波浪中非定常運動する浮体に作用する非線形波浪流体力

第一報

正員 二瓶泰範* 正員 木下健**
正員 鮑偉光**

Nonlinear Hydrodynamic Forces on an Oscillating Floating Body in Waves

- Report 1 -

by Yasunori Nihei *Member* Takeshi Kinoshita *Member*
Weiguang Bao *Member*

Summary

There exist nonlinear wave loads such as wave drift force, wave drift damping and wave drift added mass, when the floating body is slowly oscillating in waves. In the present study, wave drift added mass acting on an arbitrarily shaped body is evaluated based on the potential theory. A moving coordinate frame following the low frequency motion of the body is adopted to express this interaction model. Two small parameters which express wave slope(ϵ) and the frequency of slow oscillations(σ) are used for the perturbation expansion. The boundary value problem of each order is solved by the hybrid method. The fluid domain is divided into two regions. The potentials are expressed by the eigen function expansion in the outer region while the inner region is solved by the boundary element method (BEM) with the Rankine source as the Green's function. Element functions with higher order are utilized to improve the accuracy. Wave drift added mass is contributed from five components of potentials. The following potentials are solved in this work. First is the wave potential ($O(\epsilon)$). Second is the disturbance potential for slowly oscillation of the body ($O(\sigma)$). The last one is the linear potential referring to the incident wave but affected by disturbance of the body ($O(\epsilon\sigma)$). In the case of the $O(\epsilon\sigma)$ problem, it is important to treat the inhomogeneous free surface boundary condition. In the present paper, the Emmerhoff solution and a new approach about integral over the free surface are expanded for it. The wave drift added mass is calculated. Result is compared with the semi-analytical one. Good agreement is observed.

1. 緒言

海洋資源探査、海底ケーブルの敷設、海底地下資源の掘削等、海洋プラットフォーム利用は多岐に亘っていると言える。このようなプラットフォームは係留索や Dynamic Positioning System によって位置保持される。実海域では不規則波により浮体は長周期動揺を行う。不規則波は無数の正弦波の重ね合わせとして表すことができるので、

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \text{Re}[\zeta_j(\mathbf{x}) e^{i\omega_j t}]$$

のように表すことができる。但し、 ζ は波振幅を、 ζ_j 及び ω_j は各成分波の波振幅、角周波数を、 $\mathbf{x}$ 、 t は位置変数、時間変数を

表す。二次の波 $\zeta^{(2)}$ は角周波数の差の成分と和の成分が考えられる。

$$\zeta^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \text{Re}[\zeta_{ij}^{(2-)}(\mathbf{x}) e^{i(\omega_i - \omega_j)t} + \zeta_{ij}^{(2+)}(\mathbf{x}) e^{i(\omega_i + \omega_j)t}]$$

このように二次の波は異なる角周波数波の干渉効果であり、差の角周波数に対応する流体力が長周期動揺における浮体への強制力として作用する。これを変動波漂流力と呼び、二次の流体力で定量的には小さいが係留浮体の水平面内の運動の固有周期と同調すると大振幅の運動を引き起こす。

長周期運動は係留浮体の支配的運動を引き起こすことから多数の研究が行われてきた。特に強制力である変動波漂流力についての研究実績は多く、その研究開発は 1974 年における Pinkstar¹⁾ による浮体表面積分による計算法の提示が最初であると思われる。その後、時間領域、周波数領域での計算と実験値との比較が NSMB(MARINE) を中心に成されたが、長周期運動の実験値

* 大阪府立大学

** 東京大学生産技術研究所

を十分に説明するには至らなかった。

このように変動波漂流力の研究は強制力項の研究が先行して行われていたと言える。しかし、一次応答と同様に浮体が長周期動揺することにより radiation 流体力が働くと予想される。長周期運動の場合、水平方向運動における造波減衰係数は非常に小さく無視できる。Newman²⁾によるとその大きさの order は長周期運動の角周波数を σ とすると、 $O(\sigma^7)$ と言われる。そのため長周期運動の際の他の減衰力の項は相対的に大きくなるため多くの研究が行われている。例えば粘性起因減衰力の速度に比例する流体力成分を調べた研究が挙げられる。中でも摩擦抵抗成分は箱型大型海洋構造物などの場合、大きな影響を与えることが予想される。また円柱列からなる海洋構造物の粘性影響を Kc 数との関係から調べた研究³⁾もある。粘性起因の減衰力の他に波と長周期運動の相互干渉の結果生じる減衰力の研究が挙げられる。これについては波浪中の長周期運動において減衰力が大幅に増加することが 1979 年 Wichers ら^{4,5)}によって自由減衰実験により静水中と波浪中とを比べることにより最初に発見された。この力は後に波漂流減衰力 (Wave-Drift Damping) と呼ばれるようになり、実験・理論の両面から様々な研究が行われた。

Wichers ら⁶⁾は静水中曳航試験及び波浪中曳航試験により、すなわち、長周期運動の角周波数を 0 と近似的に見なし、準静的方法にて波漂流減衰力の流体力特性を明らかにしようとした。この研究では、波振幅に対し波漂流減衰力が二次の order であることが明らかにされた。また波漂流力は速度零の近傍では速度に比例することも示された。

波漂流減衰力が生じる物理的背景は、波浪中を微速前進すれば入射波に対して出会波周期に差が生じるとともに前進速度と波浪場の干渉が生じ、これにより定常波漂流力にも差が生じるためであると言える。これまでの波漂流減衰力の研究は主に先述のような定常一様流れ場と規則波との相互作用によるものである。しかし、実際には長周期動揺は周期運動であり、加速度をもって運動を行っている。したがって、準定常の取り扱いだけでは不十分であると考えられる。こうした観点から行われた木下・高岩らの実験^{7,8,9)}、谷澤^{10,11)}らの数値計算からも波浪中付加質量増加が場合によっては無視できないことは明らかであった。

Newman¹²⁾は波漂流減衰力の研究においてこれまでの準定常計算法ではなく、波傾斜 ϵ と浮体の長周期角周波数 σ の二つの振動 parameter で potential を展開し、二次波力で浮体の速度に比例する $O(\epsilon^2\sigma)$ の波浪外力を波漂流減衰力とし、準定常法で導いたそれと全く同一の式となることを示した。Yoshida et. al.¹³⁾は Newman によって行われた理論展開を拡張し、波漂流力・波漂流減衰力・波漂流付加質量を統一的に導き出し、各 order の potential の境界値問題を固有関数展開法により解き、着底円柱の波漂流付加質量の計算例を示した。

本研究では Yoshida et. al. と同様の手法で波漂流力・波漂流減衰力・波漂流付加質量を導き出している。波漂流付加質量の計算に際し、浮体と波浪場の potential(以後、波 potential)、浮体と流れ場の干渉 potential(以後、攪乱 potential)、波と浮体運動速度の干渉場の potential(以後、速度効果 potential と呼ぶ)や波と浮体運動加速度の干渉場の potential(以後、加速度効果 potential と呼ぶ)、更には波の二次 order と浮体運動速度の干渉場 potential が必要である。得られた各 order の境界値問題に対して高次要素を用いた境界要素法と固有関数展開法を組み合わせた hybrid 法により解くことが本研究の特徴である。波漂

流付加質量や波漂流減衰力のような高次問題では非斉次の自由表面条件を解かなくてはならない。そのため、水波 Green 関数を用いても自由表面上での積分は必要となる。そこで、Green 関数は最も簡単な Rankine Source を用い、適当な領域より外は固有関数展開法を用いる。これにより高次流体力計算において任意形状の浮体であっても遠方条件を数学的に取り扱うことが可能となる。

本報は波漂流付加質量計算に必要な波 potential、攪乱 potential 及び速度効果 potential について計算を行い、計算の収束性及び準解析解との比較を行っている。尚、波漂流付加質量計算に必要な更なる高次 order 問題の potential 計算については次報に譲る。

2. 定式化

2.1 定義と座標系

本研究の目的は船体の長周期動揺と波との相互干渉による高次流体力を求めることにある。特に波漂流付加質量・波漂流減衰力・波漂流力を potential 理論と摂動法を用いて定式化し、境界値問題を hybrid 法で解く。理論展開に際して以下のことを基礎仮定とする。

- (i) 流体は非粘性・非圧縮性の完全流体であり、またその渦無し流れを仮定する。
- (ii) 流体の密度は一定とする。また流体密度を ρ とする。
- (iii) 浮体は剛体であり、その変形は無視する。
- (iv) 浮体は波浪中 surge 方向に長周期動揺を行う。また入射波による運動はないものとする。
- (v) 水底の起伏はなく、一様である。

Fig. 1に本研究における座標系を示す。

Eigen Function Expansion

Fig. 1 Coordinate Systems

本研究では二つの座標系を用いる。一つは空間固定座標系 $O - XYZ$ 。もう一つは、長周期運動固定座標系 $O - xyz$ であ

る。Fig. 1 に示すように入射波は規則波とし波数を k_0 、振幅 ζ 、入射角を β とする。水深を h 、入射波の角周波数を ω 、重力加速度を g とし分散関係式は以下ようになる。

$$\nu = \omega^2/g = k_0 \tanh k_0 h \quad (1)$$

入射波の potential Φ_I は

$$\Phi_I(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[\phi_I(\mathbf{x}) e^{-iS(t)} \right] \quad (2)$$

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \frac{g\zeta}{i\omega} \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} e^{ik_0(x \cos \beta + y \sin \beta)} \quad (3)$$

ここで、 $S(t)$ は入射波と長周期運動の位相関数を表すもので、浮体の surge 方向の長周期運動変位を $\alpha(t)$ とすれば、以下のように定義される。

$$S(t) = \omega t - k_0 \alpha(t) \cos \beta \quad (4)$$

また、円柱座標系で

$$e^{ik_0(x \cos \beta + y \sin \beta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(k_0 r) (\cos n\beta \cos n\theta + \sin n\beta \sin n\theta) \quad (5)$$

但し、 ϵ_n は以下で定義される。

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= 1 (n=0) \\ &= 2 (n>0) \end{aligned} \quad (6)$$

既に 2.1 の (iv) で述べたように長周期運動を surge 方向だけとしているのは簡化のためであり、波浪中操縦性運動における拘束試験の simulate のために sway や yaw に拡張することは原理的には難しい問題ではない。長周期運動変位は以下のように定義される。

$$\alpha(t) = \text{Re}[\bar{\alpha} e^{-i\sigma t}] \quad (7)$$

ここで、 $\bar{\alpha}$ は長周期運動変位振幅とする。従って、長周期運動速度と、運動加速度は以下のように微分して得られる。

$$\dot{\alpha}(t) = \text{Re}\{\sigma \bar{\alpha} e^{-i\sigma t}\} \quad (8a)$$

$$\ddot{\alpha}(t) = \text{Re}\{-i\sigma^2 \bar{\alpha} e^{-i\sigma t}\} \quad (8b)$$

ここで、後述する hybrid 法のために各領域の説明を行う。流体全域を Ω とし、仮想円筒より内部域を $\tilde{\Omega}$ 、外部域を $\bar{\Omega}$ とし流体領域を分割する。また、仮想円筒は半径 r_0 のところに位置し、その表面を S_R と定義する。これに伴い、自由表面 S_F も水底 S_H も分割され、自由表面内部を $S_{\tilde{F}}$ 及び、外部を $S_{\bar{F}}$ 、水底内部を $S_{\tilde{H}}$ 、外部を $S_{\bar{H}}$ と定義する。

2.2 Potential の摂動展開

Potential の摂動展開は二つの parameter を用いて行う。波浪中を微速非定常運動する浮体に作用する波浪流体力について研究しているため、一つは波傾斜 $\epsilon (= k_0 \zeta)$ 、もう一つは浮体の長周期運動角周波数 σ により摂動展開を行い、以下のようにする。

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &= \text{Re} \left[\sigma \bar{\alpha} \phi_x^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \epsilon \left\{ \Phi^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \sigma \bar{\alpha} (\hat{\Phi}_x^{(1)}(\mathbf{x}, t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma \tilde{\Phi}_x^{(1)}(\mathbf{x}, t) \right) \right\} + \epsilon^2 \left\{ \Phi^{(2)}(\mathbf{x}) + \sigma \bar{\alpha} \Phi_x^{(2)}(\mathbf{x}, t) \right\} \right] \quad (9) \end{aligned}$$

ここで、上付き添え字は ϵ の Order を x は長周期運動の Mode を表している。今、surge 方向の長周期運動のみを考えている。

$\Phi_x^{(0)}$ は平水中を長周期運動する potential でありここでは攪乱 potential と呼ぶこととする。 $\Phi^{(1)}$ は波による potential であり、波 potential と呼ぶ。 $\hat{\Phi}_x^{(1)}$ は波と浮体運動速度との干渉による potential であり、速度影響 potential と呼ぶ。更に高次の order の計算が波漂流付加質量の計算には必要であるが、これについては別報で論じる。

今、周期問題を考えれば各 order の potential は時間項を分離でき、式 (9) について必要な項を整理すれば以下のように展開できる。

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &= \text{Re} \left[\sigma \bar{\alpha} \phi_x^{(0)}(\mathbf{x}) e^{-i\sigma t} + \epsilon \left\{ \phi^{(1)}(\mathbf{x}) e^{-iS(t)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma \bar{\alpha} \left(\hat{\phi}_x^{(1)}(\mathbf{x}) e^{-i(S(t)+\sigma t)} + \tilde{\phi}_x^{(1)}(\mathbf{x}) e^{-i(S(t)-\sigma t)} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma \left(\tilde{\phi}_x^{(1)}(\mathbf{x}) e^{-i(S(t)+\sigma t)} + \hat{\phi}_x^{(1)}(\mathbf{x}) e^{-i(S(t)-\sigma t)} \right) \right) \right\} \\ &\quad \left. + \epsilon^2 \left\{ \phi^{(2)}(\mathbf{x}) + \sigma \bar{\alpha} \phi_x^{(2)}(\mathbf{x}) e^{-i\sigma t} \right\} \right] \quad (10) \end{aligned}$$

2.3 境界条件

自由表面条件は運動学的条件と力学的条件とを組み合わせることにより $z = \zeta(x, t)$ 上で以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} - 2\dot{\alpha}(t) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} - \ddot{\alpha}(t) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2\nabla \Phi \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ - 2\dot{\alpha}(t) \nabla \Phi \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla (\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi) = 0 \Big|_{z=\zeta(x,t)} \end{aligned} \quad (11)$$

これを $z = 0$ で Taylor 展開し、摂動展開した potential を代入し各 order でまとめると以下のように自由表面における境界条件が導出できる。

(i) 波 potential ($O(\epsilon)$)

$$-\nu \phi^{(1)} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

(ii) 攪乱 potential ($O(\sigma)$)

$$\frac{\partial \phi_x^{(0)}}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

(iii) 速度効果 potential ($O(\epsilon\sigma)$)

$$\begin{aligned} -\nu \hat{\phi}_x^{(1)} + \frac{\partial \hat{\phi}_x^{(1)}}{\partial z} &= -2 \left(k_0 \cos \beta + i \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi^{(1)} \\ &\quad + 2i \nabla \phi_x^{(0)} \cdot \nabla \phi^{(1)} - i \phi^{(1)} \frac{\partial^2 \phi_x^{(0)}}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (14)$$

次に、水底条件は不貫通条件である。

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial z} = 0 \Big|_{S_H} \quad (15)$$

よって各 order の水底条件は全て不貫通条件を満たす。

最後に物体表面条件について、今、入射波による運動に関しては固定している。よって以下のようになる。

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial n} = \dot{\alpha}(t) n_x \quad (16)$$

よって各 order の物体表面条件は

(i) 波 potential ($O(\epsilon)$)

$$\left. \frac{\partial(\phi^{(1)} + \phi_I)}{\partial n} \right|_{S_B} = 0 \quad (17)$$

(ii) 攪乱 potential ($O(\sigma)$)

$$\left. \frac{\partial \phi_x^{(0)}}{\partial n} \right|_{S_B} = n_x \quad (18)$$

(iii) 速度効果 potential ($O(\epsilon\sigma)$)

$$\left. \frac{\partial \hat{\phi}_x^{(1)}}{\partial n} \right|_{S_B} = 0 \quad (19)$$

となる。

2.4 流体力

流体力は Bernoulli の定理より得られる圧力を物体表面上で積分することにより得られる。更に流体力は potential と同様、以下のように摂動展開を行う。今、 x 方向に作用する流体力を $F_x(\mathbf{x}, t)$ とすると、

$$\begin{aligned} F_x(\mathbf{x}, t) = & \text{Re} \left[\sigma \bar{\alpha} F_x^{(0)}(\mathbf{x}) e^{-i\sigma t} + \epsilon \left\{ F_x^{(1)}(\mathbf{x}) e^{-iS(t)} \right. \right. \\ & + \sigma \bar{\alpha} (\hat{F}_x^{(1)}(\mathbf{x}) e^{-i(S(t)+\sigma t)} + \hat{F}_x^{(1)}(\mathbf{x}) e^{-i(S(t)-\sigma t)}) \\ & \left. \left. + \sigma (\hat{F}_x^{(1)}(\mathbf{x}) e^{-i(S(t)+\sigma t)} + \hat{F}_x^{(1)}(\mathbf{x}) e^{-i(S(t)-\sigma t)}) \right\} \right. \\ & \left. + \epsilon^2 \left\{ F_x^{(2)}(\mathbf{x}) + \sigma \bar{\alpha} F_x^{(2)}(\mathbf{x}) e^{-i\sigma t} \right\} \right] \quad (20) \end{aligned}$$

(20) 式において、 $F_x^{(0)}(\mathbf{x})$ は平水中を微速非定常運動する際に浮体に作用する流体力に相当し、速度に比例する項と、加速度に比例する項に分けることができる。速度に比例する項は造波減衰力に相当し、加速度に比例する項は付加質量に相当する。次に、 $F_x^{(2)}(\mathbf{x})$ は波浪中を微速非定常運動する際に作用する流体力に相当する。 $F_x^{(2)}(\mathbf{x})$ も速度、加速度に比例する項に分けることにより波漂流減衰力、波漂流付加質量を定義することが出来る。すなわち、

$$F_x^{(2)} = -(-i\sigma A_x^{(2)} + B_x^{(2)}) \quad (21)$$

において $B_x^{(2)}$ が波漂流減衰力であり、 $A_x^{(2)}$ が波漂流付加質量である。

長周期固定座標系において Bernoulli の定理より圧力 p は

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, t) = & -\rho \left[\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \dot{\alpha} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \nabla \Phi(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \Phi(\mathbf{x}, t) + gz \right] \quad (22) \end{aligned}$$

となる。平均浸水物体表面 S_B 及び、瞬間的浸水物体表面 $\tilde{S}_B$ 上で圧力を積分して流体力が求まる。ただし、瞬間的浸水表面は $z=0$ まわりで圧力を Taylor 展開し、また自由表面と舷側とが直行していると仮定すれば微小面積 ds は

$$ds = dldz \quad (23)$$

と近似でき、(22) 式を使って以下ようになる。

$$\begin{aligned} F_x(\mathbf{x}, t) = & -\rho \int_{S_B} \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \dot{\alpha}(t) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \nabla \Phi(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \Phi(\mathbf{x}, t) + gz \right) n_x ds \\ & + \frac{\rho}{2g} \int_{C_B} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - 2\dot{\alpha}(t) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right. \\ & \left. + \nabla \Phi(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \Phi(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t \partial z} \right) n_x dl \quad (24) \end{aligned}$$

ここで C_B は静水中浮体の水線とする。

(24) 式に (9) 式を代入し、各 order に分けることにより、波漂流減衰力 $B_x^{(2)}$ 及び、波漂流付加質量 $A_x^{(2)}$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{B_x^{(2)}}{\rho \zeta^2 \omega a} = & \text{Re} \left[\int_{S_B} \left\{ -\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x} + \nabla \phi^{(0)} \cdot \nabla \phi^{(2)} + \frac{1}{2\nu} \nabla \hat{\phi}_x^{(1)} \cdot \nabla \phi^{(1)*} \right\} n_x ds \right. \\ & \left. - \frac{1}{2\nu} \int_{C_B} \left(\nu \hat{\phi}_x^{(1)} - i \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} - \kappa \phi^{(1)} + i \nabla \phi_x^{(0)} \cdot \nabla \phi^{(1)} \right) \phi^{(1)*} n_x dl \right] \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{A_x^{(2)}}{\rho \zeta^2 a} = & \text{Im} \left[\int_{S_B} \left\{ i\nu \phi_x^{(2)} - \frac{1}{2\nu} \nabla \tilde{\phi}_x^{(1)} \cdot \nabla \phi^{(1)*} \right\} n_x ds \right. \\ & + \frac{1}{2} \int_{C_B} \left\{ (\hat{\phi}_x^{(1)} + \tilde{\phi}_x^{(1)}) \phi^{(1)*} + i\nu \phi_x^{(0)} \phi^{(1)} \phi^{(1)*} \right. \\ & \left. \left. - \frac{i}{2\nu} \phi_x^{(0)} \nabla \phi^{(1)} \cdot \nabla \phi^{(1)*} \right\} n_x dl \right] \quad (26) \end{aligned}$$

3. Hybrid 法

3.1 仮想円筒での境界条件

本研究では境界要素法と固有関数展開法を用いた Hybrid 法を境界値問題の解法として使用する。Fig. 1 に示すように原点より半径 $r = r_0$ に仮想円筒を設ける。今、仮想円筒内部の potential を φ 、外部の potential を ϕ と記述する。

全ての order の potential φ 、 ϕ が仮想円筒上で以下の境界条件を満たす。

$$\varphi = \phi \Big|_{r=r_0} \quad (27a)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{r=r_0} \quad (27b)$$

3.2 外部領域 — 固有関数展開法 —

仮想円筒より外部域 $\tilde{\Omega}$ において、potential は固有関数展開される。 $O(\epsilon)$ の波 potential は以下のように固有関数展開できる。

$$\phi^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn}(r) Z_m(z) (A_{mn}^{(1)} \cos n\theta + B_{mn}^{(1)} \sin n\theta) \quad (28)$$

ここで $A_{mn}^{(1)}$ 及び $B_{mn}^{(1)}$ は式 (27) に示される内部解との接合によって与えられる未知数である。また $R_{mn}(r)$ 及び、 $Z_m(z)$ は固有関数であり以下で定義される。

$$R_{mn}(r) = \begin{cases} \frac{H_n(k_0 r)}{H_n(k_0 r_0)} & m = 0 \\ \frac{K_n(k_m r)}{K_n(k_m r_0)} & m > 0 \end{cases} \quad (29a)$$

$$Z_m(z) = \begin{cases} \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} & m = 0 \\ \frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} & m > 0 \end{cases} \quad (29b)$$

ここで、 H_n は n 次の第一種 Hankel 関数、 K_n は n 次の第二種変形 Bessel 関数である。 k_m は自由表面と水底の条件より得られ、以下の関係を満たす。

$$\nu = \frac{\omega^2}{g} = -k_m \tan k_m h \quad (30)$$

次に $O(\sigma)$ の撓乱 potential は以下のように展開される。

$$\phi_x^{(0)} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{R}_{ln}(r) \bar{Z}_l(z) (A_{ln}^{(0)} \cos n\theta + B_{ln}^{(0)} \sin n\theta) \quad (31)$$

$A_{mn}^{(0)}$ 及び $B_{mn}^{(0)}$ は内部解との接合によって与えられる未知数である。また $\bar{R}_{ln}(r)$ 及び、 $\bar{Z}_l(z)$ は固有関数であり以下で定義される。

$$\bar{R}_{ln}(r) = \begin{cases} \frac{r_0^n}{r^n} & m = 0 \\ \frac{K_n(\lambda_l r)}{K_n(\lambda_l r_0)} & m > 0 \end{cases} \quad (32a)$$

$$\bar{Z}_l(z) = \cos \lambda_l(z+h) \quad (32b)$$

分散関係と同様に λ_l は自由表面と水底の関係から求められる。すなわち、 λ_l は以下で求められる。

$$\lambda_l = \frac{l\pi}{h} \quad (33)$$

また $O(\epsilon\sigma)$ の速度効果 potential は浮体運動速度に比例するもので準定常で計算された potential の計算とほぼ同様の形をしている。この potential は一般解と特解によって与えられる。松井等¹⁴⁾、Emmerhoff et. al.¹⁵⁾、Bao et. al.¹⁶⁾、Malenica et. al.¹⁷⁾、Nihei et. al.¹⁸⁾ の文献を参照されたい。

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_x^{(1)} = & -2\left(i\frac{\partial}{\partial x} + k_0 \cos \beta\right) \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \nu} \\ & + \int_{S_F} G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \hat{f}^{(1)S}(\boldsymbol{\xi}) ds \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn}(r) Z_m(z) (\hat{A}_{mn}^{(1)} \cos n\theta + \hat{B}_{mn}^{(1)} \sin n\theta) \end{aligned} \quad (34)$$

ここで $\hat{A}_{mn}^{(1)}$ 及び $\hat{B}_{mn}^{(1)}$ は内部解との接合によって与えられる未知数である。接合の境界条件は (27) を参照されたい。また $R_{mn}(r)$ 及び、 $Z_m(z)$ は固有関数であり (29) にて定義される

ものと同じである。 $\hat{f}^{(1)S}$ は撓乱 potential の影響を受ける自由表面条件部分であり、以下で表される。

$$\hat{f}^{(1)S} = 2i\nabla \phi_x^{(0)} \cdot \nabla \phi^{(1)} - i\phi^{(1)} \frac{\partial^2 \phi_x^{(0)}}{\partial z^2} \quad (35)$$

式 (34) における $G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$ は水波 Green 関数である。ここで、 $\mathbf{x} = (r, \theta, z)$ が field 点で、 $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \vartheta, \zeta)$ が source 点である。今、Green 関数を以下のように Fourier 級数展開する。

$$G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n G_n(r, z; \xi, \zeta) (\cos n\theta \cos n\vartheta + \sin n\theta \sin n\vartheta) \quad (36)$$

hybrid 法において、field 点と source 点の関係は常に $r < \xi$ なので水波 Green は

$$\begin{aligned} G_n(r, z; \xi, \zeta) = & 2\pi i C_0 J_n(k_0 r) H_n(k_0 \xi) Z_0(k_0 z) Z_0(k_0 \zeta) \\ & + 4 \sum_{m=1}^{\infty} C_m I_n(k_m r) K_n(k_m \xi) Z_m(k_m z) Z_0(k_m \zeta) \end{aligned} \quad (37)$$

で表される¹⁹⁾。 z 方向に関する固有関数は (29) と定義されるものと同じである。係数 C_0 、 C_m は以下で定義される。

$$C_0 = \frac{k_0^2}{h(k_0^2 - \nu^2) + \nu} \quad (38a)$$

$$C_m = \frac{k_m^2}{h(k_m^2 + \nu^2) - \nu} \quad (38b)$$

3.3 内部領域 — 境界要素法 —

Green の公式より仮想円筒内部域 $\hat{\Omega}$ において以下の積分方程式が得られる。

$$C(P)\varphi(P) = \iint_{\partial\hat{\Omega}} \left(\frac{\partial \varphi(Q)}{\partial n} - \varphi(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} \right) ds \quad (39)$$

ここで、 P は field 点を Q は source 点を表す。本来、potential は水平運動方向や order によって異なるので $\varphi_x^{(1)}$ などと記述するが、各 order とも途中までは同様の展開であるので形式上これを省略して記す。また P 点は field 点を、 Q 点は Source 点である。 $G(P, Q)$ は Green 関数であり以下で定義される。

$$G(P, Q) = \frac{1}{r_{PQ}} + \frac{1}{r_{PQ'}} \quad (40)$$

ここで r_{PQ} 及び、 $r_{PQ'}$ は field 点である P 点

$$\mathbf{x}_P = (x_P, y_P, z_P) \quad (41)$$

から source 点である Q 点

$$\mathbf{x}_Q = (x_Q, y_Q, z_Q) \quad (42)$$

もしくは鏡像をはさんだ点 Q' 点

$$\mathbf{x}_{Q'} = (x_{Q'}, y_{Q'}, z_{Q'}) \quad (43)$$

までの距離であり、

$$r_{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2} \quad (44a)$$

$$r_{PQ'} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P + z_Q + 2h)^2} \quad (44b)$$

と表される。 $C(P)$ は P 点における立体角を表し、以下の式で表すことができる。

$$C(P) = - \iint_S \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} ds \quad (45)$$

各 order の potential の境界条件と外部領域の解を (39) に代入すると次のような境界積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & C(P)\varphi(P) \\ & + \iint_{S_{\bar{F}}} \varphi(Q)I(P, Q)ds + \iint_{S_B} \varphi(Q)\frac{\partial G(P, Q)}{\partial n}ds \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \iint_{S_R} \left(\frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} - R'_{mn}G(P, Q) \right) Z_m(z_Q) \\ & \quad \times (A_{mn} \cos n\theta_Q + B_{mn} \sin n\theta_Q)ds = K(P) \quad (46) \end{aligned}$$

ここで R'_{mn} は固有関数の r 方向に関する微分を表し、仮想円筒上での source 点を (r_0, θ_Q, z_Q) とする。境界積分方程式 (46) 左辺における $I(P, Q)$ 及び、既知の右辺は各 order ごとに異なる。攪乱 potential の場合は

$$I(P, Q) = \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} \quad (47a)$$

$$K(P) = \int_{S_B} n_x G(P, Q)ds \quad (47b)$$

波 potential の場合には

$$I(P, Q) = \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} - \nu G(P, Q) \quad (48a)$$

$$K(P) = \int_{S_B} -G(P, Q)\frac{\partial \phi_I}{\partial n}ds \quad (48b)$$

速度効果 potential の場合には

$$I(P, Q) = \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} - \nu G(P, Q) \quad (49a)$$

$$\begin{aligned} K(P) &= \int_{S_{\bar{F}}} \hat{f}^{(1)} G(P, Q)ds \\ &+ \int_{S_R} \left\{ G(P, Q)\frac{\partial \theta}{\partial n} - \theta \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} \right\} ds \quad (49b) \end{aligned}$$

ここで θ は外部領域における解析解の特解であり、式 (34) から一般解を除いたものである。すなわち

$$\theta = -2\left(i\frac{\partial}{\partial x} + k_0 \cos \beta\right)\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \nu} + \int_{S_{\bar{F}}} G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})\hat{f}^{(1)S}(\boldsymbol{\xi})ds \quad (50)$$

で定義される。この θ は攪乱 potential や波 potential の一般解が求解されれば求めることができる。

3.4 離散化

式 (46) を離散化する際に二次 isoparametric 要素を用いて離散化を行う。この際使用する内挿関数 $N_k(\xi_1, \xi_2)$ ($k =$

$1, 2, \dots, n_n$) は四角形要素の場合、8 節点あり、

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (1-\xi_1)(1-\xi_2)(-1-\xi_1-\xi_2) \\ (1+\xi_1)(1-\xi_2)(-1+\xi_1-\xi_2) \\ (1+\xi_1)(1+\xi_2)(-1+\xi_1+\xi_2) \\ (1-\xi_1)(1+\xi_2)(-1-\xi_1+\xi_2) \\ 2(1-\xi_2)(1-\xi_1^2) \\ 2(1+\xi_1)(1-\xi_2^2) \\ 2(1+\xi_2)(1-\xi_1^2) \\ 2(1-\xi_1)(1-\xi_2^2) \end{Bmatrix} \quad (51)$$

となる。また、三角形要素の場合、

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_1(2\xi_1-1) \\ \xi_2(2\xi_2-1) \\ (1-\xi_1-\xi_2)(1-2\xi_1-2\xi_2) \\ 4(1-\xi_1-\xi_2)\xi_2 \\ 4(1-\xi_1-\xi_2)\xi_1 \\ 4\xi_1\xi_2 \end{Bmatrix} \quad (52)$$

で与えられる。仮想円筒上では 9 節点四角形要素を用い、内挿関数は

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \\ N_9 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} \xi_1\xi_2(1-\xi_1)(1-\xi_2) \\ -\xi_1\xi_2(1+\xi_1)(1-\xi_2) \\ \xi_1\xi_2(1+\xi_1)(1+\xi_2) \\ -\xi_1\xi_2(1-\xi_1)(1+\xi_2) \\ -2\xi_2(1-\xi_2)(1-\xi_1^2) \\ 2\xi_1(1+\xi_1)(1-\xi_2^2) \\ 2\xi_2(1+\xi_2)(1-\xi_1^2) \\ -2\xi_1(1-\xi_1)(1-\xi_2^2) \\ 4(1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2) \end{Bmatrix} \quad (53)$$

で与えられる。ここで (ξ_1, ξ_2) は要素内局所座標を表わし、

$$-1 \leq \xi_1 \leq 1 \quad (54a)$$

$$-1 \leq \xi_2 \leq 1 \quad (54b)$$

である。各 node 点における座標値 $\mathbf{x}(k, l)$ 、potential 値 $\varphi(k, l)$ を用いて l 番目要素内の座標値、potential 値を以下のように近似出来る。

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{k=1}^{n_n} N_k(\xi_1, \xi_2)\mathbf{x}(k, l) \quad (55a)$$

$$\varphi(\xi_1, \xi_2) = \sum_{k=1}^{n_n} N_k(\xi_1, \xi_2)\varphi(k, l) \quad (55b)$$

ここで n_n は要素内の node 点数を表す。

境界積分方程式 (46) における境界積分は内挿関数を用いて評価する。いま、 P 点を i 番目の節点に配置し、それを P_i とする。次の l 番目の微小面要素 ΔS_l 内の積分を以下のように定義

する。

$$\iint_{\Delta S_l} \varphi(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} ds = \sum_{k=1}^{n_n} \varphi(k, l) q_i(k, l) \quad (56a)$$

$$\iint_{\Delta S_l} \varphi(Q) G(P, Q) ds = \sum_{k=1}^{n_n} \varphi(k, l) u_i(k, l) \quad (56b)$$

ここで、 $q_i(k, l)$ 及び $u_i(k, l)$ は以下で表される。

$$q_i(k, l) = \iint_{\Delta S_l} N_k(\xi_1, \xi_2) \frac{\partial G(P_i, Q)}{\partial n} ds \quad (57a)$$

$$u_i(k, l) = \iint_{\Delta S_l} N_k(\xi_1, \xi_2) G(P_i, Q) ds \quad (57b)$$

この積分は Gauss 積分によって評価する。

次に仮想円筒上での離散化について考える。仮想円筒は固有関数を用いるが、固有関数はその係数 A_{mn} 、 B_{mn} が未知数である。これらの未知係数は各 order の解にある通り、無限級数だが実際には有限項で打ち切る。以下のように m 、 n に対する打ち切り項数を

$$0 < n < n_{cs} \quad (\cos \text{ 項}) \quad (58a)$$

$$1 < n < n_{cs} + 1 \quad (\sin \text{ 項}) \quad (58b)$$

$$0 < m < n_m \quad (58c)$$

とする。従って、固有関数の未知数 A_{mn} 、 B_{mn} の個数 N は

$$N = (n_m + 1) \times (n_{cs} + 1) \times 2 \quad (59)$$

となるので、これと同じ数だけ P 点を仮想境界上に配置すれば未知数と方程式の数が一致する。実際には、仮想境界の要素を 9 節点四辺形要素として、要素の中心節点 (9 番目の節点) に P 点を配置することにし、仮想境界を、水深方向に $n_m + 1$ 分割、円周方向に $(n_{cs} + 1) \times 2$ 分割する。本研究ではこのような手法を用いているが、他にも最小自乗法等を用いて計算することも可能である。さて、式(46)における左辺第三項、すなわち仮想円筒上の積分は (56) 及び (57) と同様の考えから以下のように離散化できる。

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \iint_{S_R} \left(\frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} - R'_{mn} G(P, Q) \right) Z_m(z_Q) \\ & \quad \times (A_{mn} \cos n\theta_Q + B_{mn} \sin n\theta_Q) ds \\ & = \sum_{m=0}^{n_m} \sum_{n=0}^{n_{cs}} (A_{mn} \alpha_{i, mn} + B_{mn+1} \beta_{i, mn+1}) \end{aligned} \quad (60)$$

ここで、 $\alpha_{i, mn}$ 及び $\beta_{i, mn}$ は

$$\alpha_{i, mn} = \sum_{l \in S_R} \left\{ \sum_{k=1}^{n_n} (q_i(t, l) - u_i(t, l) R'_{mn}) Z_m(z_Q) \cos n\theta_Q \right\} \quad (61a)$$

$$\beta_{i, mn} = \sum_{l \in S_R} \left\{ \sum_{k=1}^{n_n} (q_i(t, l) - u_i(t, l) R'_{mn}) Z_m(z_Q) \sin n\theta_Q \right\} \quad (61b)$$

である。よって境界積分方程式(46)は次のようになる。

$$\begin{aligned} C_i \varphi_i + \sum_{l \in S_{\hat{F}}} \sum_{k=1}^{n_n} \varphi(k, l) (q_i(k, l) - \nu u_i(k, l)) \\ + \sum_{l \in S_B} \sum_{k=1}^{n_n} \varphi(k, l) q_i(k, l) \\ + \sum_{m=0}^{n_m} \sum_{n=0}^{n_{cs}} (A_{mn} \alpha_{i, mn} + B_{mn+1} \beta_{i, mn+1}) = R_i \end{aligned} \quad (62)$$

ここで、 i は節点番号を表し、 $l \in S_{\hat{F}}$ 、 $l \in S_B$ 、 $l \in S_R$ は l 番目の要素がそれぞれ $S_{\hat{F}}$ 、 S_B 、 S_R 上の要素であることを表している。また右辺は式 (47b) (48b) (49b) に示されるように各 order によって異なり、今、速度効果 potential に対する問題 (49b) のみを書き出すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} R_i = \sum_{l \in S_{\hat{F}}} \sum_{k=1}^{n_n} \hat{f}^{(1)}(k, l) u_i(k, l) + \sum_{l \in S_R} \sum_{k=1}^{n_n} u_i(k, l) \frac{\partial \theta(k, l)}{\partial n} \\ - \sum_{l \in S_R} \sum_{k=1}^{n_n} \theta(k, l) q_i(k, l) \end{aligned} \quad (63)$$

ここで留意すべき点は仮想円筒外部領域における自由表面積分項を含んだ θ である。 θ は式 (50) にて定義される。具体的な計算方法は Appendix A を参照されたい。Appendix を見ても分かるように、この解には r に比例する項が生じていることが確認できる。すなわちこれが永年項である。これより高次 order 問題を取り扱う必要がある場合、この解を用いて積分等をする必要がある。そのために高次 order の計算は扱いが非常に難しく、古くから研究の対象とされてた。波漂流付加質量の厳密な計算にはこの問題は避けて通ることができない。更なる高次 order 問題については別報にて報じる予定である。

さて、式 (62) の離散化された境界積分方程式について仮想円筒以外の境界上の節点及び、固有関数展開の未知係数 A_{mn} 、 B_{mn} に $1 \sim N_T$ の通し番号をつけるとする。 φ_i は節点番号 i の potential であり、 $\varphi(k, l)$ は l 番目の要素を構成する k 番目の節点であるが、通し番号で考えれば節点番号 $j = (k, l)$ の potential である。すなわち式 (62) 及び式(63) から連立方程式の形になっているのでこれを解くことが可能となる。

3.5 自由表面遠方における積分の評価

高次流体力を精度良く求め、且つ自由表面や水深方向の分割による解の安定性のためには、式 (50) における無限遠方までの自由表面の積分評価も重要となる。二次の diffraction や radiation 力を求める上で Chau et. al.²¹⁾ は第一種 Hankel 関数や第一種 Bessel 関数の漸近展開を用い、Fresnel 積分によりこのような無限遠方までの積分を評価する手法を用いている。この手法は漸近展開における打ち切り項数が積分の開始点である r_0 、Hankel 関数 H_n や Bessel 関数 J_n の次数 n 、波数 k_0 によって決まる。本研究における hybrid 法では任意形状に拡張することを目的としている為、仮想円筒距離 r_0 は浮体形状によって決められ、Hankel 関数の打ち切り次数は 3.4 に述べる通り、仮想円筒における計算格子数に合わせている。すなわち Chau et. al. が使用した漸近法は打ち切り項数に自由度がなく hybrid 法には適さない。

そこで本研究では被積分関数の性質を明らかにし、収束の遅い項は解析積分を行い、収束の速いものは数値積分する手法を新たに提案し無限遠方積分を評価する。

入射波 potential、波 potential、撓乱 potential、Green 関数に現れる円柱関数の遠方での振舞いは

$$J_n(r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos\left(r - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right) \quad (64a)$$

$$H_n(r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \exp(i(r - (2n+1)\pi/4)) \quad (64b)$$

$$K_n(r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \exp(-r) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n, k)}{(2r)^k} \quad (64c)$$

ここで (n, k) は Gamma 関数 Γ を使って

$$(n, k) = \frac{\Gamma(n+k+1/2)}{n! \Gamma(n-k+1/2)} \quad (65)$$

但し、 $(n, 0) = 1$ である。

ここからも局所的な波や流れの撓乱を表す変形 Bessel 関数は指数関数的に収束することが分かる。一方、収束が遅い被積分関数は式 (31) の右辺第一項の撓乱 potential において $m = 0$ $n = 1$ 、式 (28) の波 potential において $m = 0$ 、式 (37) の水波 Green 関数において $m = 0$ である。波 potential の場合 Forcing term をまとめると、

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_D(r, \theta) = \nabla \phi_x^{(0)} \cdot \nabla \phi^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_0}{2} \frac{r_0}{r^2} \\ \left[\left\{ A_{01}^{(0)} A_{0n+1}'^{(1)} H_{n+2}(k_0 r) - A_{01}^{(0)} A_{0n-1}'^{(1)} H_{n-2}(k_0 r) \right. \right. \\ \left. \left. + B_{01}^{(0)} B_{0n+1}'^{(1)} H_{n+2}(k_0 r) + B_{01}^{(0)} B_{0n-1}'^{(1)} H_{n-2}(k_0 r) \right\} \cos n\theta \right. \\ \left. + \left\{ -B_{01}^{(0)} A_{0n+1}'^{(1)} H_{n+2}(k_0 r) - B_{01}^{(0)} A_{0n-1}'^{(1)} H_{n-2}(k_0 r) \right. \right. \\ \left. \left. + A_{01}^{(0)} B_{0n+1}'^{(1)} H_{n+2}(k_0 r) - A_{01}^{(0)} B_{0n-1}'^{(1)} H_{n-2}(k_0 r) \right\} \sin n\theta \right] \end{aligned} \quad (66)$$

となる。ここで、

$$A_{0n}'^{(1)} = \frac{A_{0n}^{(1)}}{H_n(k_0 r_0)} \quad (67a)$$

$$B_{0n}'^{(1)} = \frac{B_{0n}^{(1)}}{H_n(k_0 r_0)} \quad (67b)$$

である。

同様に入射波 potential の場合の Forcing term は

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_I(r, \theta) = \nabla \phi_x^{(0)} \cdot \nabla \phi_I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_0}{2} \frac{r_0}{r^2} \\ \left[\left\{ A_{01}^{(0)} A_{n+1}^I J_{n+2}(k_0 r) - A_{01}^{(0)} A_{n-1}^I J_{n-2}(k_0 r) \right. \right. \\ \left. \left. + B_{01}^{(0)} B_{n+1}^I J_{n+2}(k_0 r) + B_{01}^{(0)} B_{n-1}^I J_{n-2}(k_0 r) \right\} \cos n\theta \right. \\ \left. + \left\{ -B_{01}^{(0)} A_{n+1}^I J_{n+2}(k_0 r) - B_{01}^{(0)} A_{n-1}^I J_{n-2}(k_0 r) \right. \right. \\ \left. \left. + A_{01}^{(0)} B_{n+1}^I J_{n+2}(k_0 r) - A_{01}^{(0)} B_{n-1}^I J_{n-2}(k_0 r) \right\} \sin n\theta \right] \end{aligned} \quad (68)$$

となる。ここで係数 A_{0n}^I 及び B_{0n}^I は

$$A_n^I = \epsilon_n i^n \cos n\beta \quad (69a)$$

$$B_n^I = \epsilon_n i^n \sin n\beta \quad (69b)$$

によって定義される。

式 (66) 及び式 (68) において Bessel 関数、Hankel 関数の微分に関する漸化式を用いている。最後に Green 関数における固有関数を掛け合わせ、各固有関数について解析積分を行うと波 potential に関する積分結果は以下になる。

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{\infty} H_n(\xi, \vartheta) \mathfrak{S}_D(\xi, \vartheta) \xi d\xi d\vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{k_0}{4} r_0 \\ \times \left\{ A_{01}^{(0)} A_{0n+1}'^{(1)} (H_{n+1} H_{n+1} - H_n H_{n+2}) \right. \\ - A_{01}^{(0)} A_{0n-1}'^{(1)} (H_{n-1} H_{n-1} - H_n H_{n+2}) \\ + B_{01}^{(0)} B_{0n+1}'^{(1)} (H_{n+1} H_{n+1} - H_n H_{n+2}) \\ - B_{01}^{(0)} B_{0n-1}'^{(1)} (H_{n-1} H_{n-1} - H_n H_{n+2}) \\ - B_{01}^{(0)} A_{0n+1}'^{(1)} (H_{n+1} H_{n+1} - H_n H_{n+2}) \\ - B_{01}^{(0)} A_{0n-1}'^{(1)} (H_{n-1} H_{n-1} - H_n H_{n+2}) \\ + A_{01}^{(0)} B_{0n+1}'^{(1)} (H_{n+1} H_{n+1} - H_n H_{n+2}) \\ \left. - A_{01}^{(0)} B_{0n-1}'^{(1)} (H_{n-1} H_{n-1} - H_n H_{n+2}) \right\} \end{aligned} \quad (70)$$

一方、入射波 potential の場合は

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{\infty} H_n(\xi, \vartheta) \mathfrak{S}_I(\xi, \vartheta) \xi d\xi d\vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{k_0}{4} r_0 \\ \times \left\{ A_{01}^{(0)} A_{n+1}^I (H_{n+1} J_{n+1} - H_n J_{n+2}) \right. \\ - A_{01}^{(0)} A_{n-1}^I (H_{n-1} J_{n-1} - H_n J_{n+2}) \\ + B_{01}^{(0)} B_{n+1}^I (H_{n+1} J_{n+1} - H_n J_{n+2}) \\ - B_{01}^{(0)} B_{n-1}^I (H_{n-1} J_{n-1} - H_n J_{n+2}) \\ - B_{01}^{(0)} A_{n+1}^I (H_{n+1} J_{n+1} - H_n J_{n+2}) \\ - B_{01}^{(0)} A_{n-1}^I (H_{n-1} J_{n-1} - H_n J_{n+2}) \\ + A_{01}^{(0)} B_{n+1}^I (H_{n+1} J_{n+1} - H_n J_{n+2}) \\ \left. - A_{01}^{(0)} B_{n-1}^I (H_{n-1} J_{n-1} - H_n J_{n+2}) \right\} \end{aligned} \quad (71)$$

となる。さて、撓乱 potential の n が 2 の場合は、被積分関数の遠方での収束が遅くとも $\sim 1/r^2$ となり比較的収束性が良いと言える。そこで、上記の解析積分に加え、それ以外の積分に関しては準解析的に積分を行う。半径方向は数値積分し、その積分は Green 関数の性質によって分け、それが Hankel 関数の場合は Simpson 則を、変形 Bessel 関数の場合は Laguerre Gauss 数値積分を用いる。尚、Simpson 則に関しては波数と仮想円筒距離に応じて積分範囲を決めることとし、 $r = r_0 + 10 \times 2\pi/k_0$ まで数値積分している。

4. 計算結果

本報では波 potential、撓乱 potential、速度効果 potential を hybrid 法により境界値問題を解き、波漂流付加質量を評価する。計算には着底円柱及び浮遊円柱を使用し、収束性の確認、並

びに準解析解 (Kinoshita et. al.²²⁾) との比較を行う。また、回転楕円体についても収束性の評価を行う。

計算に使用する着底円柱と浮遊円柱はいずれも半径 $a = 1.0$ とする。喫水 d は着底円柱が 2.0 で、浮遊円柱が 1.0 である。また水深 h は 2.0 とする。Fig. 2 に着底円柱の計算格子を示す。喫水方向に 8 分割、円周方向に 40 分割している。Fig. 3 に円柱、自由表面、仮想円筒の計算格子を示す。仮想円筒は $r_0 = 2.0$ に設置し、Fig. 3 の場合、自由表面は 8×40 分割、仮想円筒は水深方向分割を 8 としている。すなわち $n_t = 40$ 、 $m_h = 8$ である。後述するが、 n_t 及び m_h を変化させて収束解が得られているかを検証する。Fig. 3 は計算格子の一例である。次に浮遊円柱について述べる。Fig. 4 に浮遊円柱の計算格子の様子を示す。円周方向は 40 分割、喫水方向は 8 分割としている。また、円柱底は 3×40 分割とする。Fig. 5 に円柱、自由表面、仮想円筒の計算格子を示す。仮想円筒は $r_0 = 3.0$ に設置し、自由表面は 6×40 分割、仮想円筒は水深方向分割を 8 としている。すなわち $n_t = 40$ 、 $m_h = 8$ である。

Fig. 2 Cylinder extended to the sea bottom
(The number of elements: 40 in circumference, 8 in vertical direction)

最初に計算の収束性を検証する。ここでは自由表面の円周方向分割数 n_t 、水深方向分割数 m_h を変化させることにより検証を行う。 n_t は 10、20、30、40 と変化させ、 m_h は 4、6、8 と変化させる。尚、半径方向は波数との関係から分割数を 8 に固定する。収束検証は着底円柱を使用することとした。円周方向の分割数 n_t を変化させた時の波漂流付加質量の計算結果を Fig. 6 に、水深方向の分割数 m_h を変化させた時の結果を Fig. 7 に示す。円周方向に関しては 20 以上にした時点で収束が認められ、準解析解と非常に合うことが確認できる。また、水深方向に関しては 4 以上で十分な収束が得られ、これも準解析解と合うことが認められる。

次に浮遊円柱の場合の hybrid 法による計算結果と準解析解との比較を行う。Fig. 8 において実線は浮遊円柱の場合を示し、三角印は準解析解の結果を示している。また、点線は Fig. 6 や Fig. 7 に示される着底円柱で $n_t = 40$ 、 $m_h = 8$ の場合の結果を示している。着底と浮遊の場合の波漂流付加質量の変化が見てとれる。

最後に回転楕円体を計算例として用い、円周方向分割数、水深

Fig. 3 Free surface and artificial boundary
(The number of elements : 8 in radius direction and 40 in circumference on the free surface, 8 in vertical direction and 40 in circumference on the artificial boundary)

Fig. 4 Truncated Cylinder (The number of elements: 40 in circumference, 8 in vertical direction, 3 in radius direction on the body bottom)

方向分割数を変化させ収束性評価を行う。計算に使用する回転楕円体は Fig. 9 に示される。回転楕円体における長軸の長さ ($2a$) は 2.0、短軸の長さを 1.0 とし喫水は 0.5 である。Fig. 9 に示す回転楕円体は円周方向分割数 $n_t = 40$ のものである。Fig. 10 には回転楕円体・自由表面・仮想円筒の様子を示す。Fig. 10 に示す自由表面の半径方向分割数は 8、水深方向の分割数は $m_h = 8$ である。

Fig. 11 に水深方向を 8 に固定し円周方向の分割数を 20、30、40 と変化させた時の波漂流付加質量の変化の様子を、Fig. 12 に円周方向を 40 に固定し水深方向の分割数を変化させた時の変化の様子を示す。波漂流付加質量の無次元化に際して $\rho \zeta^2 a$ を用いている (但し、 $a = 1$)。Fig. 11 において、円周方向の分割数を変化させても極めて良い収束性を示している (点線・一点鎖線・実線は重なっている)。Fig. 12 においても同様に、水深方向の分割数を変化させても極めて良い収束性を確認できる。

5. 結言

本研究は係留浮体や Dynamic Positioning System によっ

Fig. 5 Free surface and artificial boundary around truncated cylinder (The number of elements : 6 in radius direction and 40 in circumference on the free surface, 8 in vertical direction and 40 in circumference on the artificial boundary)

Fig. 6 Convergence test about n_t

て位置保持された浮体が波浪中をゆっくりと非定常運動する時、波と浮体加速度の相互干渉により生じる波漂流付加質量について論じている。波漂流付加質量の導出に際し、波傾斜を ϵ とする規則波を σ の角周波数で運動する model から波傾斜の自乗に比例し、且つ角加速度の order に比例する $O(\epsilon^2 \sigma^2)$ の長周期変動流体力を波漂流付加質量と定義し各 order の potential 成分により表示した。この式より波漂流付加質量の計算には波 potential、撓乱 potential、速度効果 potential に加え更に高次 order の potential が計算には必要である。

本報ではこれら波 potential、撓乱 potential、速度効果 potential の境界値問題を hybrid 法によって求めた。同手法は仮

Fig. 7 Convergence test about m_h

Fig. 8 Wave drift added mass

想円筒により流体を分割し、外部領域は固有関数展開法表示し、内部領域は高次要素関数を用いた境界要素法により各 order の potential を求めるものである。速度効果 potential は自由表面条件が非斉次であり、その取り扱いに注意を要する。本研究では Emmerhoff によって導かれた微分解、及び自由表面積分を非斉次項に対応する特解として使用した。自由表面積分は解の収束性に着目し収束の遅いものに対し解析積分を、それ以外には準解析積分を行った。

このようにして求められた potential を使用し着底円柱、浮遊円柱の波漂流付加質量を計算し、準解析解との比較計算を行い、解の収束性等を調べた。その結果、本研究において開発した hybrid 法は非常に高い精度であることが分かった。更に、収束性も確認することができた。更に任意形状浮体の例として回転楕円体を計算例として用い、解の収束性を調べた。回転楕円体での

Fig. 9 Ellipsoid model (The number of elements on the body: 320)

Fig. 10 Free surface and artificial boundary around the ellipsoid model
(The number of elements: 8 in radius direction and 40 in circumference on the free surface, 8 in vertical direction and 40 in circumference on the artificial boundary)

Fig. 11 Convergence test about n_t with an ellipsoid model

Fig. 12 Convergence test about m_h with an ellipsoid model

計算においても極めてよい収束性を確認することができた。

波漂流付加質量の厳密な計算には更に高次 order の potential が必要となる。速度効果 potential には永年項が含まれこれを用いて高次 order potential を計算すると解が破綻することが知られている。これについては別報にて報告することとする。

参 考 文 献

- 1) Pinkstar J. A. : Low Frequency Phenomena Associated with Vessels Moored at Sea, Soc. of Petroleum Engineers of AIME, SPE4837, 1974
- 2) J.N.Newman: Marine Hydrodynamics, MIT Press, 1977
- 3) 菊孝志・大塚耕司・池田良穂: 海洋構造物の要素部材に働く長周期粘性流体力, 関西造船協会誌, 1977

- 4) Wichers J. E. W. and Sluijs M. F. : The Influence of Wave on the Low Frequency Hydrodynamics Coefficients of Moored Vessels, Proc. Offshore Technology Conference, 1979
- 5) Wichers J. E. W. : On the Low Frequency Surge Motions of Moored Vessels in High Seas, Proc. Offshore Technology Conference, 1982
- 6) Wichers J. E. W. and Huijsmans : On the Low Frequency Hydrodynamic Damping Forces Acting on Offshore Moored Vessels, Proc. Offshore Technology Conference, 1984
- 7) 木下 健・高岩 千人 : 係留浮体の波浪中長周期強制動揺試験について, 日本造船学会論文集, 昭和 62 年
- 8) 木下 健・高岩 千人 : 係留浮体の波浪中長周期強制動揺試験について (第2報), 日本造船学会論文集, 昭和 63 年
- 9) 高岩 千人 : 波浪中で長周期運動する浮遊式海洋構造物に働く減衰力と付加質量に関する実験的研究, 日本大学大学院理工学研究科海洋建築学専攻博士学位論文, 平成元年
- 10) K. Tanizawa and S. Naito : A study on the wave drift damping by full nonlinear simulation, J. Kansai Soc. N. A. Japan, 1997
- 11) K. Tanizawa : Long Time Fully Nonlinear Simulation of Floating Body Motions with Artificial Damping Zone, Journal of The Society of Naval Architects of Japan, 1996
- 12) J.N. Newman : Wave drift damping of floating bodies, J. Fluid Mechanics, 1993
- 13) M. Yoshida and T. Kinoshita and W. Bao : Nonlinear Hydrodynamic Forces on an accelerated body in waves, Journal of offshore mechanics and arctic engineering, vol. 127, 2005
- 14) 松井徹哉、李相嘩、佐野公俊 : 波と流れの共存場に置かれた鉛直円柱に加わる流体力, 日本造船学会論文集, 平成 3 年
- 15) O.J. Emmerhoff and P.D. Sclavounos : The slow-drift motion of arrays of vertical cylinders, Journal of Fluid Mechanics, 1992
- 16) Bao W. and Kinoshita Takeshi : Hydrodynamic Forces Acting on Multiple Floating Cylinders in both Waves and Slow Current, Proc. of OMAE, 1994
- 17) S. Malenica and P.J. Clark and B. Molin : Wave and current forces on a vertical cylinder free to surge and sway, Applied Ocean Research, 1995
- 18) Yasunori Nihei and Takeshi Kinoshita and Weiguang Bao : Non-linear wave forces acting on a body of arbitrary shape slowly oscillating in waves, 24th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, 2005
- 19) JOHN. VROOMAN. WEHAUSEN. and EDMUND V. LAITONE. : SURFACE WAVES-Handbuch der Physik-, Vol. 9, 1960
- 20) 二瓶泰範 : 微速非定常運動する浮体に働く非線形波浪流体力に関する研究, 東京大学大学院工学系研究科環境海洋工学専攻博士学位論文, 平成 19 年
- 21) F.P. Chau and R. Eatock Taylor : Second-order wave diffraction by a vertical cylinder, Journal of Fluid Mechanics, 1991
- 22) Takeshi Kinoshita and Weiguang Bao and Shunji Sunahara : The hydrodynamic forces acting on a cylinder array oscillating in waves and current, Journal of Marine Science and Technology, Vol. 2 No. 3, 1997

Appendix

A 微分解の解析計算

本研究では微分解を用いる。この微分解は 1992 年の Emmerhoff¹⁵⁾ に登場するのが最初であろう。積分することなく求解しているので計算が非常に簡単であり、永年項の性質もそこで見てとれる。 $\hat{\phi}_j^{(1)U}$ は以下で表すことができる。

$$\hat{\phi}_j^{(1)U} = -2 \left(i \frac{\partial}{\partial x} + k_0 \cos \beta \right) \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \nu} \quad (72)$$

微分演算子 $i \frac{\partial}{\partial x} + k_0 \cos \beta$ は固有関数を変化させず、係数を変化させるものとなる²⁰⁾。従って、先に微分演算子

$$-2 \left(i \frac{\partial}{\partial x} + k_0 \cos \beta \right) \phi^{(1)} \quad (73)$$

を計算して係数をまとめ、次に ν で微分するのが計算としては理解しやすい。

今、 $\left(i \frac{\partial}{\partial x} + k_0 \cos \beta \right) \phi^{(1)}$ を

$$\begin{aligned} & \left(i \frac{\partial}{\partial x} + k_0 \cos \beta \right) \phi^{(1)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn} Z_m (C_{mn} \cos n\theta + D_{mn} \sin n\theta) \end{aligned} \quad (74)$$

のように表すことができるとすると、係数 C_{mn} 及び、 D_{mn} は以下のように定義される。

$$C_{00} = k_0 \cos \beta R_{00} Z_0 A_{00} + \frac{1}{2} k_0 R_{00} Z_0 A_{01} \quad (75a)$$

$$D_{00} = 0 \quad (75b)$$

$$C_{01} = -i k_0 A_{00} + k_0 \cos \beta A_{01} + \frac{i}{2} k_0 A_{02} \quad (76a)$$

$$D_{01} = \frac{i}{2} k_0 + k_0 \cos \beta \quad (76b)$$

$$C_{0n} = \frac{i}{2} k_0 (-A_{0n-1} + 2k_0 \cos \beta A_{0n} + A_{0n+1}) \quad (77a)$$

$$D_{0n} = \frac{i}{2} k_0 (-B_{0n-1} + 2 \cos \beta B_{0n} + B_{0n+1}) \quad (77b)$$

$$C_{m0} = \frac{i}{2} k_m A_{m1} + k_0 \cos \beta A_{m0} \quad (78a)$$

$$D_{m0} = 0 \quad (78b)$$

$$C_{m1} = i k_m A_{m0} + k_0 \cos \beta A_{m1} + \frac{i}{2} k_m A_{m2} \quad (79a)$$

$$D_{m1} = \left(\frac{i}{2} k_m + k_0 \cos \beta \right) B_{m1} \quad (79b)$$

$$C_{mn} = \frac{i}{2} k_m (A_{mn-1} + 2k_0 \cos \beta A_{mn} + A_{mn+1}) \quad (80a)$$

$$D_{mn} = \frac{i}{2} k_m (B_{mn-1} + 2k_0 \cos \beta B_{mn} + B_{mn+1}) \quad (80b)$$

さて、式 (74) を ν で偏微分する。 ν の偏微分は波数 k_0 、 k_m を使って以下の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} &= \frac{\partial}{\partial k_0} \frac{\partial k_0}{\partial \nu} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial k_m} \frac{\partial k_m}{\partial \nu} \\ &= \frac{C_0}{k_0} \frac{\partial}{\partial k_0} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m}{k_m} \frac{\partial}{\partial k_m} \end{aligned} \quad (81)$$

また係数 C_0 及び C_m は以下となる。

$$C_0 = \frac{k_0^2}{h(k_0^2 - \nu^2) + \nu} \quad (82a)$$

$$C_m = \frac{k_m^2}{h(k_m^2 + \nu^2) - \nu} \quad (82b)$$

よって、 ν による微分操作を行えば、(72) は以下に示す特解 $\phi^{(1)U}$ となる。

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_j^{(1)U} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial k_0}{\partial \nu} \left[r R'_{0n}(r) Z_0(z) + (h+z) R_{0n} Z'_0(z) \right] \\ &\quad \left(\hat{A}_{j0n}^{(1)U} \cos n\theta + \hat{B}_{j0n}^{(1)U} \sin n\theta \right) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial k_m}{\partial \nu} \left[r R'_{mn}(r) Z_m(z) - (h+z) R_{mn}(r) Z'_m(z) \right] \\ &\quad \left(\hat{A}_{jmn}^{(1)U} \cos n\theta + \hat{B}_{jmn}^{(1)U} \sin n\theta \right) \end{aligned} \quad (83)$$

上式を見て分かるようにこの解には r に比例する項が生じていることが分かる。すなわちこれが永年項である。