \frac{1}{2} \rho \kappa \Psi_H^2 - \frac{1}{2} \rho \kappa (\Psi_H - \Psi_A)^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho g [\eta^2(P_F) - \eta^2(P_A)] \end{aligned} \quad (B.13)$$

上式は N-K 問題において無視されている物体前後端における水面の上昇（下降）に伴う静水圧項による補正と考えることもできよう。式 (B.11) は数値計算上も確認している。

N-K 問題において物体に働く抗力として (B.11) 式のどの項をとるべきかは議論の別れる所であり、定説はない。また静止水面からの流体の流入を抗力に換算すべきという説もある⁹⁾。なお、厳密解においては圧力抵抗と造波抵抗は一致する。

最後に y 方向の運動量保存則について述べる。静水圧による静的浮力については除外しておくとして以下で表現できる。

$$\int_{H+FF+FA+\Sigma} (\Phi_n \Phi_y + p_D n_y) ds = 0 \quad (B.14)$$

物体に働く揚力（動的浮力）を以下としておく。

$$L_D = - \int_H p_D n_y ds \quad (B.15)$$

式 (B.14) を変形すると以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} L_D &= \rho U [\phi(P_F) - \phi(P_A)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho \int_{FF+FA} [\phi_x^2 - \phi_y^2] dx + \rho \int_{-\infty}^0 \phi_x \phi_y dy \end{aligned} \quad (B.16)$$

右辺最後の積分は無限下流の検査面上にとっている。この式は半没物体に関する N-K 解による Kutta-Joukowski の定理と云え、右辺第一項は $\rho U \Gamma$ (Γ : 循環量) に相当し、第 2,3 項は水面変位による補正項である。上式の計算を容易にするため以下を導入する。攪乱複素ポテンシャル $f(z)$ を無限下流の自由波成分 $f_f(z)$ と局所波成分の $f_i(z)$ の和で表しておく。

$$\begin{aligned} f(z) &= f_f(z) + f_i(z), \\ f_f(z) &= L U H_{\kappa} e^{-i \kappa z} \end{aligned} \quad (B.17)$$

ここで L は物体の代表長さであり、 H_{κ} は自由波の無次元複素振幅である。このとき式 (B.16) は以下と変形できる。

$$\begin{aligned} L_D &= \rho U [\phi(P_F) - \phi(P_A)] - \frac{1}{4} \rho g L^2 \text{Re} \{ i H_{\kappa}^2 e^{-2i \kappa \xi_A} \} \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho \text{Re} \int_{FF+FA} [(\frac{df}{dz})^2 - (\frac{df_f}{dz})^2] dx \end{aligned} \quad (B.18)$$

この関係式は数値的にも確認されている。

厳密解についての y 方向運動量保存則については以下の関係が成り立つ。

$$L_D = \rho g \int_{FF+FA} \eta dx - \rho U \phi(Q_A) + \rho \int_{-\infty}^{\eta(Q_A)} \phi_x \phi_y dy \quad (B.19)$$

ここで無限下流の流れは (B.17) 式に漸近するだろうから $\phi(x, y) = 0$ となる x の値が存在するとしてよい。下流の検査面をこの位置にとれば上式は以下となる。

$$L_D = -\rho g \int_{FF+FA} \eta dx \quad (B.20)$$

この式は Bessho⁹⁾ により最初に発見され、拡張されたアルキメデスの原理と名付けられた。

N-K 解の揚力の式 (B.16) において波高を非線形項を考慮して

$$\eta^*(x) = \frac{1}{g} [U \phi_x - \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2)] \quad (B.21)$$

と書けば

$$\begin{aligned} L_D &= -\rho g \int_{FF+FA} \eta^* dx - \rho \int_{FF+FA} \phi_y^2 dx \\ &\quad + \rho \int \phi_x \phi_y dy - \rho U \phi(Q_F) \end{aligned} \quad (B.22)$$

となり、後方の検査面を $\phi = 0$ の位置にとれば以下を得る。

$$L_D = -\rho g \int_{FF+FA} \eta^* dx - \rho \int_{FF+FA} \phi_y^2 dx \quad (B.23)$$

第 2 項を除いて形式的に厳密解 (B.20) と一致する。

C. 滑走 Neumann-Kelvin 解における抵抗に関する保存則

Fig.4 において物体表面の表側 H_0 、裏側 H_i における動的圧力を各々 p_{D0}, p_{Di} としておくと、各々について圧力抵抗を定義することができる。

$$R_{p0} = \int_{H_0} p_{D0} n_x ds, \quad R_{pi} = \int_{H_i} p_{Di} n_x ds \quad (C.1)$$

このとき $R_p = R_{p0} + R_{0i}$ としておけば式 (B.11,12,13) は成立する。

領域 v_i について x 方向の運動量保存則を適用すると以下の関係を得る。

$$R_{p_i} = R_{f_i} + \Delta R_i \quad (C.2)$$

ここで

$$\begin{aligned} R_{f_i} &= -\frac{1}{2}\rho \int_{\sigma} (\phi_x^2 - \phi_y^2) dy + \frac{1}{2}\rho g d_E^2 \\ \Delta R_i &= -\frac{1}{2}\rho \kappa (\Psi_H - \Psi_A)^2 \end{aligned} \quad (C.3)$$

次に流体領域から v_i を除いた領域 V について x 方向運動量保存則を適用すると

$$R_{p0} = R_f - R_{f_i} + \frac{1}{2}\rho g \eta^2 (\xi_F) \quad (C.4)$$

ここで R_f は式 (B.12) による造波抵抗である。従って物体前面 H_0 に働く動圧による抵抗 R_{p0} は内部流れを含んだ造波抵抗 R_f からトランサム σ 面を通じて流入して来る内部流れの造波抵抗に相当する R_{f_i} を差し引き、前面における静水圧による補正を行ったものに等しくなる。この式は圧力抵抗の検算に用いることができる。また圧力抵抗の精度が悪い場合には右辺の値で代用できる。