SKIN FRICTION RESISTANCES

AND

LAW OF COMPARISON.

A. SHIGEMITSU, MEMBER.

INTRODUCTORY.

One who takes an interest in what is probably the most important task of the ship designer, viz., that of estimating the correct horse power to proposed ships in the design stage, will be puzzled by the hypothetical nature of our knowledge of the frictional resistance of ships. This appears to be the principal reason of the discrepancies between the results of model experiments and those of the trials of full size ships.

The present method of estimating the frictional resistance of ships is deduced from the results of experiments made by W. Froude about fifty years ago. Since that time, the leading experimenter on this branch of research work is Dr. F. Gebers of Vienna Tank. We are very much indebted to him for publishing the results of such complete experiments, as nothing more can be expected with our present state of measuring apparatus. He analysed his experimental data and established a new formula which gives resistances considerably different from those determined by R. E. Froude's formula.

Having been working in connection with the Teishin-Sho Experimental Tank, which is now being built in Tokio, I happened to examine most carefully the mode of Dr. Gebers' analysis and found several inexplicable points such as follows :—

- (1) His method of analysis can not be explained by the theoretical consideration which can be applied fairly well to the experimental facts as to the water flow in pipes.
- (2) The well known fact that the frictional resistance is greatly affected by the roughness of the surface clearly indicates that the resistance does not depend solely upon the viscosity of the fluid. In spite of this fact, he analysed the whole resistance

by Reynolds' law of comparison, which is derived from the Newtonian law of viscosity.

(3) According to his analysis, it is impossible to know how the roughness of the surface affects the frictional resistance. This must be a serious defect of his method.

(4) The plates used in his experiments were similar in forms but not in roughness.

They were painted by the same "Schellack-politur" and consequently the surfaces were the same for plates of different dimensions. Yet he concluded that the frictional resistance obeys Reynolds' law of similitude.

(5) The resistances calculated by his formula agree pretty well with the measured ones. but it has a general tendency of showing higher resistances for low speeds and lower resistances for high speeds as compared with measured ones.

In analysing these experimental data, it should be noticed that the resistances which are governed by Froude's law of comparison and proportional to the square of velocity are also governed by Reynolds' law of comparison, and this might be the reason why the results of Dr. Gebers' experiments appear to admit the simple analysis by Reynolds' law.

Having regard to these considerations, I attempted to make an independent analysis of the same data and arrived at some rather complicated results which will be mentioned hereafter. The resistances calculated by the newly established formula are in better agreement with the measured ones than those determined by Dr. Gebers' formula and practically coincide with R. E. Froude's results for low speeds and in the domain of his coefficient "O".

In analysing these experimental data, it is a matter of great importance to make it upon a reasonable basis, especially when we have to apply the results to speeds and dimensions much exceeding those used in the actual experiments. The new analysis is based on the principle analogous with those of analysing the water flow in pipes and consequently, I am thinking that its results may be applied more safely to the calculation of the skin friction resistances of ships and, I hope, this may be taken as the basis of further research of this important problem of naval architecture.

THEORETICAL CONSIDERATIONS

(1) On the wake current.

It is extremely difficult, if not impossible, to solve the problem of frictional resistances by pure mathematical considerations, so that we have to make some reasonable assumptions based on experimental facts, in order to bring the problem in the domain of our mathematical knowledge.

Fortunately, the famous Calvert's experimental work suggests the general nature of the wake current around the plates. Judging by these experimental facts, the wake velocity can safely be represented by the following formula:—

$$v = c.V.e^{-\alpha y} \frac{V^m}{x^n} \dots\dots\dots (1)$$

where v is the velocity of a water particle,

V is the velocity of the plate,

y is the distance between the water particle and the surface of the plate,

x is the distance of the particle from the fore edge of the plate, measured along the surface,

c , α , m , and n are constants which will be determined later.

(2) The equation of motion.

If we consider two consecutive water layers at the surface of the plate, the force acting between them can be determined by the Newtonian law of viscosity. For the plate of length L , it is

$$\int_0^L B. dx. \eta \left(\frac{dv}{dy} \right)_{y=0} \dots\dots\dots (2)$$

where B is the breadth of the plate,

η is the coefficient of viscosity.

Again let us consider an infinitesimal part of wake water, enclosed between two consecutive planes of the same area and parallel to the surface of the plate, $B. dx$ and dy being the area of each of the planes and the distance between them, respectively.

Then, the resistance due to inertia of the wake water is given by

$$B. dx. dy. \frac{s}{g}. \frac{dv}{dt} \dots\dots\dots (3)$$

where “ s ” represents the weight of unit volume of water. Remembering the relation

$$V \cdot dt = dx \dots\dots\dots(4)$$

we have the following expression denoting the total resistance due to inertia of the whole wake water :-

$$\int_{y=0}^{y=\infty} \int_{x=0}^{x=L} B \cdot \frac{s}{g} \cdot V \cdot \frac{dv}{dx} \cdot dy \cdot dx \dots\dots\dots(5)$$

Consequently, the equation of motion of the wake current is

$$\int_0^L B \cdot \eta \cdot \left(\frac{dv}{dy} \right)_{y=0} dx - \int_{y=0}^{y=\infty} \int_{x=0}^{x=L} B \cdot \frac{s}{g} \cdot V \cdot \frac{dv}{dx} \cdot dy \cdot dx = 0 \dots\dots\dots(6)$$

(3) Velocity of the wake current.

The equation of motion can easily be solved with the aid of the equation (1), and we have finally :-

$$c \cdot a \cdot B \cdot \eta \cdot V^{m+1} \cdot \frac{L^{1-n}}{1-n} = B \cdot \frac{s}{g} \cdot V^{2-m} \cdot L^n \cdot \frac{c}{a} \dots\dots\dots(7)$$

Since this relation is to hold for any value of V and L , we have the following relations :-

$$n = \frac{1}{2} \qquad m = \frac{1}{2} \qquad a = \sqrt{\frac{s}{2g\eta}} \dots\dots\dots(8)$$

Inserting these values in the equation (1), we have a formula representing the wake velocities.

$$v = c \cdot V \cdot e^{-y} \sqrt{\frac{s}{2g\eta} \frac{V}{x}} \dots\dots\dots(9)$$

which coincides with the assumption made by Prof, Guembel. However, no explanations were given as to why he believed his assumption to be acceptable.

(4) Resistance due to viscosity.

When the velocity of the wake current is once determined as above, there is no difficulty in calculating the resistance due to viscosity.

The resistance per unit area of the plate at the distance x from its fore edge is given by :-

$$S = \eta \left(\frac{dv}{dy} \right)_{y=0} = -c \cdot \eta \sqrt{\frac{s}{2g\eta} \frac{V^3}{x}} \dots\dots\dots(10)$$

Consequently, the total resistance of the plate is

$$R = \int_0^L S \cdot dx = c \cdot B \sqrt{\frac{2s\eta}{g}} V^3 L \dots\dots\dots(11)$$

where L is the length of the plate,

B is the breadth of the plate.

The equation (11) is analogous to Blasious' equation which is

$$R = 0.6635 B \sqrt{\frac{s\eta}{g}} V^3 L \dots\dots\dots(12)$$

(5) Components of the skin friction resistance.

If we calculate the resistances due to viscosity for the plates used by Dr. Gebers in his experiments, by means of the equation (11), making $c=1$, we will find that they are from 17 to 50 % of the measured resistances. Consequently, it seems to be impossible to explain the total resistance by means of viscosity of water. Moreover, the equation (11), is independent of the roughness of the surface which is inconsistent with our experience.

Similar difficulty was met in analysing the data as to the water flow in pipes. The most reasonable explanation for this fact can be made by assuming that the skin friction resistance consists of two components, viz., (1) the resistance due to viscosity and (2) the resistance due to roughness of the surface.

(6) On the water flow in pipes.

I should like to insert here a brief description to the water flow in pipes, in order to show how similar the method of analysis is for these two cases.

The mean velocity of the stationary flow in pipes can be determined by the Newtonian law of viscosity. It is

$$V_m = \frac{1}{8} \cdot \frac{hs}{L\eta} \cdot R^2 \dots\dots\dots(13)$$

where hs is a constant pressure difference between sections at a distance L ,

R is inner radius of the pipe.

If we represent graphically the experimental data, plotting

$$x = \frac{V_m R s}{\eta g} \quad y = \frac{R^2 h s}{V_m L \eta} \dots\dots\dots (13)$$

on X and Y axes respectively, we obtain always a result of similar character, one example of which is represented in Fig. (1). The curve begins at the point $x=0$, $y=8$ and remains parallel to X axis so long as the stationary state of motion. In this stage, the pressure difference $R^2 \pi h s$ is proportional to V_m , as shown in the equation (13). However, when some critical speed is once reached, the curve changes its direction quite abruptly and finally approaches to a straight line inclined to X axis. This fact of approaching an oblique right line represents that, for high values of $V_m R$, the resistance, effected by the surface of pipes, has a component which varies nearly as the square of the velocity.

Above mentioned properties of the frictional resistances has been explained by the following hypothesis :-

- 1 Water particle adjacent to the surface has a tendency to remain on the surface by some adhesive force depending on the nature of the surface and the fluid.
- 2 The resistance due to viscosity represents the force acting between two consecutive layers of water adjacent to the surface.
- 3 For low values of $V_m R$, the force mentioned in (2) is less than the limiting value of the adhesive force mentioned in (1), so that water particles remain on the surface and the resistance due to viscosity is the total resistance. Consequently, the curve remains parallel to X axis.
- 4 The force mentioned in (2) increases directly as $V_m L$, so that for some value of $V_m R$ it becomes equal to the adhesive force. For speeds higher than the critical speed corresponding to this value of $V_m R$, the water particles adjacent to the surface slip along it.
- 5 When the slip occurs, the particles impinging on small projections of the surface, create an eddying state of motion. Thus, we can explain the latter part of the curve by the ground of the eddy making resistances, which are generally believed to be proportional to the square of the velocity.

These, being generally recognised hypothesis for the flow of water in pipes, must

also be true for the skin friction resistances of plates. However, as to the detail of the matter, we may expect some differences between these two cases, owing to the nature of the equations (9) and (13).

- 1 The equation (13), being determined for the stationary state of motion, can not be applied for speeds higher than the critical speed.
- 2 In the case of plates, we can not realise the stationary state of motion, so that the corresponding equation (9) is determined considering the change of momentum of the water. Consequently, it may be applied for any speed whatever, if we assign a proper value to the constant c , cV representing the velocity of water at the surface of the plate.

(7) On the eddy-making resistance.

As to the eddy making resistance, viz., the resistance experienced by a plate moving in water, in the direction perpendicular to its plane, theoretical considerations will suggest us the following two conclusions:-

- 1 Froude's law of comparison can be applied for the eddy making resistances.
- 2 The eddy making resistances may be expressed by

$$C \cdot f \cdot \frac{s}{g} \cdot V^2 \dots \dots \dots (14)$$

where V is the velocity of the plate,

f is the area of the plate,

C is a constant,

s is the weight of unit volume of water.

Some years ago, Dr. F. Gebers checked these theoretical results by actual experiments (Schiffbau 1907-8), and confirmed the applicability of Froude's law. However, as to the expression (14), his conclusion was "the value of C increases as the area f increases, and decreases as the velocity V increases".

These conclusions are quite reasonable, I think, because if the resistance follows Froude's law and is proportional to V^{2-n} , it must be proportional to $L^{2+\frac{n}{2}}$, L being the linear dimension of the plate. As shown in the following table, n may be taken between 0.1 and 0.05 and therefore, the resistance will not be proportional to $V^2 L^2$ as

shown in the expression (14).

Table of $C/2$

Square plate submerged to such depth that the distance from its upper edge to the water surface is equal to the length of its side.

100mm plate		200mm plate		300mm plate		
(1) C/2 determined by Dr. Gebers.						
V	1st. expe- riment	2nd. expe- riment	1st. expe- riment	2nd. expe- riment	1st. expe- riment	2nd. expe- riment
0.5		1.255		1.217		1.270
1.0	1.275	1.316	1.275	1.246	1.350	1.380
1.5	1.260	1.240	1.320	1.290	1.350	1.340
2.0	1.220	1.152	1.240	1.257	1.290	1.288
2.5	1.190	1.107	1.190	1.180	1.255	1.240
3.0	1.185	1.099	1.150	1.126	1.140	1.180
3.5	1.187	1.097	1.140	1.100		1.127
4.0	1.200	1.103	1.115	1.090		
4.5	1.217	1.100	1.085	1.095		
5.0	1.210	1.092		1.107		
(2) C/2 determined by $C=a.V^{-n}.L^{\frac{n}{2}}$.						
V	a=2.82 n=0.10	a=2.56 n=0.05	a=2.82 n=0.10	a=2.56 n=0.05	a=2.82 n=0.10	a=2.56 n=0.05
0.5	1.350	1.276	1.394	1.280	1.422	1.287
1.0	1.259	1.209	1.300	1.230	1.328	1.243
1.5	1.207	1.184	1.240	1.210	1.273	1.218
2.0	1.171	1.167	1.212	1.190	1.240	1.200
2.5	1.149	1.154	1.188	1.174	1.212	1.186
3.0	1.128	1.144	1.167	1.164	1.191	1.176
3.5	1.110	1.135	1.145	1.155	1.170	1.167
4.0	1.097	1.128	1.132	1.146	1.158	1.159
4.5	1.080	1.120	1.120	1.140	1.141	1.153
5.0	1.070	1.115	1.108	1.135	1.130	1.146

Now, leaving the determination of the exact value of " n " till later stage, let us discuss the nature of the eddy making resistance generally. The dimensionless notations of Froude's law of comparison are:-

$$\varphi = \frac{V^2}{Lg} \quad \zeta = \frac{K}{L^3 s} \dots\dots\dots (15)$$

where V is the velocity of the moving body,

K is the force acting on the moving body,

L is linear dimension of the moving body,

s is the weight of unit volume of fluid,

g is the gravitational acceleration.

Assuming that the eddy making resistance is proportional to V^{2-n} , we have

$$\zeta = a \varphi^{\frac{2-n}{2}}$$

Therefore, if the eddy making resistance be represented by K_e :-

$$K_e = a \cdot \frac{s}{g^{1-\frac{n}{2}}} \cdot V^{2-n} \cdot L^{2+\frac{n}{2}} \dots \dots \dots (16)$$

and generally :-

$$K_e = a \cdot b \cdot \frac{s}{g^{1-\frac{n}{2}}} \cdot F \cdot V^{2-n} \cdot L^{\frac{n}{2}} \dots \dots \dots (17)$$

where a is constant,

F is the area of the plate,

b is the ratio of breadth to length of a rectangular plate.

(8) On the resistance due to roughness of the surface.

In considering the resistance due to roughness of the surface, it is usual to represent the actual surface of pipes or plates by a smooth surface with an infinite number of small projections. These projections may obviously create some eddy making resistance even if they are of such small dimensions as comparable with the size of molecules of water.

If we allow the above conception of roughness, it is not difficult to connect the unknown resistance due to roughness with the the conclusion mentioned in the foregoing article. Using the notations such as :-

F Area of the surface of the plate,

f Area of a single projection,

m Number of projections in unit area of F ,

and remembering that mf F corresponds to F in the equation (17), we have the following expression representing the general nature of the resistance due to roughness.

$$a \cdot mf \cdot \frac{s}{g^{1-\frac{n}{2}}} \cdot F \cdot V^{2-n} \cdot L^{\frac{n}{2}} \dots \dots \dots (18)$$

where “ a ” is a constant.

Although the actual resistance due to roughness may not be of such simple character as admit these simple reasonings, the expression (18) may safely be applied to actual cases, if we denote the unknown factor “ a mf” by an empirical coefficient “ ρ ” which will be called the “coefficient of roughness”. Hence we have

$$\text{Resistance due to roughness} = \rho \cdot \frac{s}{g^{1-\frac{n}{2}}} \cdot F \cdot V^{2-n} \cdot L^{\frac{n}{2}} \dots\dots\dots (19)$$

which may be transformed to

$$\text{Resistance due to roughness} = \rho \cdot b \cdot \frac{s}{g^{1-\frac{n}{2}}} \cdot V^{2-n} \cdot L^{2+\frac{n}{2}} \dots\dots\dots (20)$$

where “ b ” is the ratio of the periphery of cross section of the plate to its length.

These equations are deduced directly from the equation (17), without considering the wake current. The effect of the wake current is very difficult to estimate, but we may assume that the actual resistance due to roughness is less than that obtained by the equation (20), so that

$$\text{Resistance due to roughness} = (1-d) \rho \cdot b \cdot \frac{s}{g^{1-\frac{n}{2}}} \cdot V^{2-n} \cdot L^{2+\frac{n}{2}} \dots\dots\dots (21)$$

where “ d ” is an unknown function of viscosity of water, roughness of the surface, etc. and represents the effect of the wake current.

Finally, it will not be unnecessary to point out that above mentioned reasonings are based on the assumption that the roughness of the surface varies with the dimension of the plate. When we speak of some degree of roughness, we do not mean the absolute state of unevenness of the surface, but that relative to the dimension of the surface so that two plates, large and small, having the same surface will have different roughness in our conception.

(9) On the skin friction resistance of plates.

Since the skin friction resistance is the resultant of the resistance due to viscosity and that due to roughness, it may be represented by a suitable combination of equations (11) and (21).

If we represent the periphery “ B ” of the cross section of the plate in terms of its length “ L ”, by the relation

$$B=b, L \dots \dots \dots (22)$$

the equation (11) may be transformed to

$$\text{Resistance due to viscosity} = c.b.\sqrt{\frac{2s\eta}{g}} \cdot (V.L)^{1.5} \dots \dots \dots (23)$$

For very low speeds of the plate, water particles, adjacent to its surface, stuck to and move with the latter, so that the constant c in above equation is equal to one and we can expect no resistance due to roughness. Consequently,

$$\begin{array}{l} \text{Skin friction resistance} \\ \text{for very low speeds} \end{array} = b.\sqrt{\frac{2s\eta}{g}} \cdot (V.L)^{1.5} \dots \dots \dots (24)$$

This, being theoretically correct, may be safely relied upon, but it has no great importance for our purposes because usual speeds coming under our investigation are out of the domain of the applicability of above equation. How far above equation can be applied, shall be determined by experimental facts, for it depends upon properties of the surface and water.

For speeds higher than certain critical speed, water particles slip along the surface and the skin friction resistance is the resultant of its two components, so that

$$\begin{array}{l} \text{Skin friction} \\ \text{resistance} \end{array} = c.b.\sqrt{\frac{2s\eta}{g}} \cdot (V.L)^{1.5} + (1-d) \cdot \rho \cdot b \cdot \frac{s}{g^{1-\frac{n}{2}}} \cdot V^{2-n} \cdot L^{2+\frac{n}{2}} \dots \dots \dots (25)$$

Where c , d and n are to be determined by experimental data.

ANALYSIS OF DR. F. GEBERS'

EXPERIMENTAL DATA.

(1) General mode of analysis.

Essential parts of Dr. F. Gebers' experiments are those made by similar plates, results of which were published in Table 4, column b, and Figs. 5 and 8 of his paper "Das Aehnlichkeitsgesetz fuer den Flaechenwiderstand im wasser geradlinig fortbewegter, politierter Platten" (Schiffbau XXII. Jahrgang). These experiments were made possibly under the same temperature, but there are still some unavoidable differences as shown in Table 2.

Table 1 shows the values of

$$\mu = b.\sqrt{\frac{2s\eta}{g}} \dots \dots \dots (26)$$

for respective temperatures.

Table 1.

Temperature in degree c.	η	s	$\sqrt{\frac{2s\eta}{g}}$	μ
8.0	0.0001407	999.88	0.1694	
8.3	0.0001395	999.86	0.16872	0.017209
9.0	0.0001367	999.80		
9.7	0.0001340	999.75	0.16535	0.016866
9.9	0.0001333	999.74	0.16492	0.016822
10.0	0.0001329	999.73		
10.2	0.0001322	999.71	0.16423	0.016751
10.7	0.0001304	999.66	0.16310	0.016636
11.0	0.0001293	999.63		
Remarks:- "g" is assumed to be 9.80 in metre-second. "b" is 0.102 for similar plates.				

Resistances due to viscosity calculated in accordance with the equation (23), assuming $c=1$, are as follows:-

Table 2.

Length of plates Temperature in c.	1.25m 10.2	2.5m 9.9	5.0m 9.7	7.5m 10.7	10.0m 8.3
Velocity in m/sec.	Resistance due to viscosity; in grams.				
1	23	66	189	342	544
2	66	188	533	966	1539
3	122	346	980	1776	2828
4	187	532	1509	2734	4354
5	262	743	2108	3821	6084
6	344	977	2771	5022	7998
7	434	1232	3492	6328	10079
7.5	481	1366	3873	7018	11177
8	530	1505	4267	7732	12314

If we subtract these resistances from measured ones, we will have resistances due to roughness as given in the following table:-

Table 3.

Length of plates	1.25m	2.5m	5.0m	7.5m	10.0m
Velocity in m/sec.	Resistance due to roughness, in grams.				

1	-8	44	211	498	906
2	54	222	1027	2274	4131
3	158	534	2330	5084	9532
4	293	1018	4191	9056	16886
5	488	1577	6512	14189	25696
6	691	2243	9269	20298	36322
7	946	3168	12708	27672	49521
7.5	1089	3754	14717	31842	57123
8	1240	4335	16913	36268	

In making further discussion, the effect of temperature on the resistance due to roughness may be neglected because the differences of "s" given in Table 1 are practically negligible.

The resistances given in Table 3 include unavoidable wave making resistances. According to Dr. Gebers, they amount from 1 to 1.5% of total resistances and vary nearly as the square of velocity. Although his method of deducing these conclusions is somewhat arbitrary, it may be taken as suggesting the general property of the wave making resistances. Consequently, the resistances given in Table 3 may be anticipated to follow the equation (21) as a whole.

If the resistances due to roughness be represented by K_R , the equation (20) may be transformed to

$$\frac{K_R}{V^{1-n} \cdot L^{1+\frac{n}{2}}} = \rho \cdot b \cdot \frac{s}{g^{1-\frac{n}{2}}} \cdot VL \dots\dots\dots (27)$$

If we plot, on an ordinary section paper, " VL " horizontally, and the left hand side of above equation vertically, the line connecting points thus obtained is to be rectilinear for respective plate, when the resistance due to roughness has the property expressed by the equation (21).

If we calculate the left hand side of the equation (27), assuming $n=0.10$ we have

Table 4.

Length of plates	1.25m	2.5m	5.0m	7.5m	10.0m
Velocity in m/sec.	Value of $K_R/V^{0.9} L^{1.05}$				
1	-6	17	39	60	81
2	23	45	103	147	202
3	47	76	160	228	316

4	67	112	222	314	432
5	91	142	283	402	538
6	109	171	341	488	646
7	130	210	407	579	766
7.5	141	234	443	626	832
8	151	255	481	673	

The values of VL corresponding to above values of $K_R/V^{0.9} \cdot L^{1.05}$ are

Table 5.

Length of plates	1.25m	2.5m	5.0m	7.5m	10.0m
Velocity in m/sec.	Values of VL .				
1	1.25	2.5	5.0	7.5	10.0
2	2.50	5.0	10.0	15.0	20.0
3	3.75	7.5	15.0	22.5	30.0
4	5.00	10.0	20.0	30.0	40.0
5	6.25	12.5	25.0	37.5	50.0
6	7.50	15.0	30.0	45.0	60.0
7	8.75	17.5	35.0	52.5	70.0
7.5	9.375	18.75	37.5	56.25	75.0
8	10.00	20.0	40.0	60.0	80.0

Plotting these results as mentioned above, we obtain Fig. 2 which shows that points belonging to the same plate are approximately on the same straight line as we have already anticipated.

(2) Properties of the resistance due to roughness.

As mentioned in the preceding article, the equation (21), which is obtained by theoretical considerations, seems to have ample experimental supports. We shall, however, make farther investigations as to the detail of the matter and find proper values of several constants.

In the first of all, we shall notice that the straight lines thus obtained do not pass through the origin of co-ordinate axes; the line corresponding to 5 metre plate, for instance, intersects the horizontal axis at the point $x=1.9$. We found similar property of the frictional resistance, in the case of water flow in pipes, and it was reasonably explained introducing the idea of critical speed.

In calculating the resistances given in Table 2, we assumed the constant " c " to

be one, so that they are total resistances acting on the plates, for very low speeds, and are represented by the horizontal line OA, A corresponding to the critical speed.

This state of things continues so long as the particles of water stick to and move with the surface of the plate.

For speeds higher than the critical speed, an irregular, eddying motion is produced in a layer of the fluid next to the surface whilst the motion at a distance laterally is comparatively smooth and uniform. The turbulent motion of water next to the surface and the regular laminar flow of the outside water is the consequence of the viscosity of water. And the resistance experienced by the plate is the resultant of forces corresponding to these different kinds of motion.

As already mentioned, the resistance due to viscosity, corresponding to the laminar flow of water, can be determined by the equation (23), if we assign a proper value to the constant "c". Now, we conclude from the foregoing analysis that the constant may be assumed to be unity for high as well as low speeds of the plate, although we expected smaller value for speeds higher than the critical speed. It is very difficult to explain the reason of this rather unexpected result, but it is perhaps due to the eddying motion, viz., irregularity of directions of motion, of water particles adjacent to the surface.

If we denote the length OA and the inclination of the line AB by "a" and "α" respectively, we have

$$\frac{K_R}{V^{1-n} L^{1+\frac{n}{2}}} = a. (VL - a)$$

and therefore

$$K_R = a. V^{2-n}. L^{2+\frac{n}{2}} - a.a. V^{1-n}. L^{1+\frac{n}{2}} \dots \dots \dots (28)$$

Comparing the equations (21) and (28), we have

$$a = \rho. b. \frac{s}{g^{1-\frac{n}{2}}} \quad d = \frac{a}{VL} \dots \dots \dots (29)$$

At the point A, there must be the relation :-

$$b_1 \sqrt{\frac{2s\gamma}{g}} (VL)^{1.5} = \rho. b_2 \frac{s}{g^{1-\frac{n}{2}}} V^{2-n}. L^{2+\frac{n}{2}} \dots \dots \dots (30)$$

For the convenience of future reference, we will distinguish "b" in both sides of the equation by suffices 1 and 2. If we use the notation:-

$$\beta = b_1 \sqrt{\frac{2s\eta}{g}} \dots\dots\dots (31)$$

we have

$$\beta.(VL)^{1.5} = a.V^{2-n}.L^{\frac{2+n}{2}}$$

and consequently

$$a = VL = \frac{1}{L^{\frac{3n}{1-2n}}} \left(\frac{\beta}{a} \right)^{\frac{2}{1-2n}} = \frac{1}{L^{\frac{3n}{1-2n}}} \left(\frac{b_1}{b_2} \right)^{\frac{2}{1-2n}} \left(\frac{2\eta g^{1-n}}{\rho^2 s} \right)^{\frac{1}{1-2n}} \dots\dots\dots (32)$$

The value of "a" calculated by the relations (32) and (31), taking α from the figure, must correspond to the length OA. It will be found, however, that this is not the case in Fig. 2, and this incoincidence of actual and calculated values of "a" comes from the improper choice of the constant "n".

Fig. 2 shows that the critical point A and the inclination of the line AB are different for different lengths of plates. These are in agreement with the equation (32) and (29), for the value of "a" depends upon ρ and L and that of "a" upon ρ , ρ being different for different sizes of the plates.

Inserting "a" given by the equation (32) into the equation (28), we have

$$K_R = a.V^{2-n}.L^{\frac{2+n}{2}} = a \left(\frac{\beta}{a} \right)^{\frac{2}{1-2n}}.V^{1-n}.L^{\frac{1+n}{2} - \frac{3n}{1-2n}} \dots\dots\dots (33)$$

which gives the resistance due to roughness. It should be noticed that while the first term is governed by Froude's law of comparison, we can not find such value of "n" that it let the second term be governed by the same law.

(3) Analysis of the experimental results of a five metre plate at different draught.

Besides similar-plate-experiments, Dr. F. Gebers measured resistances of a 5 metre-plate at different draughts. I want to see whether they can be utilised in clearing up still unknown points of above conclusion.

If we calculate following the line explained in the article_(d), following results will be obtained.

Table 6.

Mean temperature=8,0°C. $\sqrt{\frac{25\eta}{g}} = 0,16044$					
Draught <i>b</i> μ	25mm 0.012 2.03	50mm 0.022 3.73	100mm 0.042 7.12	150mm 0.062 10.51	250mm 0.102 17.28
Velocity m/sec	Resistance due to viscosity, in grams.				
1	23	42	80	118	193
2	64	118	225	333	543
3	118	165	414	610	1004
4	182	334	637	949	1546
5	254	466	890	1314	2160
6	334	613	1170	1727	2840
7	420	772	1475	2177	3578
7.5	466	856	1635	2413	3967
Velocity m/sec	Resistance due to roughness, in grams.				
1	27	48	80	126	207
2	154	242	405	662	1024
3	372	620	991	1495	2326
4	658	1036	1843	2625	4184
5	946	1614	2860	4076	6540
6	1276	2322	4070	5833	9500
7	1760	3178	5555	8073	13052
7.5	2084	3644	6425	9437	15013

As mentioned in the preceding article, the assumption $n=0.10$ was found to be erroneous. I tried several values of “ n ” between 0.10 and 0.05 and finally found that the most suitable value of it is 0.06. By this value of “ n ”, we have

Table 7.

Draught	25mm	50mm	100mm	150mm	250mm
VL	Value of $K_R/V^{0.94}L^{1.03}$.				
5	5	9	15	24	39
10	16	24	41	67	103
15	25	42	67	101	158
20	34	54	95	136	217
25	40	68	120	171	274
30	45	82	144	206	336
35	54	97	170	247	399
37.5	60	105	184	270	430

Plotting these results, we obtain Fig. 3 from which it can be noticed that five straight lines intersect the horizontal base line at a common point $x=1.7$. This value of x coincides with the calculated value of "a" for the draught 250 mm. However, "a" for other draughts are not equal to 1.7; for the draught 25 mm., for instance, it is 1.012. Since L and ρ are the same for all draughts of the plate, we are to find the reason of above incoincidence in some other factors of the equation (32).

(4) The effect of longitudinal edges on the skin friction resistance.

The inclination of the straight line can be determined by the equation (29). If we insert 0.06 for the constant "n", it becomes

$$a = \rho \cdot b_2 \cdot \frac{s}{g^{0.97}} \dots \dots \dots (34)$$

Since ρ is constant, a must be proportional to b_2

In Fig. 3, AB is a vertical line and AC is equal to 0.102, viz., b_2 for the draught 250 mm. If we measure CD equal to b_2 for other draughts and find E and F on BC and AB respectively drawing vertical and horizontal lines as shown in the figure, then F would be on the straight lines representing resistances, were their inclinations proportional to b_2 . However, this is not the case in the figure.

Draw horizontal lines passing through the points at which AB intersects the inclined straight lines and find the points H on DE. These H will be found approximately on the same straight line BK, CK being about 0.004.

Consequently, it is safe to say that, owing to the effect of longitudinal edges, b_2 for calculation should be taken a little higher than its actual value. However, it is quite obvious that if we increase b_2 , keeping b_1 unchanged, the discrepancy between calculated and actual values of "a" stated at the end of the preceding article will be increased.

Although the cause of the longitudinal edge resistance is still unknown to us, it appears not unreasonable to assume that some part of it is due to viscosity of water. If it depend solely on viscosity, the effect of longitudinal edges would be represented in our calculation by increasing b_1 , instead of b_2 . However, if we increase b_1 , keeping b_2 unchanged, so as to bring the points F on the oblique lines, above mentioned

discrepancy of values of "a" still appears in the opposite direction.

Thus, we arrive to the conclusion that the effect of longitudinal edges can be represented in our calculation by increasing b_1 as well as b_2 , the amount of increasing being greater in b_1 than in b_2 . In other words, the resistance due to viscosity and that due to roughness are simultaneously increased by the existence of longitudinal edges. This appears to be quite reasonable.

After several trials, the most suitable increment of b_1 was found to be 0.005. Table 8 shows the results of calculation using this value of the increment.

Table 8.

Draught b	25mm	50mm	100mm	150mm	250mm
b_1	0.012	0.022	0.042	0.062	0.102
μ	0.017	0.027	0.047	0.067	0.107
μ	2.88	4.30	7.96	11.35	18.14
Velocity m/sec	Resistance due to viscosity, in grams.				
1	34	48	89	127	203
2	91	136	252	359	574
3	167	250	463	659	1053
4	258	385	711	1015	1623
5	360	538	995	1420	2268
6	468	707	1305	1865	2981
7	596	891	1650	2350	3753
7.5	661	987	1827	2606	4165
Velocity m/sec.	Resistance due to roughness, in grams.				
1	16	42	71	117	197
2	129	224	378	641	996
3	323	535	942	1446	2277
4	582	985	1769	2550	4107
5	840	1547	2755	3970	6432
6	1142	2228	3935	5695	9359
7	1584	3059	5380	7900	12872
7.5	1889	3513	6233	9244	14815
VL	Value of $K_R/V^{0.94}L^{1.03}$.				
5	3	8	14	22	38
10	13	23	38	64	100
15	22	36	64	98	154
20	30	51	92	132	212

25	35	65	115	166	270
30	40	79	139	202	331
35	43	94	165	242	394
37.5	54	101	179	265	425

Plotting these results, we have Fig. 4. The straight lines corresponding to draughts 250 mm and 25 mm intersect respectively with the base line at the points $x=1.88$ and $x=2.67$ which are in agreement with the results of calculation.

If we find the points F and H as previously explained, it is noticed that F are not on the oblique lines while the points H are approximately on the same straight line BK, CK being 0.0025. Consequently, we shall increase b_1 and b_2 by 0.005 and 0.0025 respectively, in order to represent the effect of longitudinal edges in our calculation. Dr. Gebers' conclusion was "the resistance due to longitudinal edges is equal to the resistance which would be effected if the cross sectional periphery of the plate be increased by 1.35 cm, irrespective of its length". Although my conclusion does not agree with that of Dr. F. Gebers, I think that it is not unacceptable.

(5) Analysis of the results of similar-plate-experiments.

Now, I want to apply above mentioned conclusions to the results of similar plate experiments and to see whether they are in agreement with these experimental facts.

Table 9.

	$b=0.102$	$b_1=0.107$	$g=9.80$		
Length	1.25m	2.5m	5.0m	7.5m	10.0m
Temperature in degree c.	10.2	9.9	9.7	10.7	8.3
$\sqrt{2s\eta/g}$	0.16423	0.16492	0.16535	0.16310	0.16872
μ	0.017573	0.017643	0.017692	0.017452	0.018053
Velocity m/sec.	Resistance due to viscosity, in grams.				
1	25	70	198	358	571
2	69	197	559	1029	1615
3	128	362	1028	1863	2966
4	196	558	1582	2868	4567
5	275	780	2212	4008	6383
6	361	1025	2907	5268	8390
7	455	1292	3663	6639	10573
7.5	504	1433	4063	7362	11726

8	556	1578	4476	8111	12918
Velocity m/sec.	Resistance due to roughness, in grams.				
1	-10	40	202	482	879
2	51	213	1001	2211	4055
3	152	518	2282	4997	9394
4	284	992	4118	8924	16673
5	475	1540	6408	14002	25397
6	674	2195	9133	20052	35930
7	925	3108	12537	27361	40297
7.5	1066	3687	14527	31498	56574
8	1214	4262	16704	35889	
Velocity m/sec.	Value of $K_R/V^{1.94}, L^{1.03}$.				
1	-8	16	38	61	82
2	21	43	99	145	197
3	43	72	155	223	311
4	61	105	213	304	423
5	81	132	269	387	522
6	99	159	323	467	623
7	118	194	383	552	735
7.5	127	216	417	594	794
8	137	235	451	638	

Fig. 5 shows these results in diagram. If we measure the inclination of each line from the figure and determine "a" by the equation (32), we have

Table 10.

Length of plate	1.25m	2.5m	5.0m	7.5m	10.0m
inclinations	15.5	12.565	11.52	10.88	10.78
a	1.260	1.789	1.857	1.964	2.017

These values of "a" are in close agreement with those measured from the figure.

(6) On the coefficient of roughness.

As already pointed out, the roughness of a surface in our conception is the state of unevenness of the surface and therefore one part of the geometrical figure. In deducing the equation (21), we assumed that the roughness varies with the dimension of the plate and keeps the geometrical similarity with each other.

The similar plates used by Dr. Gebers were painted by the same "Schellackpölitur" and, consequently, they are not similar in roughness. This is the reason why

the straight lines have different inclinations in Fig. 5.

Transforming the equation (34), we obtain

$$\rho = \frac{a \cdot g^{0.97}}{s(b + 0.0025)} = a \cdot m \dots \dots \dots (35)$$

If we calculate ρ by this equation, we have the following results:-

Table 11.

Roughness of 5-metre-plate.					
	$g=9.80$	$s=999.88$	$g^{0.97}/s=0.0091525$		
Draught	25mm	50mm	100mm	150mm	250mm
α	1.618	2.897	5.03	7.385	11.88
l_2	0.0145	0.0245	0.0445	0.0645	0.1045
$\rho \times 1000$	1.02	1.08	1.04	1.02	1.04
Roughness of similar plates					
	$g=9.0$	$s=999.75$	$m=0.0876$	$l_2=0.1045$	
Length	1.25m	2.5m	5.0m	7.5m	10.0m
α	15.5	12.56	11.52	10.88	10.78
$\rho \times 1000$	1.36	1.10	1.01	0.95	0.94
$\rho' \times 1000$	1.40	1.11	1.03	0.95	0.94
Remark:- " ρ' " are the coefficients which effect the closest agreement of calculated and measured resistances. See Table 13.					

From this Table, we may notice that the coefficients of roughness of 5-metre-plate tend to the mean value 0.00104, while those of similar plates are different according to their lengths.

From the point of view of naval architects, it is extremely important to find the relation between the coefficient of roughness and the length of the surface. Fig 6 is obtained by plotting $10/L$ horizontally and coefficients of roughness vertically. It will be noticed that the points obtained are approximately on the same straight line, so that we have the following simple relation between L and ρ .

$$\rho = \frac{1}{100,000} \left(87 + \frac{67}{L} \right) \dots \dots \dots (36)$$

By this relation, we can calculate the coefficients of roughness of large plates painted with the "Schellackpolitur".

Table 12

length	50m	100m	150m	200m	250m	300m
ρ	0.00088	0.00088	0.00087	0.00087	0.00087	0.00087

(7) Formule expressing the skin friction resistance of plates.

From the foregoing considerations, we have the following formula expressing the skin friction resistance of plates.

$$\text{When } VL \leq \frac{1}{L^{0.2045}} \left(\frac{b+0.005}{b+0.0025} \right)^{2.273} \left(\frac{2\eta g^{0.94}}{\rho^2 s} \right)^{1.136} \left\{ \begin{array}{l} \text{Skin friction} \\ \text{resistance} \end{array} \right. = (b+0.005) \sqrt{\frac{2s\eta}{g}} (VL)^{1.5} \dots\dots\dots(37)$$

$$\text{When } VL > \frac{1}{L^{0.2045}} \left(\frac{b+0.005}{b+0.0025} \right)^{2.273} \left(\frac{2\eta g^{0.94}}{\rho^2 s} \right)^{1.136} \left\{ \begin{array}{l} \text{Skin friction} \\ \text{Resistance} \end{array} \right. = (b+0.005) \sqrt{\frac{2s\eta}{g}} (VL)^{1.5} \dots\dots\dots(38)$$

$$- \frac{(b+0.005)^{2.273}}{(b+0.0025)^{1.273}} \left\{ \frac{2\eta g^{0.94}}{\rho^{1.72} s^{0.12}} \right\}^{1.136} V^{0.94} L^{0.825}$$

$$+ \rho(b+0.0025) \frac{s}{g^{0.27}} V^{1.94} L^{2.03}$$

where b is the ratio of the cross-sectional periphery to the length of the plate,

s is weight of unit volume of water,

g is the gravitational acceleration,

η is the coefficient of viscosity of water,

ρ is the coefficient of roughness of the surface,

V is the speed of the plate,

L is the length of the plate.

These formulae are of quite general character and may be applied to any cases, irrespective of the system of units employed.

It will be noticed that limits of stability of laminar motion are narrower the smaller the viscosity and the greater the roughness.

(8) Comparison of calculated and measured resistances.

I prepared the following table for the comparison of calculated and measured resistances. The resistances calculated by Dr. Gebers' formula are also appended in

the last column. The calculation of last mentioned resistances is effected by

$$\text{Resistance} = 0.01030 \left(\frac{s}{g} \right)^{0.875} \cdot \left(\frac{\eta}{L} \right)^{0.125} \cdot F \cdot V^{1.875} \dots\dots\dots (39)$$

the cross-sectional periphery being increased by 0.0135 *m* in estimating the wetted area *F*.

Table 13.

V	I	II	III	calculated resistance	measured resistance	Gebers' resistance
term of equation (38)						
Similar plate, L=1.25 m.						
temperature = 10.2°C.			η 0.0001322		$s = 999.71$	
b = 0.102			$\rho = 0.00140$		$g = 9.80$	
1	25	24	25	26	15	34
2	69	46	97	120	120	124
3	128	67	212	273	280	266
4	196	88	370	478	480	456
5	275	108	571	738	750	692
6	361	128	812	1045	1035	974
7	455	148	1097	1404	1380	1301
7.5	504	158	1254	1600	1570	1482
8	556	168	1420	1806	1770	1671
Similar plate, L=2.5 m.						
temperature = 9.9°C.			$\eta = 0.0001333$		$s = 999.74$	
b = 0.102			$\rho = 0.00111$		$g = 9.8$	
1	70	57	81	94	110	116
2	197	110	312	399	410	424
3	362	161	686	887	880	907
4	558	210	1199	1547	1550	1556
5	780	260	1847	2367	2320	2364
6	1025	303	2632	3349	3220	3328
7	1292	356	3550	4486	4400	4443
7.5	1433	380	4057	5110	5120	5057
8	1578	404	4600	5774	5840	5708
Similar plate, L=5.0 m.						
temperature = 9.7°C.			$\eta = 0.0001340$		$s = 999.75$	
b = 0.102			$\rho = 0.00103$		$g = 9.80$	
1	198	112	309	395	400	414
2	559	216	1184	1527	1560	1518
3	1028	316	2600	3312	3310	3247

4	1582	413	4540	5709	5700	5568
5	2212	510	7000	8702	8620	8460
6	2907	605	9980	12282	12040	11910
7	3663	699	13460	16424	16200	15900
7.5	4063	746	15380	18697	18590	18095
8	4476	793	17430	21113	21180	20423
Similar plate, $L=7.5$ m.						
temperature = 10.7°c .			$\eta = 0.0001304$	$s = 999.66$		
$b = 0.102$			$\rho = 0.00095$	$g = 9.80$		
1	358	169	648	837	840	874
2	1029	324	2487	3192	3240	3207
3	1863	474	5460	6849	6860	6860
4	2868	621	9550	11797	11790	11765
5	4008	766	14710	17957	18010	17880
6	5268	908	20960	25320	25320	25160
7	6639	1050	28270	33859	34000	33600
7.5	7362	1120	32300	38542	38860	38235
8	8111	1191	36600	43520	44000	43160
Similar plate, $L=10.0$ m.						
temperature = 8.3°c .			$\eta = 0.0001395$	$s = 999.86$		
$b = 0.102$			$\rho = 0.00094$	$g = 9.80$		
1	571	234	1150	1487	1450	1506
2	1615	449	4415	5581	5670	5524
3	2966	658	9690	11998	12360	11815
4	4567	862	16940	20645	21240	20263
5	6383	1062	26210	31531	31780	30790
6	8390	1262	37200	44328	44320	43340
7	10573	1457	50150	59266	59600	57860
7.5	11726	1556	57330	67500	68300	65850
5 metre plate, general particulars.						
$\rho = 0.000104$		$s = 999.88$	$g = 9.80$	$\eta = 0.0001407$		
5 metre plate, draught = 25 mm., $b = 0.012$.						
1	34	22	43	55	50	60
2	91	42	166	215	220	219
3	167	62	365	470	490	469
4	258	81	637	814	840	805
5	360	101	982	1241	1200	1223
6	468	119	1400	1749	1610	1722
7	596	138	1887	2345	2180	2299
7.5	661	147	2158	2672	2550	2616

5 metre plate, draught=50 mm. $b=0.022$.						
1	48	33	73	88	10	101
2	136	62	280	354	360	369
3	250	91	616	775	785	789
4	385	120	1077	1342	1370	1384
5	538	148	1600	2050	2055	2055
6	707	175	2363	2895	2735	2893
7	891	202	3190	3869	3950	382
7.5	987	216	3640	4411	4500	4336
5 metre plate, draught=100 mm., $b=0.042$						
1	89	53	133	169	160	182
2	252	101	508	659	630	667
3	463	148	1119	1434	1405	1427
4	711	195	1955	2471	2480	2448
5	995	240	3010	3765	3750	3719
6	1305	284	4285	5306	5240	5235
7	1650	329	5780	7101	7030	6989
7.5	1827	351	6610	8086	8060	7955
5 metre plate, draught=150 mm., $b=0.062$.						
1	127	75	192	244	244	263
2	359	143	736	952	995	966
3	659	210	1620	2069	2105	2065
4	1015	276	2835	3574	3565	3543
5	1420	340	4370	5450	5390	5383
6	1865	403	6215	7577	7560	7577
7	2350	466	8380	10204	10250	10119
7.5	2606	497	9590	11699	11850	11514
5 metre plate, draught=250 mm., $b=0.102$.						
1	203	118	314	399	400	423
2	574	227	1203	1550	1570	1564
3	1053	332	2641	3362	3330	3344
4	1623	435	4620	5808	5730	5735
5	2268	537	7110	8841	8700	8715
6	2981	637	10140	12484	12340	12267
7	3758	736	13880	16702	16630	16378
7.5	4165	785	15650	19030	18980	18652

These figures show that the resistances calculated by the equation (38) are in better agreement with the measured ones than those determined by Dr. Gebers' formula. It should be noticed that Dr. Gebers' formula has a general tendency of effecting higher

resistances for low speeds and lower resistances for high speeds as compared with the measured ones.

ON THE ESTIMATION OF THE SKIN FRICTION RESISTANCES OF SHIPS.

(1) Extension of the formula to high speeds and large lengths. Comparison of Froude's, Gebers', and new formulae.

In estimating the effective horse power of ships by model experiments, we have to calculate the skin friction resistances of models as well as full sized ships. These calculations are effected almost universally by well known R.E.Froude's formula. Recently, Dr. F.Gebers proposed his own method of estimating the resistance. These formulae as well as the newly established one are based on plate experiments and consequently, they are in close agreement for the speeds and dimensions covering the range of the experiments. However, in applying these formulae to above mentioned purpose, they should be extended far beyond the limits of speed and dimension used in actual experiments. For these high speeds and large dimensions, there are considerable differences between these formulae as shown in the following table, which shows frictional resistances, estimated by the formulae, of plates having the same varnished surface and similar forms with those used by Dr. Gebers in his "similar plate experiments".

Table 14.

length in metres.	Resistance in kg.			Resistance in kg.		
	new formula	Froude's formula	Gebers' formula	new formula	Froude's formula	Gebers' formula
speed 2 m/sec.				speed 4 m/sec.		
2.5	0.400	0.429	0.414	1.547	1.521	1.518
5	1.529	1.590	1.518	5.709	5.525	5.533
10	5.569	5.743	5.568	20.58	20.36	20.42
50	124.3	130.7	113.8	432.5	462.9	417.5
100	489.5	513.9	417.5	1824	1821	1532
150	1084	1143	893	4076	4043	3275

200	1923	2011	1532	7246	7125	5618
250	3002	3113	2327	11307	11030	8536
300	4322	4446	3276	16340	15755	12015
speed 7 m/sec.				speed 10 m/sec.		
2.5	4.486	4.229	4.335	8.601	8.108	8.460
5	16.413	15.34	15.90	32.147	29.415	31.030
10	59.10	56.54	58.32	115.89	108.4	113.8
50	1342	1285	1192	2650	2465	2327
100	5347	5056	4373	10590	9694	8536
150	11912	11240	9354	23628	21550	18260
200	21215	19783	16040	42117	37930	31310
250	33215	30322	24380	65986	58710	47570
300	47924	43750	34310	95250	83870	66970
speed 15 m/sec.				speed 20 m/sec.		
2.5	18.900	17.000	18.025	33	29	31
5	69.053	61.65	66.37	119	104	114
10	249.5	227.2	243.5	431	384	418
50	5754	5165	4977	9983	8732	8537
100	23067	20320	18260	37405	34350	31310
150	52689	45170	39050	89669	76355	66970
200	91940	79500	66965	160077	134400	114900
250	144118	123050	101750	251026	208050	174500
300	208147	175800	143230	362652	297200	245000
speed 25 m/sec.						
2.5	49	43	47			
5	181	157	173			
10	658	577	634			
50	15318	13120	12970			
100	61608	51610	47580			
150	137816	114750	101750			
200	246195	201950	174500			
250	386120	312600	265200			
300	557902	446500	373300			

It will be noticed that the new formula gives smaller resistances for low speeds and greater resistances for high speeds as compared with Froude's formula.

In fig. 7, the resistances of 5 metre plate are plotted on the base of speeds. The new formula effects resistances higher than those determined by the others, except for very low speeds. It should be noticed that this tendency is already distinct within

the range of experiments and Froude's as well as Gebers' resistances are less than the measured ones.

Fig. 8 shows the resistances at the speed 4 m/sec. on the base of lengths. The resistances estimated by the new formula are in good agreement with Froude's resistances, especially within the range of his coefficient "O", while Gebers' formula gives much smaller resistances.

Fig. 9 shows the resistances of 150 metre plate on the base of speeds. Comparing this with Fig. 7, it can be noticed that Froude's and Gebers' curves interchange their positions. For speeds up to, say, 6 m/sec., the new formula practically coincides with Froude's formula. In this connection, it should be noticed that Froude's coefficient "O" is made up of two independent parts, viz., the coefficient for models and that for ships, latter part being determined taking into consideration the results of the famous "Greyhound Experiment".

From these comparison, we may conclude that

- (a) The new formula is in moderate agreement with Froude's formula when they are applied to small vessels of low speed such as those common in his age.
- (b) However, for large vessels of high speeds, a considerable difference appears between these formulae.
- (c) Gebers' formula differs entirely from the new as well as Froude's formula.
- (2) On the resistance due to longitudinal edges.

In estimating the frictional resistance of ships, the peripheral ratio b may be determined by

$$b = \frac{\text{wetted surface area}}{\text{length of vessel}} \dots\dots\dots(40)$$

In the case of plates, " b " should be increased either by 0.005 or by 0.0025, in order to represent the effect of longitudinal edges in calculation. The increment 0.005 corresponds to the resistance due to viscosity increased by longitudinal edges, while the increment 0.0025 corresponds to that due to roughness. However, on the surface of ordinary ships or their models, there are no longitudinal edges creating eddying motion of water. Consequently, in my opinion, the increment 0.0025 needs

not be added to the actual value of " b ", except certain special cases such as the case of bar keel, etc. On the other hand, the increment 0.005 should be always added to " b " because, even in this case, the resistance due to viscosity will be increased in order to maintain the continuity of the wake current around the ship.

(3) On Froude's idea of separating wave-making and frictional resistances.

In estimating the resistance of ships from the results of model experiments, we use W. Froude's idea of separating the wave-making and frictional resistances, transferring only the first one from the model to actual ship, but calculating the other for both. There are many factors of uncertainty in R. E. Froude's formula for frictional resistances which are the principal reason of the discrepancies pointed out by Mr. G. S. Baker (Measured mile trials and other ship propulsion data, March 2nd. 1923) between the results of model experiments and those of trials of full size ships.

If it be allowed that the new formula gives correct resistances of plates for high speeds and large dimensions, there is still one unknown factor which may lead to the discrepancy of more or less extent. That is the lack of our knowledge on applying the formula to curved surfaces of ships. For rather slow, full merchant vessels, the larger part of the resistance—I presume 80 %, or more in some cases—consists of the frictional resistances, so that any error in the calculation of the latter will cause a serious effect on the estimation of the total resistance of ships. It is quite obvious that the estimation of the power would be more accurate were it possible to diminish the part to be estimated by mere calculation and correspondingly increase the residual part which can be determined by the model experiments.

The new formula consists of three terms. The first and the third term is respectively governed by Reynold's and Froude's law of comparison, but we can not apply either of the laws to the middle term. Consequently, it is the first and second terms that should be estimated by calculations in model experiments and the resistance due to roughness may be transferred from the model to actual ship, treating it as a part of the residual resistance. Thus, as far as the third term concerns, we can avoid the error arising from the uncertainty of applying the formula to curved surfaces of ships.

It should be noticed that the resistance represented by the third term is the main part of the skin friction resistance, amounting from 75 to 98 % of the latter.

(4) Necessity of further researches.

In applying this method, the surface of models should be similar in roughness to that of actual ships, or, in other words, their coefficients of roughness should be the same. In actual experiments, it is not difficult to use the model of fixed length for various sizes of ships and, on the other hand, the coefficient of roughness of the surface of ships can be assumed as constant (see Table 12). Unfortunately, owing to the insufficiency of experimental data, we can not determine coefficients of roughness of the surface practically used in shipbuilding. This must be a great hindrance to applying the new formula to practical calculations. However, if the coefficient be once determined for actual ship's surface, it will not be impossible to find the corresponding surface of the models.

The resistance represented by the first and the second terms of the equation (38) must be estimated by calculation. But it is beyond our knowledge how the expression shall be modified for the curved surface of ships.

Hence, there is, I think, an urgent necessity for shipbuilders to make further researches as to (1) the determination of the coefficient of roughness for various surfaces, as well as the rule governing their variation according to length of the surface and (2) the wake current around ship-formed solids.

In conclusion, I am well aware that this paper is by no means conclusive and there are still plenty rooms for future researches. I can only express the earnest hope that the near future will see further progress on this important problem of naval architecture.

VERSUCHE AUG. V. SAPH UND ERNEST H. SCHODER, TRANSACTIONS AM. SOC. CIVIL. ENG. 1903

MATERIAL; MESSINGROHR. FLÜSSIGKEIT: WASSER
 VERSUCH XVI: VERSUCHSTRECKE AB. $R=0,00136\text{ m}$, $L=2,830\text{ m}$
 VERSUCHSGRENZEN V_m BIS $2,88\text{ m/sek}$ t VON $3,4^\circ$ BIS 24° CELS

FIG. 1.

Teishin-sho no 3.

FIG. 2.

TEISHIN SHO TANK 124

FIG. 5

TEISHIN SHO TANK 187

Fig. 6.

TEISHINSHO TANX.
No 8

Fig 8

討 論

(横田成年君) 私は重光君の論文を大略見ましたが充分見る暇がなかつた。frictionの問題は却々六ヶ敷いものである、こう云ふ研究をされるのには色々異なつた方面から見るのが都合が好いと思ふ。茲に私の氣の付たことを申上たいのは、航空機の發達と共に Resistance の問題が重要な問題となつたが、夫れには Wave making resistance はなくて frictional resistance と eddy making resistance ばかりで、此二者は多くの人々が研究して居る、夫れも造船家のやる方法とは別の方法でやつて居ります、物理學者其他が造船の方でやるやり方を知らないで獨立でやつた、夫れは場合によつては非常に巧妙なものであつた、故に此様な問題は一つの方法に捕はれずに種々の方面から研究するのがよろしい、例へば獨乙の Prandtl, Fuhrmann, Blasius などのやつた方法は圖の様な船の進むとき廻りに渦卷の層が after end に行くに従て厚くなり、其外に於ては Potential motion が成立し船の甲板から水面を見て居るとある境から外は一様に動くが其境から内では Vortex が起り船と一緒に動いて行く、此 limiting layer の内外共に應用すべき function を定めたのである、外では Potential function 即ち Froude の Law of Comparison があてはまる。

のやつた方法は圖の様な船の進むとき廻りに渦卷の層が after end に行くに従て厚くなり、其外に於ては Potential motion が成立し船の甲板から水面を見て居るとある境から外は一様に動くが其境から内では Vortex が起り船と一緒に動いて行く、此 limiting

layer の内外共に應用すべき function を定めたのである、外では Potential function 即ち Froude の Law of Comparison があてはまる。

Pipe の内でも之れと同様の事がある、即ち左圖の如き層が出来て之が内壁について居る、どれだけの長さで、どれだけ厚くなるかは計算出来る。

Göttingen に居た Fuhrmann は航空船の模型に多數の穴を明け Normal Pressure を測り之れより Resultant pressure を出した、然し實際の resistance の方がずっと大きい、この差は Fuhrmann によれば frictional resistance である。Vortex の structure を研究

して調べる事が一つの良い方法であるかと思ふ、却々難しい問題であるから感想だけを御話した譯であります。

(川原五郎君) frictional resistance なる故 temperature の function がどこかに入つて来る、Roughness, Viscosity どちらかへ入ると思ふ夫れは如何。

(重光 簇君) temperature によりて變化するものは η と s とであるが s の變化は割合に少なく主として η の變化が大なる影響を及ぼす様に思はれる、Analysis に當りては temperature に依りて生ずる η の變化は皆考に入れてあります、序に申添へて置きますが Gebers の實驗は temperature が殆んど Constant になる様な時機を撰んで行つたのであります。

(山本武藏君) 横田先生より「レヂスタンス」に關する根本の考へ方に就て御話がありました、横田先生の云はれたやりかたと、重光君のやりかたとどちらがよいかと云ふことは先づをいて、 $C=1$ に取ると板のすぐ側の水の particle は板と共に動く云ふ事になります、然るに「ラフネス」の影響を調べる場合には「ヘッドレヂスタンス」の考へより計算して居られる様であります、左様であると $C=1$ でない事になる様ですが其邊の御説明を願ひます。

(重光 簇君) 最初は $C=1$ にならぬ豫定で出發したのでありますが、實驗の結果に合す點からは $C=1$ でもよいと云ふ結果を得ました、此の如き結果を得ましたけれども slip が全然ないとは考て居りませぬ eddy motion の爲めに direction of motion が非常に irregular で $\oplus$ も $\ominus$ もあり全體として $C=1$ 即ち slip が無いと同じ様な結果の Resistance due to Viscosity が出て来るのではないかと考ふる次第であります。

會長(山本開藏君) 外に御意見のある方も御座いませうが、却々六ヶ敷問題でありますから、後より書面で御意見の發表を御願ひすることに致しまして、例により拍手を以て重光君が斯の如き深き御研究の結果を御發表下されたことに對し御禮に代へたいと思ひます。

大正十二年十一月十一日造船協會講演會に於て發表せられたる

「摩擦抵抗ト相似則」ト題スル重光簇氏ノ 論文ニ對スル討論

○八 代 準君 先日重光君から此論文の前刷を御送り下さいまして、何か批評してくれとの御話があり、又山本會長からも討論をする様にとの御薦でありました、重光君の此重要な論文を、問題に最も關係の深い業務に従事して居ります私共が、討論なしに過すことは甚だ申譯のない次第でありますから、前刷で論文を熟讀し、又親しく御講演を伺つた上で、私の考へる所及經驗等を申し上げ、重光君の御教を乞ひたいと思つて居ります。實は此度の震災で研究機關も圖書參考類も一切を焼失しました私には、此様な難解の論文を討論しますのに参考にすべき種がないので閉口したのでありますが、只私の貧弱な記憶をたどつて次の様な事を伺つて見たいと思ふのであります。

私は重光君が此非常に困難な而し最も重要な問題を捕へて、巧に解析的の説明を與へられましたのに大に敬服して居るのであります、從來此問題を取扱つた人は澤山ありますが、實驗的に研究した人が常に逢着する困難は、表面の粗糙度と水の微粒の大きさとの關係を、各の場合に就て相似に保つことが困難なことであります、表面の方は例へば相似的に螺糸を切込んだりして代表せしめることが出来ますか、水の微粒の大きさを相似にすることが困難でありまして、此點で明確な實驗が仕にくいのであります。又解析的に論じます場合には問題が非常に複雑でありますから、多くの假定を許さなければ殆んど手がつけれんと云ふのが事實であります。そこで此問題の研究は單に抽象的の流體力學上の理論丈ではどうしてもいかなので、必ず實驗に依つて Reinforce された解析的方法を採らねばなりません、私の知つて居ります所では一九一三年獨乙の造船協會で Gumbel 教授の發表しました Das Problem des Oberflächenwiderstandes と云ふ論文は此法によつた最近のものでありまして、當時利用し得る實驗成績は Froude 氏の歴史的の實驗及一九〇五年の Gebers 博士の實驗丈でありました、め、同教授は Froude 氏の實驗成績で解析的公式の定數を定めることを提唱し、重光君の御考と同様に摩擦抵抗を水の粘性による部分と表面の粗糙度に依る部分とに分けて考へて居ります。其後一九一九年の秋に Gebers 博士が相似板を用ひて一層正確な實驗を行ひ其成績を發表されました

から、重光君は此成績に依つて自分の御考へになつた解析的公式の定數を定められたのでありまして、之れは勿論 Gumbel 教授のものより進歩したものであると思はれます、そして表面の粗糙度と水の微粒の大きさの相似關係を巧に實驗的係數を以て覆ふことにされましたから、重光君の論法を以てすれば Gebers 博士の行つた様な實驗を、鋼板に船底塗料を塗つた相似板でやり、其成績から今一度實驗的定數を計算し直せば、之れで實船の摩擦抵抗を計算することが出来ると思ふことになります。而し私は此問題の研究者が異口同音に云ふ様に、又重光君も恐らく其考で居られると思ひますが、二三の大仕掛の實驗を行つて、公式による甚しい Extrapolation を證査して見なければ、どれが最もよく實船にあてはまるか安心ならないのであります。

次に此論文中に考へられました二三の點に就て私の考て居ることを申述べ、御教を乞ひたいのであります、之等は元より論文の主體ではなく枝葉に屬する部分であります、**第一**に管の中を水が流れる場合の摩擦現象と、靜水中を平板が走る場合の摩擦現象との Analogy でありますが、私は之れは大分異つた現象と考へなければならんと思つて居ります、管の場合には之れを流體力學的に考へましても水が動いて居つて既に運動慣性を持つて居りますし、又實驗的に考へましても齊流 (Steady flow) を作りますのが困難であります、此外に水が擾流 (Turbulent flow) となりますと管の大きさによつては渦流の相互關涉が起りまして、無限に廣い靜水中を平板が走る場合と大分異つた現象になりはしないかと思ひます。**第二**に重光君は板の長さの方向にある縁のために抵抗が増加するのを主として粘性の變化である様に説明して居られると思ひますが、私は前述の管の場合の様に縁の角の所で渦流の相互關涉が起るためではないかと思ひます、通風筒内の氣流を計ります場合に、圓筒なれば Pitot Tube でよく計測が出来ますが角形筒ですと其角の所で計測も甚だ不安定で氣流の平均速度を見出すのが困難であります、此様な現象から考へまして私は縁の抵抗の主因がやはり渦流の相互關涉にあるのではないかと思ふのであります。約二年前から私共は海軍の試験水槽で系統的模型船に就て水深の變化に對する抵抗の變化を實驗致しまして本年の夏其實験を完了しました、水槽中の假底を取去ります前に此實驗の補助研究としまして船體の摩擦抵抗が淺水に於ては如何に變化するかを知りたいために、模型船と同じ長さで同じ幅の薄い平板を適當に Ballast しまして、板の表面を水面と平行に且水面以下十分の深さに置き、水槽の假底を種々の深さに變へ、其水中を種々の速度で試験しました、之れは勿論水深が甚だ淺くなると水底と平板との間に渦流の相互關涉が起つて摩擦抵抗が變化するであろうと考へたからで

ありまして、此實驗成績が出て居りますれば此點の御參考に多少なるだろうと思ひますが、遺憾乍ら實驗途中で震害を受けまして全部焼失しましたため其一般的傾向さへも申上ることが出来ないのは誠に残念であります。**第三**に重光君の得られました結果を Froude 氏、Gebbers 博士の結果に比較しますと、一般に低速に於ては重光君の式は抵抗が小さく、高速に於ては大きく出ると云ふことでありますが、私は此點で重光君の結果を Support する二三の經驗を持つて居ります、それは魚形水雷の水中抵抗を計測します時に、高速を得たいために長さ約四呎の模型を作つて實驗しましたが、低速に於ける全抵抗が Froude 氏の法によつて計算した摩擦抵抗より小さいと云ふ珍現象を生じまして弱つた事があります、實驗及計算は念のため繰返して見ましたがやはり同じでありました、之れは模型が小さく速度が低いため水が層流狀態 (Laminar flow) にあつてまだ擾流狀態にならないためであらうと思はれますが、重光君の結果によりますと少くとも都合のよい方に向ふことになります。**第四**に私は船が走る時一般に其船首より甚だ少しの間は水が層流狀態にあつて、それから追々と擾流狀態になり、船尾に向ふに従て擾流層の厚さを増す様に思ひますが、此擾流狀態の部分に於ても水の粘性による抗抵が、層流狀態の所と同様に作用するかどうか疑問ではないかと考へるのであります、換言すれば (38) の式の第一項は表面の全長に涉つて積分した粘性抵抗であります、之れを限界速度以上に於ても其儘用ひてよいかどうかと云ふ點であります、**第五**に板又は船の速度と Wake Current の平均速度との比を e の或乗幂で表すことは、非常に薄い板の場合には差支ない様に思ひますが、船の様な立體表面の場合には左様簡單には行かないのではないと思はれます、此點は G. S. Baker 氏 (一九一三年英國造船協會々報第二卷三七頁) 及 T. H. Havelock 教授 (一九二〇年英國造船協會々報一七九頁) も左様考へて居られる様であります、之れは平板の實驗成績から實船の場合を計算するのに尙一層の研究を要する點ではないかと思はれます、**第六**に表面の粗糙度による抵抗の解析を單板の抵抗に關する V^2 Law から發足することではありますが、近年航空機研究の方で Superposed plane の抵抗研究が追々と出來ます所を見ますと、結果が甚だ複雑であります、表面の粗糙度の如きは寧ろ片盲の Superposed multi plane とも云ふべき一層込入つたものに假定しなければなりません、 V と L の乗幂にある n を以て其複雑な關係を覆へるであらうかと危く思ふ次第であります、私には別に名案もないのであります。以上述べました様な點に就て重光君の御考を御示し下さらば甚だ幸と存じます。

さて此問題に關する研究も遅々としては居りますが逐年進歩して來ます、之れを學術

的に考へますと其進歩の止る所なきは甚だ結構な事ではありますが、之れを實際問題として船の設計實驗等に使ひます場合には、其計算の基礎をあまり屢變更することは、比較研究及成績の綜合歸納等のために好ましくありません、何か非常の不都合のない限り又は非常の更新のない限は始めに採用した一定の基礎によつて計算を繼けて行くことが甚だ必要であります、従て最初に基礎を定めることが甚だ重大でありまして慎重に考へねばなりません、特に試験水槽の事業の如きは此點に最も深い關係がありまして、我國に於ても二三其設立を見んとします際に、重光君が此重要な御研究を發表されました事は吾々の大に感謝するところであります、今日世界には二十數ヶ所の試験水槽がありまして夫々の研究實驗成績を種々な形で發表して居ります、其ため之等の成績を利用せんとする造船家は彼此の比較研究に困難を感ずるから、之等成績の表現法を各國聯合して一定にしてはどうかと云ふ意見を去年の十二月に E. V. Telfer 氏が The North East Coast Institution of Engineers and Shipbuilders で發表しましたが、此論文に對して世界各國から討論が集りまして非常な議論になつた様であります、兎に角各國共に其必要を感じて居るのが實狀であらうと思はれます、私は勿論 Telfer 氏の主意は結構な事であると思ひますが、成績表現法を一定する前に、各の試験水槽の成績を計測し計算する基礎を互に比較し得る様にし、出來得れば或一定の基礎に依て行ふこととし、而して後に其成績表現法を一定にする必要があらうと思ふのであります、例へば摩擦抵抗の修正、基本模型による動力計の修正、水温に對する修正、Current の修正、船體附屬物に關する問題等が個々別々であれば成績の表現法丈を一定にしても、彼此成績の比較にはまだ不確實の點があるのであります、私は早晚之等の問題が各國造船家の間の問題となつて、各國聯合で研究決定せらるべきものであらうと考へます、現に航空機の方では其歴史が比較的新しいにも關らず、之等の點の一部分が各國聯合で既に實行されて居るのであります、それで私は重光君の此論文を拜見しました此機會に於て造船協會に對し一つの希望を述べることを許されたいと思ひます、此様な問題の決定は個人とか一官廳一會社とかがなし得べき性質のものではありませんから、本協會の如き學術研究團體が其會員中の權威ある學者に御願して委員會の様なものを設けられ、其研究決定せられた所を試験水槽當事者が務めて實行する様にしたならば、會員一同が便利を感ずるであらうと思ひます、又將來各國聯合の會議でも開かれる様な事があれば、之れに對する日本の造船學術界の意見を定める下調査ともなうと考へます故に、此點を希望として申述べる次第であります。

八代準君の御討論に對して

○重 光 簇君 本論文に對して八代準君より此く詳細なる御批評を辱ふしたと云ふことは私の最も光榮と爲す所であります。申す迄もなきことではありますが同君は過去十數年來帝國海軍艦型試驗所の實務を擔任せられ大小の研究皆同君の關與せられざるはなき實情でありますからして此の如き權威者の御批評を得たことは之れを本論文の貧弱なる内容に對比致しまして誠に 望外の 幸福とし謹みて御禮を申上ぐる次第であります。實は私自身に於きまして此の如き問題に對し何等の經驗ある次第にてもなく又之に關する調査も此の頃始めましたる有様で深き智識ある次第では無論無いのであります。然るに私は幸か不幸か將來此の最も困難なる船型試驗の事務に關係すべく運命づけられました、此の事業には少からざる費用を消費しますると同時に之が所期の効果を擧げ得ると否とは直接又は間接に吾造船及海運業の消長に至大の影響を及ぼす次第でありますからして私は本事業關係者の一員として其の責任の重大なるを感じ日夜如何にして其の任務を全ふせむかに苦心して居る次第であります。茲に於て私の考へ付ましたることは未熟なる私が如何に獨り苦心致しましても自分の考の正否さへも判斷することは出来ない有様であるからして今は自己の利害を考慮して居る場合ではあるまい或は自己の無識を笑種に供することもありませうが苟も自分の考へた事柄は大膽に之を發表し之を機會として幾多先輩諸士の豊富なる經驗に基く御批評及御教示を仰ぐことを得たならば自己の任務を全ふる上に於て最も確實なる方法ではなからうか、換言すれば本論文を發表しましたことも實は何所迄も利己的の考で之を見て戴かうと云ふ考へよりも之を動機として高教を得度いと云ふ希望の方が主たる目的であつたのであります。從て八代君の御批評に對し愚見を述べる實力さへも無いのであります。講演の際には時間に制限を受け極めて大體のみを申述べたる次第であり又前以て講演材料として差出しましたるものは震災の直後に認めたもので當時前刷の作成不可能であつたのみならず混雜の中に於て數冊の寫を作ることも意の如くならず、止むを得ず英文にて自ら「タイプ」に附した次第で筆の回らぬ爲に意を盡さなかつた部分あるのみならず實は Typewriter に使用する洋紙さへも入手し兼ね従つて簡單を旨として記述致しました、依りて八代君の御批評を幸とし此かる部分の補遺として愚考を申述ぶることと致度いと思ふのであります。

八代君が私の論文に對する總評として前段に御述になつた事柄の内「表面の粗糙度は

之に相似的に螺糸を切込んだりして相似關係を保たせることが出来るとの意味がある様に思はれますが此の如き方法に依り實現し得る有限的寸法の相似關係が本問題を考慮する上に於て重要な事項の一つたると同時に私は一層微細なる極小的寸法の相似關係を保つことが船型試験上非常に大切なことであらうと思ひます、水の微粒は如何なる程度の寸法であるか知りませぬが之に對比し得べき微細なる凹凸も粗糙度に影響するものではなからうか、此の點は御引用になつた Prof. Gumbel の論文にも論せられて居り又我田引水かは知りませぬが事實の之を Support するものもある様に思はれます、即ち板又は船舶の抵抗は其の表面を水中に放置し置きたる時間に依り大に變化するもので目に見わる様な有限的寸法の fouling が生ずれば抵抗は勿論増加するが之を生ずる以前に於て表面には少しも變化なく “The surface seems exceedingly smooth and even slippery” の場合に於ても抵抗は著しく増加するものであつて McEntee 氏の Washington Tank に於ける板の實驗にては日日 $1\frac{1}{2}\%$ 宛又 Sir Archibold Denny 氏の實際船舶試運轉の結果に依れば三箇月間日々 $\frac{1}{2}\%$ 宛摩擦抵抗を増加したる事實がある。而して D. W. Taylor 氏は「米國海軍の經驗も亦此の事實を裏書す」と發表して居る、表面は人目にて差異を識別し得ざる状態に在るに拘らず此の如き摩擦抵抗の變化を生ずると云ふ事實は該抵抗が極小的寸法の粗糙度に關係を有すと見て初めて説明し得るのではなからうかと思ふのであります、然らば水の微粒の大きさは變化せざるものとして表面が如何なる状態に在らば之を相互に相似なりと稱し得るかと思ふ問題を生じます、之に對して私は同一の粗糙係數を有する表面が即ち相似なる表面であると考へて居るのであつて船型試験に於ては模型が表面と實際船舶の表面とを相似ならしむることが極めて大切であり少くとも此くすることが非常に便宜ではなからうかと考へて居ります、此かる方針に進まむとする場合に直ちに不都合を感じるのは實際船舶の表面に對する粗糙係數が今日の所全然判明して居ないことであります。此の點は何等かの方法に依り研究せなければならぬ事柄ではなからうか、之を研究するには Gebbers 博士の行つた様な實驗を鋼板に船底塗料を塗つた相似板でやるのも勿論一方法でありましょう又大仕掛の實驗を行ふことも無論望ましいことである、此の如く何等かの方法に依り實際船舶の表面に對する粗糙係數を定め得たとしても之れを以て満足することは出来ないのであつて次で起る問題は之に相似なる模型の表面を定めると云ふことであります、或は今日廣く使用せられて居る模型面では相似にならない結果となるかも知れませぬが此の方は小規模の實驗でやれると思ひます。

次に八代君が私の論文に對する御批評の各論の第五に御述になつた事柄即ち「Wake current は船舶の場合に於ては板の場合に於けるが如く簡單には行くまい平板の實驗成績から實船の場合を計算するのに尙一層の研究を要する」と云ふ御説は一々御尤で全然同感であります又論文中に於ても之を板の場合と同一に取扱ひて可なりとは述べなかつた様に記憶して居ります、船舶の場合に於ける Wake current が非常に面倒なるものであると云ふことは御引用になりました二氏の論文の外 Prof. E. M. Bragg 實驗結果 (Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers 1922) を見ましても明瞭でありまして今一層此の點を研究し之が爲に生ずる抵抗の近似的の値にても計算し得る様にするに云ふことは推進器關係の議論を別と致しましても模型試驗上最も重要な事柄と考へます。何故かなれば此の部分は如何にするも Froude 氏相似則に合ひさうに無いからであります、要するに板の實驗結果を船舶に適用するには尙幾多の研究を要する事項がありましよう、之を如何にすれば宜しきやと云ふことは今日では残念乍ら No one can tell と云ふのが實情では無からうか、然らば此の問題は將來の解決を待つことと致しまして止むことを得ないから從來行はれ來た様に板の實驗結果から不完全乍ら船舶の場合を推測することとし此くする上に於ても出來得る限り此の不明の事項の爲に生ずる誤差を小ならしめむとするのが本論文の趣旨でありまして此の意味に於て若し實際船舶の表面に相似なる表面を有する模型を使用したならば從來計算に依り定めて居つた摩擦抵抗の大部分は模型試驗から實船へ直接に相似則で移すことを得從ひて板から船舶へ移す間に存在する吾人の智識の缺陷から免れ得るのでは無からうか而して残れる部分即ち Wake current に關係する部分は之は將來の研究に待たなければならないと思ふ次第であります。

更に板の抵抗を示す算式又は之より船舶の抵抗を推測する方法につきまして大規模の實驗の必要である事は申す迄もない事でありまして G. S. Baker 氏は最近其の必要を力説して居ります、多分近き將來此の實驗は何等かの方法で實現せられ此問題に對する世界の Leader-ship は依然として英國の掌握する所となるのでは無いかと残念に考へて居ります、吾國に於ても此如き重大なる而かも實際的利益に直接の關係を有する問題に對し進で大規模の決定的實驗を行ひ得るの機運に際會せむ事を切望する次第であります。

扱て八代君の御批評中各論第一に擧げられました「管の中を水が流れる場合の摩擦現象と靜水中を平板が走る場合の摩擦現象とは大分異なつたものと思へなければならぬ」どの御意見には或る程度迄同感でありまして簡單に考へて見ましても管の中の水の速度

を零から次第に増加すると致しますれば低速の場合に於ては管壁に接する第一層の水は静止して居るに反し第二層の水は或る速度を持つて居る、此の場合に兩層間に作用する力は水の平均速度に依り變化するものであるが之が第一層の水と管壁との間に作用し得る最大の力（粘着力とでも申しましょうか）を超えなければ stationary flow が起る、反之板の場合に於ては水は絶ず change of momentum を生ずるものであるからして stationary flow は起し得ない、加之第一層の水が板と共に運動する爲には粘着力は第一、第二層間に作用する力と第一層の水に change of momentum を生ぜしむる力との和以上でなければならないからして Steady flow を作ると云ふことは板の場合に於ては管の場合に於けるが如く容易ではない、論文中 (9) 及 (13) の式は共に steady flow の場合に於ける速度を示すのでありますが (13) 式は stationary motion を考へて定めたのであるからして一度 Turbulent flow となりますれば此の式は全然適用が出来ない、然らば Turbulent flow となつたとき如何様になるかと申せば御意見の通り「管の大きさに依りて渦流の相互關涉」も起りましょう、然し此は問題外でありまして Turbulent flow の場合をも管と板とを全然 Analogous に取扱はんと考へたのではありませぬ翻て板の場合を考へて見ますと (9) 式は change of momentum を考慮の上決定したのであるからして steady flow の場合に (11) 式が第一及第二層間に作用する力を示すと考へたのに反し若し Turbulent layer の外層と之に接して steady motion を爲して居る層との間の力を示すものと考ふるならば此の式は steady flow を爲して居る部分即ち私の了解しました所に依れば横田博士の御述になつた potential を有する部分に對しては適用し得るであらう、但し Constant c を壹として可なるや否やは問題であると思へました、依りて Prof. Gumbel が壹としてあつたのを特に c と書き直して置いたのであります然るに實驗結果に對照して見ますと c を壹として差支なしと云ふ結果を得た、此は山本博士の御質問に對して述べたる通り必ずしも説明の出来ないことはなかろうと考へて居ります、従つて八代君が各論第四に述べられました點に付ては「(38)式の第一項は表面の全長に涉つて積分した粘性抵抗であります之を限界速度以上に於ても其儘使用し」差支はあるまいと思はれるのであります。

次に各論第二に御述になつた縦縁抵抗の原因につきましては實は私の意見も八代君の御意見も同様でありまして問題は私の記述の致し方が宜しくなかつたのと説明が不充分であつた爲に生じたことと思はれます、元來 Gebbers 博士は氏の解析方法の當然の結果として縦縁抵抗の全部を水の粘性を以て説明して居りますが私は此の如く粘性に起因す

る部分もあるは勿論であるが更に他方に於て八代君の主張せらるる様に板の縦縁の爲に渦流を生ずることに起因する部分もあると考へて居ります。即ち縦縁抵抗は此の二種の原因に依りて生ずる抵抗の和であつて何れか一方のみではあるまいと思ひます、然らば何れが其の主要部分であるかと申せば一般には渦流に起因する方が主たる部分であると考へます、然し乍ら縦縁抵抗の影響を式に表はす爲 b を増加すべき分量即ち粘性抵抗に對しては $b_1 = b + 0.005$ と爲し粗糙抵抗に對しては $b_2 = b + 0.0025$ と爲したる此の 0.005 及 0.0025 なる數の値から申せば粘性に起因する部分が勢力を占むることになる、此の點の説明が不充分であつたことと思ひます、上記の數の値は此様でありますが今假りに所謂摩擦抵抗は 80% の粗糙抵抗と 20% の粘性抵抗から成立するものと假定しますれば渦流に起因する縦縁抵抗は全摩擦抵抗の 0.2% となりますが粘性に起因するものは 0.1% となるのであります。

各論第三として八代君は過去に於ける御經驗から私の論文に好都合なる材料を御提示下さいました、假りに此の材料が反對のものでありまして其が豊富なる御經驗の結晶である以上之を御示し下さる御厚意に對しては厚く御禮を申すのであります。而かも此の場合從來の算式よりも私の算式の方が事實に近き傾向を持て居るとの御意見は特に悦ばしく考へます次第であります、此の點に關して一言致し度いのは船や魚形水雷等の縦縁を有せざるものに付ては $b_2 = b + 0.0025$ とせずして b の儘と爲すのが適當であらうと云ふ私の考が當つて居りますならば此の如きものの摩擦抵抗は板につき計算したるものよりは稍少くなることを御注意願ひのであります。例へば第九圖に掲げました通り長 150m の板の速度 10m per sec. に於ける摩擦抵抗は 23628 Kg. 此の内第一項 1028 第二項 20 第三項 22620 でありますからして上記の如く $b_2 = b$ と致しますれば摩擦抵抗は 23087 Kg. となるのであります。然しながら御示になつた長さ約四呎の模型を低速にて實驗された場合の抵抗は其の全部又は大部分が粘性抵抗でありますからして上記の 0.0025 の有無に依りて生ずる差は極小でありましようが御示になつた事實を他の方面から考へて見ますれば此の如き場合の粘性抵抗は板の實驗に依り定めたる新算式で之を定めても大なる差異は生せないと云ふことを示す様にも考へられるのであります。

各論第六に掲げられた事項即ち粗糙抵抗を單板の抵抗に關する V^2 Law に結び付けたることの正否に關しましては別に信ずる所があつて此く致しました次第ではなく Prof. Gümbel も此の Idea を持つて居り其の他水力學の書籍等にも同様の意見が散見致して居りますので單に之に従つたのに過ぎませぬ n を入れたのは私の發意であります。が過

去に於て上記の Idea を説きたる人は皆問題を qualitative に取扱ふて居りますのに反し私の行はんとする所は quantitative analysis であるからして所謂 V^2 Law を實驗結果にて check し n を得たに過ぎませぬ、然し乍ら Dr. Gebers の實驗結果から見ますれば此の如き解析方法が大なる誤謬ではなかつたことを示して居るのではなかろうかと思ふのであります。

以上を以て八代君の御批評を給はりました諸點に關しては講演の不備を補ひました考へでありますが未曾有の震災の結果とは云ひ乍ら同君が多年御研究の結果に得られた諸材料を失はれたる爲尙ほ進みて高教を受くることを得なかつたのは私の深く残念とする所であります。

最後に八代君が造船協會に對する希望として述べられたる最も重要な御發案に對して一言致し度いと考へます、即ち船型試験の根本に横はる諸種の問題を出來得る限り合理的に解決し各試験所の研究結果を Comparable にすると云ふことが目下緊要の事項であるからして此の根本問題を解決する爲に造船協會に一委員會を設け衆智を集めて之に當らうではないかと云ふ御提案は私の雙手を舉げて賛成し切に其の實現を希ふ所であります、特に此の問題に對し新參者たる私にとつては此の御提案は天の福音とも感ぜらるゝ次第であつて若し之が實現を見ましたならば之のみを以てしても貧弱なる論文を發表致しました私の目的は達せらるる次第であります、此の如くして確實なる實驗と理論とに依り一步一步根底を築いて進むと云ふことは之は決して船型試験關係者に便利なるのみではない吾が造船及海運業の根底に培ふ最も有効なる方法の一つであると信じますからして當造船協會理事者に於ても篤と御考慮の上八代君の此の重要な御提案を實現せらるゝ様私より切に希望する次第であります。

○八 代 準君 段々と重光君の御説を拜聴しまして、大に啓發するところがありました、誠に有難く厚く御禮申上ます。御説を伺ひまして益々流體の表面摩擦なるものが本質的には非常に六つヶ敷いもので、中々解析的に知ることは出來ないものであると云ふ感を深く致しました、そして若も私の拜聴の仕方が誤りでないとしたならば、重光君も次の様な重要な説で御説の實用上の困難を指摘して居られる様に了解致しました、即

(一)實船の表面の粗糙度を代表する様な模型の表面を作ることが甚だ困難であること。

(二) 薄い板の實驗から船體の様な立體的表面の摩擦抵抗を見出すのに困難があること。

(三) 單に長さ數十呎迄の板を實驗して得た成績に、解析的準度 (Analytical Criterion) をあてはめて實驗的諸係數を定めても、其解析的準度が表面摩擦現象に本質的に適確であるかどうか分らぬ故、其様にして得た公式は實驗の範圍に於ては事實を表すかも知れないが、其公式で數百呎の長さの摩擦抵抗を計算上で見出し、摩擦抵抗曲線を延長しても、其延長した先の方では何れの方法で延長したのが最もよく事實に近いものを表すか判斷がつかぬ、そして吾人の必要なのは數百呎の長さに対するものであるから尙進んで實船の様な長大な表面に就て實驗して、計算による甚しい延長部分の正否を證査して見なければならぬ。

と云ふ様な御意見であると思ひます、誠に御同感でありまして、吾々造船に關係あるものは常に此數百呎の長さある表面に就て此問題を實際に取扱ひつゝあるのでありますから、重光君の此重要なる御研究を一層完全にし且實用に供し得る様にするために、是非共大きな實際の船に就て實驗を行ひ證査を得て見たいものと思ふのであります。

尙重光君が御示し下さいました御説の二三の點に就て私見を申し上げまして私の討論を終りたいと思ひます。それは外觀上何等の變化のない様な表面でも、永い時間水中に置くと摩擦抵抗が變化すると云ふことは、御説の通り實船の防蕪塗料を施した表面、Schellack 塗料を塗つた表面、Paraffin 蠟の表面等に就ても夫々文献がありまして、後述の二表面に對しては私自身も經驗を持つて居ります、數日水に浸した模型船の表面は外觀上別に變化して居らなくとも極微なる粗糙度の變化があると見えます、それで之等の模型を再び試験しますには塗料を新しくしたり蠟の表面を Scrape して刷毛で磨き新しい表面と致します、そして兎に角表面がテラテラに光る位迄滑らかに致します、之れは左様に磨く方が一層實際の船の粗糙度に模型の表面を相似にすると云ふことになるかと考へられて居るのであります、即相似粗糙度の根底にやはり幾何學的相似と云ふ考が横はつて居るのであります、蠟製模型船を水中で實驗します時は一航走毎に船底を軟かい刷毛で一々掃除して實驗して居ります、此様にすることが模型の表面狀態を一定に保つと云ふ點から見て本質的によいのか悪いのか分りませんが、私は前記の文献にある様な事實を除く一手段として、之れ丈の注意を拂ふ方がよい様に思はれ且結果もよい様でありますから十數年以來實行して居るのであります。表面に螺糸を切つて粗糙度の相似關係を代表せしむる事は一例として申上げた迄で、勿論此の如き目に見わる程度の粗糙度

より遙に以下の極微的變化に對して摩擦抵抗は變化するものであらうと思はれます、而し粗糙度の相似と云ふ根底にはやはり幾何學的相似の考が横つて居るので、此極微的の表面變化と雖之れを水の微粒の大きさに比較しますれば Order の異つたものであると考へます、重光君もやはり其御考へで居られるのではないかと拜察致しました、それは (11) の式の c を一とすることに關し山本博士の御質問に對しなされました同君の御説明によりますと、水の微粒が粗糙面に勝手に衝突しながら、丁度 Kinetic Theory of Gas に於ける瓦斯の微粒の如き有様で、Quasi stational state を現出するから、 c を一としても水の微粒が表面に附着して居るものと考へるに及ばぬと説明され、水の層が表面に附着して居るなら Gebers 博士の様に全摩擦抵抗を Viscous Law で取扱つても差支なからうと云ふ考へを捨てられましたから、表面の粗糙度は如何に滑らかな外觀を持つて居つても水の微粒の大きさは Order の異つた大きさの凹凸と考へなければならぬと思はれます。

次に (38) の式の第一項の積分を零から L 迄することに就て重光君は船側船底の擾流層の外側に沿て積分するから差支ないとの御説明であります、同式の残りの項は擾流層の内側で積分するのでありますから、此場合に擾流層の水の Virtual Mass や Shearing を摩擦抵抗に對してどう云ふ風に取扱はれるのですか私には了解し難いのであります、私はやはり第一項積分の上限界を v_l (此 v も l も共に Current Figure で船の速度 v によつて l は變化するものと考へる) として層流狀態の部分丈に積分した方が實際に近くはないかと考へます、此 v_l の限界値に就て Gebers 博士等は $5 \text{ m}^2/\text{sec.}$ 位だらうと云ふて居られますが私は之れに關しては全く知識も經驗もありません。

魚雷の様な角のない表面に對しては b に關する訂正を必要としないと云ふ御教示は私の氣が付きませんでした所で誠に御説の通と思はれます有難く御禮申上ます。

Bemerkungen zu A. Shigemitsu: Skin friction resistance and law of comparison.

Dr. F. GEBERS.

I. Seite 1 "inexplicable points".

- 1.) Die Methode für den Wasserdurchfluß in Rohren auf die Oberflächenreibung der Platten anzuwenden, halte ich für verfrüht, aus Gründen, die später angegeben werden. Meine Methode beruht auf den Gesetzen der Aehnlichkeitsmechanik und ist also auch wohl begründet.
- 2.) 3.) und 4.) Die Rauigkeit einzuführen, hatte ich keine Veranlassung, da es sich zunächst um Flächen größter herstellbarer Glätte handelte; aber ich habe bereits in meinem Aufsatz in den "Mitteilungen des Technischen Versuchsamtes". Wien, IX. Jahrgang 1920, Heft 2-4, zum Schluß unter den Ueberschriften des weiteren Versuchsprogrammes genannt unter 1): "Das Aehnlichkeitsgesetz für rauhe Flächen und andere Flächenformen". Es war beabsichtigt, die Platten durch Aufheftung von Körperchen ähnlicher Größe in Bezug auf die Rauigkeit ähnlich zu machen und zu untersuchen. Vorläufig handelte es sich um glatte Flächen, bei denen die Rauigkeit, wie gesagt, nicht in Betracht kam.
- 5.) Das Bestreben meiner Formel, die für *turbulente Reibung* gelten sollte, für geringe Geschwindigkeiten etwa zu große, für hohe Geschwindigkeiten etwas zu niedrige Werte gegenüber den gemessenen zu geben, ist sehr wohl in der Versuchstechnik begründet. Bei geringen Geschwindigkeiten wird am Vorderende der Platte auf eine weite Strecke mehr oder weniger noch laminare Reibung, die geringer ist als turbulente, vorhanden sein. Man wird also zu kleine Gesamtwiderstände für turbulente Reibung messen. Bei den größeren Geschwindigkeiten aber werden leicht die gemessenen Werte zu groß, weil es unmöglich ist, die Platten ganz erschütterungsfrei während der Fahrt zu halten.

II. Seite 2. "On the wake current".

Die Messungen von Calvert und noch mehr die von Dr. Kempf sind nicht richtig, weil beide die statische Druckdifferenz bei der Messung mit den von ihnen angewendeten einfachen Pitotdüsen nicht ausschalteten.

Ich will hier etwas weiter ausholen:

Beim Schleppen eines Körpers an der Wasseroberfläche entsteht vom Bug zum Heck eine Umlaufbewegung des Wassers, hervorgerufen durch ein statisches Druckgefälle.

Fig. 1.

Wir können uns denken, daß wir am Bug eine Reihe von Quellen, am Heck eine Reihe von Sinken hätten, zwischen denen das Wasser (Fig. 1) überströmt. Da die Quellen und die Sinken sich gleichmäßig mit der Fahr- geschwindigkeit und in glei- cher Richtung fortbewegen, kommt es nicht zu einer Umlaufbewegung, die sich seitlich bis in die Unendlichkeit erstreckt, sondern dieser Rücklauf des Wassers wird schon bald, wie zahlreiche Messungen, die ich angestellt habe über die Größe der Umlaufbewegung seitlich von Schiffsmodellen, beweisen, unmeßbar. Infolge dessen ist

Fig. 2.

die Wasserbewegung, wie Fig. 2 zeigt, nahe an der Schiffswand infolge der Oberflächenreibung eine starke in der Richtung der Fahrt mitlaufende, aber schon sehr bald auf nur geringen Abstand eine der Fahrtrichtung infolge der Umlaufbewegung entgegen-

Die Wasserbewegung, wie Fig. 2 zeigt, nahe an der Schiffswand infolge der Oberflächenreibung eine starke in der Richtung der Fahrt mitlaufende, aber schon sehr bald auf nur geringen Abstand eine der Fahrtrichtung infolge der Umlaufbewegung entgegen-

gesetzte, die auf der Normalen fortschreitend allmählich auf Null abnimmt. Diese Umlaufbewegung, bedingt durch ein Spiegelgefälle, kann von einfachen Pitotdüsen nicht gemessen werden, da das statische Druckgefälle gleich dem hydrodynamischen Druck ist, aber Düsen, die die statische Druckmessung ausschalten wie die meinen, geben sofort das obige Bild.

Nun haben wir auch bei einer geschleppten Planke das gleiche Bild (Fig. 3),

Fig. 3.

selbst wenn diese unendlich dünn wird. Das mitgerissene Wasser bildet auch in gewisser Hinsicht einen Körper. Deshalb ist genau, wie die Gumbel'sche Meinung, auch die in der Gleichung

(1) wiedergegebene unrichtig, und wir können aus diesem Grunde auf keinen Fall so vorgehen, wie bei der Reibung in Rohren. Die Schwierigkeiten, diese Umlaufbewegung mit in einer Formel zu fassen, hat mich nach vielen Ueberlegungen, die man an die angegebene Tatsache anknüpfen kann und muß, von einer Formulierung des Wasserstromes seitlich einer geschleppten Fläche abgeschreckt.

Diese Umlaufbewegung aber muß sicherlich die Folge haben, daß die Reibung einer Oberfläche im unbegrenzten Wasser eine größere sein wird, als die Formeln für die Reibung im Rohr angeben.

Diese hier genannten Schwierigkeiten haben mich auch veranlaßt, nur die Gesetze der Aehnlichkeitsmechanik heranzuziehen.

In dieser Umlaufbewegung des Wassers, die für *begrenzt*es Wasser sich sehr ändert, und sich auch ändert mit der *Form* der Körper und der Geschwindigkeit, liegt die Hauptschwierigkeit für die Formulierung der Oberflächenreibung der Körper.

Es fehlt mir leider die Zeit, auf die weiteren geistreichen Ausführungen der so fleißigen und geschickten vorliegenden Arbeit des Herrn Shigemitsu einzugehen. Erwähnen möchte ich nur noch, daß Th. von Kármán in seiner neuesten Arbeit "Ueber laminare und turbulente Reibung" (Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Band 1, 1921) sagt: "*G e b e r s gelangt zu etwashöheren Exponenten. Ich vermute, dass beim Schleppen sehr langer Platten Erzitterungen nicht zu vermeiden sind, was den Widerstand rascher wachsen lässt*". Kármán geht auch von einem unrichtigen Bilde über die seitliche Wasserbewegung aus, weil er die Umlaufbewegung nicht gekannt hat. Es besteht also bei solcher Meinungsverschiedenheit der verschiedenen Bearbeiter des vorliegenden Problems einstweilen kein Grund für mich, meine Formel für glatte Platten einer Verbesserung zu unterziehen. Ueber den Einfluß ähnlicher Rauhigkeit hoffe ich, noch einen Beitrag später, wenn mir die Ausführung längst beabsichtigter Versuche möglich gewesen ist, zu liefern.

Aus den vorliegenden Ausführungen Shigemitsu's aber können wir viel lernen und beim Durchlesen seiner so klaren Ausführungen immer wieder helle Freude empfinden, daß wir ihm dankbar sein müssen für das, was er uns in der vorliegenden Arbeit zu sagen gewußt hat.

Wien, den 8. Februar 1924.

Gebers 博士の討論に對して

○重 光 簇君(三月廿五日) 先きに講演材料として記述したるものを維納試験所の F. Gebers 博士に送附し置きました所御多忙にも拘らず同博士から上掲の如き討論を得ましたことを謝します。

此の御討論に對して一言致しますに當り前以て御斷り致して置きたいのは私が論文を發表してから既に相當の時日を経過しました爲其の間に論文中に不備の點あることを發見致しました、即ち (11) 式及 (12) 式は正確なる理論を以てしては共に誤謬であると云ふことであります、正しき式を定めると云ふことは非常の難事であつて種々試みて居りますが今日の所未だ決定的の結果に達して居りませぬ、然し乍ら論文に記載した如き解析は Blasious 氏の式を使用しても又は別に比較的正確であらうと思はれる式を使用しても出来るのであつて此の如きは全體より見れば枝葉の問題であらうと思ふ、論文の根本觀念たる板の抵抗の主たる部分は表面に極小寸法の凹凸が無數に存在する爲に生ずるのであると云ふ點は變化するものではありません。

扱て第一に Gebers 博士は「實驗板は出來得る限り平滑なるものを使用したから此の如き平滑板に付ては Roughness と云ふことは考へなくても宜しい」と云ふて居られますが此の點が大なる問題であると思ふ Schellack の表面が平滑なりとは比較的の語であつて決して絶對的のものではない、此の如き表面を有する二個の Solids 間の摩擦に付て考へて見ても其の表面が Smooth であると云ふ結果にならないことは明瞭である、況んや其の表面と水の Small Particle 間の friction を論ずる場合に之を平滑なりと初めより假定することは非常な間違ではありますまいか。

第二には Analysis の方法であります、即ち博士は Blasious 氏の方法に従つたので若し Surface が全然 Smooth であれば之にて差支はなかろうと思ひますが此の場合に於ても實驗結果は理論的結論に一致しなければならない、理論的結論として今日迄知られて居るのは論文中の (12) 式でありますが之は Blasious 氏自身も實驗結果に一致しないことを認て居る (Über laminare und turbulente Reibung-v. Kärman; Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1921)更に Blasious 氏は管内の水流に就きて Empirical formula を作つて居る而して Kärman 氏は此の Empirical formula と Gebers' formula とを比較して Gebers 氏が上掲の討論中に記載せられた様な意見を述べて居ります、然

し乍ら後段に於て Kármán 氏は Blasious 氏の Emperical formula と雖 Extreme Case には事實に一致しないことを述べ結局 Relative Rauhigkeitgrad の觀念を採用する事を提案して居ります、氏の提案に従へば Roughness を示すものは $\frac{1}{L}$ の function でありますが此は私が論文にに記載した所と偶然に一致して居ります、然し乍ら氏は何所迄も Resistance を $(VL)^n$ の形で示さんとして居る、此の點は Prandtl, Blasious, Kármán 氏等の一致したる論法でありまして Gebers 博士の所謂 Aehnlichkeitsmechanik の法則であります、然し乍ら既に理論的結論が實際に一致しないことが明瞭であるならば吾々は宜しく其の原因に就て考察しなければならない、私は此の不一致の原因は Surface を smooth と爲したる假定に在るものと思ふ、若し表面に無數の凹凸が存在するならば其の寸法は極小であつても其の各個に對し所謂 Formwiderstand を生ずる、此の Formwiderstand は Weight を neglect し得る場合には $(VL)^2$ に比例するけれども然らざる場合には大體に於て Froude's law に従ふ別の形となる筈である、少くとも此く考へなければ Gebers 氏が Übigau Tank で行つた板の横實驗の結果は説明が出来ない。然らば Surface の Rough なる爲に生ずる此の如き Resistance を説明するに所謂 'A' hnlich-Keitsmechanik を離れて Froude の Law of comparison に依ることが寧ろ當然であらうと思ふ、此くして初めて板の實驗結果と R. E. Froude's formula とを連結することか出来るのである、Froude's formula は勿論絶對的に正しいものでは無いけれども Greyhound Experiment 及 plate experiment より定めた Emperical formula であるからして實驗の Cover して居る範圍に於ては大體の見當は間違ては居ないと見て差支あるまい、又實際に於ても殆んど總ての Experimental Tank で實際に使用せられて居り且つ無理をして使用しない限り Tank experiment の結果は實際に大體一致して居る様に思はれる、然るに若し所謂 'A' hnlichkeitsmechanik で推し通せば其の間に大分相違が生ずるのであります。

第三には Gebers' formerla で計算した結果が實驗の結果に low speed 及 high speed に於て一致しない點に關する Gebesr 博士の説明に關して一言し様と思ふ、博士は Gebers' formula は turbulente Reibung に對して適用せらるべきものであるからして laminar state に在ると思はるゝ low speed に對しては一致しないのは當然であると云はれて居る、私は Gebers' formula が turbulente Reibung に對して作られたものであると云ふ博士の主張と Surface を Smooth と斷定せられた博士の主張との間には不可解な點がある様に思ふ Turbulent flow となる原因は Surface が平滑でないからでは無いでしょうか、私は極少寸法の凸凹各個から vortex が生じて其が集合して turbulent flow となる

ものと思ふて居る、

更に low speed の場合には Laminar flow であるとのことではありますが Laminar flow とは果して何を指すのであるか、Pipe の場合に於ては water particle の速度が總て axial direction を有するときに laminar flow と云ふ様であります、若し然りとせば plate の場合には此の如く Water particle が foreand aft direction の velocity のみを有することは理論上不可能であると思はれる、即ち Plate の場合には如何なる low speed に於ても laminar state の flow は起らない様に思はれます。

high speed に對する Measured Resistance が式にて算定したるものより大なるは板の Vibration の爲であると云ふ説明は實驗上の事柄であるからして或は左様でありましょう、然し乍から Gebers 博士が表に掲げた Measured Resistance は high speed に對しては實際測定したる抵抗中の最低のものに依り定めたるものであると云ふことを注意するを要すると思ふ Measured Resistance は此の如く定めたものであるに拘らず上記の相違は算式が悪いのでなしに實驗結果が悪いと斷定するのは果して如何でありましょうか、實驗結果と算式との間に存する此の如き相違は一見些細なる事柄の如きも式を實際に使用する側から見れば極めて重大なる事柄で輕々しく斷定し去ることは出来ない様に考へます。

第四に論文中に掲げた (11) 式が誤謬であることを實際的方面より注意せられたることを深く謝します、水の speed が板より離れた箇處で Negative になると云ふ博士の實驗的斷定は私の特に悦ぶ事柄であつて理論的にも左様でなければならないことは、既に私の氣付きたる點であります。

終りに臨みて博士の御好意を謝し且つ博士が目下著手して居られる實驗結果に依り再び御高説を伺ひ得るの日を期待して居る次第であります。

○小野 正三君 此の間は先生の論文 Skin Friction Resistance and Law of Comparison を御送り下さいまして誠に難有拜見しました、唯私が只今は京都に參て居りますので十一日に先生から直接に種々教へて戴くことが出来なかつたのが残念で御座います。

拜見致しまして次の二三の事柄が少し解り兼ねました、何卒之に付て教へて戴けば結構で御座います。

(一)第一頁の Dr. Gebers' の解析に對する御批評の中で (2) と (5) と及第五頁の (1) から (5)迄に就て

表面の Roughness が此迄の實驗では Geometrically Similar になつて居なかつた、之を此度からは考に入れなければならないと説かれたのは誠に同感であります、唯先生が

説かるゝ様に Roughness が流體の粘性と獨立であるか又は左様考へて宜しいかが問題では無いでしょうか、勿論此の結論が如何あつても此の論文の結果にはたいした障りは無かろうと存じます、唯謂ねば枝葉のことを云ふ丈でありますが流體の速さが Critical な所を超せば其の分子（もつと細さい部分）が壁の面を滑て行くものか如何かが問題で Dr. Stanton 等は實驗的に随分調べて居る様であります、若し其等の實驗を信用するならば我々は流體の分子は何の場合でも壁の表面を滑るものでは無いとせねばなりませぬ。

此の Critical な移り變りの有様と上の Dr. Stanton の結果を一致させ様とする様に見るの Prof. Prandtl や Prof. Kármán の Grenzschichttheorie であつて Laminare Grenzschicht から turbulente Grenzschicht に移ることで之を説明し様と致して居ります Dr. Gebers も其の考で有るらしく今 dimensional theory で得た基本の式で R を總て流體の摩擦が原で起る抵抗とすれば

$$R = c \rho^{1-n} V^{2-n} L^{2-n} \mu^n$$

茲に c は或る單なる係數

ρ は流體の密度

V は速さ

L は寸注

μ は流體の摩擦係數

V は Kinematic viscosity

とすとすれば (1) は又

$$R = c \rho V^2 L^2 \left(\frac{VL}{\nu} \right)^{-n} \dots \dots \dots (1)$$

とも書けます、此所で n は indeterminate でありますから一般に

$$R = \rho V^2 L^2 \left\{ A_0 + A_1 \left(\frac{VL}{\nu} \right)^{n_1} + A_2 \left(\frac{VL}{\nu} \right)^{n_2} + \dots \dots \dots \right\} \dots \dots (2)$$

で表すことが出来ましょう、波の抵抗を除いた外の抵抗は總て (2) の一般の形で表されるものであり其の間に何も理論から見て誤は有るまいと存じます、例へば $A_0 = 0$, $A_2 = \dots \dots = 0$ と置き $n = -0.125$ と置けば Gebers の結果になり表面の状態で A_1 の値が影響されるものでありましょう、此の級數を一つの項を採ただけでは或る現象の説明が出来ないときは更に幾何でも採てよいので又 n の値も任意で其につれて夫れは解析をする人の自由でありますが得られた最後の答に就ては唯便利不便と丈云へるので正しい間違とは云へないと存じます。

(二) 第五頁の(七)

Eddy の抵抗が Froude の法則に従ふものでしょうか、Eddy と云ふものは其の最後の性質が如何に見え様と其は流體の粘性に依るもので有るから寧ろ前の (1) の形の法則に従ふべきもので正しい意味では Froude の法則とは關係はないと云た方が宜いので有りますまいか。

若し左様であれば{若し (1) の形の法則を採るならば}抵抗が V^{2-n} で變ると云ふことを採るなら従つて其は L^{2-n} に依つて變つて來なければなりません、従つて其からの解析は少しづつ形が變つて參る筈であります。

此丈のことに就て教を願へれば難有いと思ひます。

小野正三君の討論に對して

○重 光 簇君(三月廿五日) 私の貧弱なる論文に對して小野正三君より有益なる御批評を辱したことを謝します、實は私は本問題に付て廣く從來の論文を調査した次第ではありませぬ、特に航空關係の論文に至りては不充分であつたのであります。依りて此の方面に従事して居られる人々に其の方面の御經驗から批評して戴きたい爲めに前以て御願して置いた次第であります。御討論の内容に對して申述すべき點は大體 Gebers 博士の討論に對して述べたる所で盡きて居ると考へますので重ねて記述することを避けまゝす。唯御示になつた式は Gebers 氏の所謂 „Ähnlichkeits Mechanik“ の法則であると云ふ點と water particle が板の面を滑るか否かは俄に斷定し難き難問題でありますが滑でないも考へても説明が出来る様に思はれることを附記して置きます。

小野君の御好意を重ねて謝する次第であります。