孔ある Deep Beam の應力に就て

造船協會正員 工學博士 小 川 貞 英

Abstract.

Effect of a Quadrate Hole on the Stress Distribution in a Deep Beam
under Uniform Bending Moment. By D.: Sadahide Ogawa, *Member*.

In the structure such as aeroplanes, ships, steel cars which are regarded to receive bending action, the quadrate holes are frequently perforated for the purpose of saving of weight, side ports, windows etc. So far as the author is aware, however, this practical problem has not yet been solved theoretically, though the effect of circular hole was attempted mathematically and experimentally by Z. Tuzi.⁽¹⁾ Therefore I have given theoretically the stresses in a deep beam having a quadrate hole of various roundness of corners or a crack of star shaped with its center on the neutral axis and subjected to uniform bending moment in the plane of beam.

The results obtained by author will be applied well to a beam, the depth of which is great enough compared with the size of hole.

First, the stresses due to the quadrate hole with its four corners on the neutral and vertical axes of beam have been examined. The quadrate boundary of hole is given by $\alpha = \alpha_i$ of the series of curves, which are introduced by the relation

$$x = a(3e^{\alpha} \cos \beta + re^{-\alpha} \cos 3\beta),$$

$$y = a(3e^{\alpha} \sin \beta - re^{-\alpha} \sin 3\beta),$$

x and y axes being the neutral and vertical axes of beam. The stress-components $\widehat{\alpha\alpha}$, $\widehat{\beta\beta}$, and $\widehat{\alpha\beta}$ in the orthogonal-curvilinear co-ordinates α and β are determined by the equations (11), (12), (13) and (16), (17).

Then, the case of the quadrate hole with its centers of sides on the neutral and vertical axes of beam has been deduced by substituting $r = -r$ and $\beta = \beta - \frac{\pi}{4}$ ($= \beta'$ say) in the foregoing results.

In these results,

α varies from 0 to ∞ .

⁽¹⁾ Dr. Tuzi. Effect of a circular hole on the stress distribution of a beam under uniform bending moment. Scientific papers of the Institute of Physical and Chemical Research, Tokyo, vol. 9.

β varies from $-\pi$ to π .

a is any positive quantity with the unit of length.

r is any quantity such as $0 \leq r \leq 1$ and is the factor which determines the roundness of corner.

M is the uniform bending moment.

I is the moment of inertia of cross section of beam about its neutral axis.

Numerical examples are given for the above two cases, when the quadrate boundary is given by $\alpha_i = 0$.

For the former case, the equation of boundary is given by

$$\begin{aligned} x &= a(3 \cos \beta + r \cos 3\beta), \\ y &= a(3 \sin \beta - r \sin 3\beta), \end{aligned} \quad 0 \leq r < 1$$

and the stress on the periphery of hole is

$$\widehat{\beta\beta} = \frac{aM}{I(1+r^2-2r \cos 4\beta)} \times \{(3-3r-4r^2) \sin \beta - 3 \sin 3\beta + r \sin 5\beta\}$$

An example of stress distribution is shown in Fig. 1.

For the latter case, the equation of hole is given by

$$\begin{aligned} X &= a(3 \cos \beta' - r \cos 3\beta') \\ Y &= a(3 \sin \beta' + r \sin 3\beta') \end{aligned} \quad 0 \leq r < 1.$$

OX being the neutral axis of beam.

The stress on the periphery of hole is

$$\widehat{\beta\beta} = \frac{aM}{I(1+r^2+2r \cos 4\beta')} \{(3+3r-4r^2) \sin \beta' - 3 \sin 3\beta' - r \sin 5\beta'\}$$

Some examples of stress distribution are shown in Fig. 2, Fig. 4 and Fig. 5.

As a special case, the stress on the boundary of circular hole of radius R is obtained such as

$$\widehat{\beta\beta} = \frac{RM}{I} (\sin \beta - \sin 3\beta)$$

by putting $r=0$ in the results above mentioned. An example is shown in Fig. 3.

December, 1931.

I. 緒 言

孔ある平面板の応力分布が、孔の爲めに如何に影響されるかを、2 次元的弾性力學の問題として、研究したものは多い⁽²⁾。然かし多くは板の面内に引張りの力、或は剪斷の力が作用する場合であつて、面内に bending moment が働く場合に就ては、著者の知る範圍で極く少い⁽³⁾。然るに金屬板を以て

⁽²⁾ 例へば Dr. Suyehiro. The Distribution of Stress in Plates having Discontinuities and Some Problems connected with it. Jour. Soc. Nav. Arch., Tokio, vol. X.

Dr. Yokota. General Expression for Components in Two-Dimentional Problems of Elasticity. Jour. Soc. Nav. Arch., Tokio, vol. XV.

Dr. Watanabe. On the Tensile Strength of a Flat Plate with Two Circular Holes. Technology Report of the Kyushu Imp. Univ., vol. VI.

淺羽隆太郎氏、有孔板に於ける應力に就て。造船協會報第 42 號。

⁽³⁾ 前掲 (1) と同じ。

構成された構造物には、重量軽減、窓、舷門等の必要上、beam と見做される部分に孔の穿たれてゐる場合が少くない。例へば車體、航空機、船體構造及び各種 girder の如き場合である。猶ほ、電気熔接の發達に伴ひ、機械構造物中の bending action を受けてゐる部分にして、從來鑄物で構成されてゐたものも、重量軽減の目的で、孔ある鋼板にて代用されるに至るであろう。例へば marine diesel engine の engine bed の如きである。随つて、筆者は孔を持つた deep beam の面内に「均一曲げ moment」が作用した場合、beam 内の應力分布が、孔の形によりて如何に影響されるかを理論的に考察したのである。

此問題を考察するに當りて、beam の面、 xy 面上に直交曲坐標 α, β を考へた。而して α, β と x, y との間には次の如き關係があるとした。猶ほ孔の中心は beam の中立軸 x 軸上に在り。孔の周邊は 1 箇の連續閉曲線 $\alpha = \alpha_i$ にて與へられるものとした。

$$\left. \begin{aligned} x &= a(nc^\alpha \cos \beta + re^{-n\alpha} \cos n\beta) \\ y &= a(ne^\alpha \sin \beta - re^{-n\alpha} \sin n\beta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

但し a : 長さの單位を有つ任意な正數

α : 0 から ∞ に變る

β : $-\pi$ から π に變る

n : 正の整數、 $n=1$ の時楕圓
 $n=2$ の時隅を丸めた正三角
 $n=3$ の時隅を丸めた正四角

r : 任意な數値にして、 $0 \leq r \leq 1$

但し $\alpha_i = 0$ の時は、 $0 \leq r < 1$

之れは隅の丸味を支配する數値である。

然るに、 $r=0$ 即ち圓形孔の場合に就ては既に辻博士⁽⁵⁾が研究され、又 $n=1, r=1$ 即ち楕圓孔に就ても、本考察の中途に於て、既に最近研究されてゐた事を知つた⁽⁶⁾。然らば以上の如き形以外の孔にて、實地に多く穿れるものは殆んど四角孔のみである。此意味で本編に於ては、(1) 式の n を $n=3$ としたものの、即ち丸められた隅を有つ正四角孔の場合のみに就て論じた。此際直交曲坐標 α, β は次式にて與へられる。

$$\left. \begin{aligned} x &= a(3e^\alpha \cos \beta + re^{-3\alpha} \cos 3\beta) \\ y &= a(3e^\alpha \sin \beta - re^{-3\alpha} \sin 3\beta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

⁽⁴⁾ 此曲座標に就ては、拙著「中空壽の振れ」機械學會誌第三十三卷に詳述してあるから略す。

⁽⁵⁾ 前掲 (1) と同じ。

⁽⁶⁾ Bibhutibhusan Sen. Stresses due to a Small Elliptic Hole or a Crack on the Neutral Axis of a Deep Beam under Constant Bending Moment. Phil. Mag, August 1931.

本考察は、孔の大きさに對して beam の深さが相等大なる場合に就てである。然し本計算終了後、廣田氏が先般開催された應用力學大會に於て、孔ある帶板の強さに就ての一般解法⁽⁷⁾を與へられてゐる事を知つた。故に同氏の研究が、深さ小さき beam に本編に於て述べた様な性質を有する孔が穿たれてゐる場合にも、應用されるかも知れぬが、其の計算は相當繁雜なものとなるであらう。

2. 應力の計算に就て

beam の面内に働く「均一曲げモーメント」の爲めに生ずる應力の状態は平面應力にして、次式にて與へらる。

$$\widehat{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \widehat{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad \widehat{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots (3)$$

曲坐標にて示せば、

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\alpha\alpha} &= h \frac{\partial}{\partial \beta} \left(h \frac{\partial \chi}{\partial \beta} \right) - h \frac{\partial h}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \\ \widehat{\beta\beta} &= h \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(h \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \right) - h \frac{\partial h}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \beta} \\ \widehat{\alpha\beta} &= -h \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(h \frac{\partial \chi}{\partial \beta} \right) - h \frac{\partial h}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \\ h &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

但し χ は Airy の應力函数にして、本問題に於て具備すべき諸條件は次の通りである。

(a) beam 上の各點に於ては、

$$\nabla^4 \chi = 0 \dots\dots\dots (5)$$

(b) 孔より遠方の處に於ては、即ち $\alpha = \text{very large}$ では次の通りであるとする。

$$\widehat{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = \frac{My}{I}, \quad \widehat{yy} = 0 \quad \widehat{xy} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

(7) 廣田守道氏、二つの直線限界の間に穴を有する板の内力分布。應用力學大會、論文 (45)。

上式中、 I =beam の横断面の中立軸に対する慣性能率、

M =均一曲げ moment

(c) 孔の周邊 $\alpha=\alpha_i$ 上に於ては、

$$\widehat{\alpha\alpha}=0, \quad \widehat{\alpha\beta}=0 \dots\dots\dots(7)$$

次に以上の条件に適應する應力函数 χ を求めん。

先づ求むる χ が次式の如きものとする。

$$\chi=\chi_0+\chi_1 \dots\dots\dots(8)$$

若し χ_0 及び χ_1 が夫々 $\nabla^4\chi_0=0$ 及び $\nabla^4\chi_1=0$ を満足させれば、(5) 式は線形微分方程式である故、 $\chi_0+\chi_1$ も $\nabla^4(\chi_0+\chi_1)=0$ を満足させる。(3) 式を書き換へれば

$$\widehat{xx}=\frac{\partial^2\chi_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\chi_1}{\partial y^2}, \quad \widehat{yy}=\frac{\partial^2\chi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\chi_1}{\partial x^2}, \quad \widehat{xy}=-\frac{\partial^2\chi_0}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\chi_1}{\partial x\partial y}$$

となる。今上式第 2 項の存在が、第 1 項の存在に對して、 α =very large の處で negligible であると假定れずば、 $\widehat{xx}$, $\widehat{yy}$ 及び $\widehat{xy}$ は夫々

$$\widehat{xx}=\frac{\partial^2\chi_0}{\partial y^2}, \quad \widehat{yy}=\frac{\partial^2\chi_0}{\partial x^2}, \quad \widehat{xy}=-\frac{\partial^2\chi_0}{\partial x\partial y} \quad \text{となる。}$$

然るに斯の如き處では、條件式 (6) が満足されねばならぬ故、 χ_0 は次の如くなる。

$$\chi_0=\frac{M}{6I}y^3$$

即ち

$$\chi_0=\frac{Ma^3}{24I} \times \begin{bmatrix} (81e^{3\alpha}+27re^{-\alpha}+18r^2e^{-5\alpha}) \sin \beta \\ -(27e^{3\alpha}+54re^{-\alpha}+3r^3e^{-9\alpha}) \sin 3\beta \\ +(27re^{-\alpha}+9r^2e^{-5\alpha}) \sin 5\beta \\ -9r^3e^{-5\alpha} \sin 7\beta + r^3e^{-9\alpha} \sin 9\beta \end{bmatrix} \dots\dots\dots(9)$$

次に孔の周邊 $\alpha=\alpha_i$ 上に於て、 $\chi=(\chi_0+\chi_1)$ が條件式 (7) を満足させれば、結局 $(\chi_0+\chi_1)$ は本問題の總ての条件を満たす事になる。今函数 χ を (9) 式を参照して、次の如く表す。

$$\chi=\frac{Ma^3}{24I} \left(F_1 \sin \beta + F_3 \sin 3\beta + F_5 \sin 5\beta + F_7 \sin 7\beta + F_9 \sin 9\beta \right) \dots\dots\dots(10)$$

然るとき應力 $\widehat{\alpha\alpha}$, $\widehat{\beta\beta}$ 及び $\widehat{\alpha\beta}$ は夫々次の如くなる。

$$\widehat{\alpha\alpha}=\frac{-Ma}{216I(e^{2\alpha}+r^2e^{-6\alpha}-2rc^{-2\alpha}\cos 4\beta)^2} \times$$

$$\left[\begin{aligned}
 & \left\{ \left(e^{2\alpha} + r^2 e^{-6\alpha} \right) F_1 - \left(e^{2\alpha} - 3r^2 e^{-6\alpha} \right) \frac{dF_1}{d\alpha} + r e^{-2\alpha} \left(15F_3 - 35F_5 + \frac{dF_3}{d\alpha} - \frac{dF_5}{d\alpha} \right) \right\} \sin \beta \\
 & + \left\{ 9 \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) F_3 - \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \frac{dF_3}{d\alpha} + r e^{-2\alpha} \left(3F_1 - 63F_7 + \frac{dF_1}{d\alpha} - \frac{dF_7}{d\alpha} \right) \right\} \sin 3\beta \\
 & + \left\{ 25 \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) F_5 - \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \frac{dF_5}{d\alpha} + r e^{-2\alpha} \left(F_1 - 99F_9 - \frac{dF_1}{d\alpha} - \frac{dF_9}{d\alpha} \right) \right\} \sin 5\beta \\
 & + \left\{ 49 \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) F_7 - \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \frac{dF_7}{d\alpha} - r e^{-2\alpha} \left(3F_3 + \frac{dF_3}{d\alpha} \right) \right\} \sin 7\beta \\
 & + \left\{ 81 \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) F_9 - \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \frac{dF_9}{d\alpha} - r e^{-2\alpha} \left(15F_5 + \frac{dF_5}{d\alpha} \right) \right\} \sin 9\beta \\
 & - r e^{-2\alpha} \left(35F_7 + \frac{dF_7}{d\alpha} \right) \sin 11\beta - r e^{-2\alpha} \left(63F_9 + \frac{dF_9}{d\alpha} \right) \sin 13\beta
 \end{aligned} \right] \dots\dots (11)$$

$$\widehat{\beta} = \frac{-Ma}{216 I (e^{2\alpha} + r^2 e^{-6\alpha} - 2r e^{-2\alpha} \cos 4\beta)^2} \times$$

$$\left[\begin{aligned}
 & \left\{ \left(e^{2\alpha} - 3r^2 e^{-6\alpha} \right) \frac{dF_1}{d\alpha} - \left(e^{2\alpha} + r^2 e^{-6\alpha} \right) \frac{d^2 F_1}{d\alpha^2} + r e^{-2\alpha} \left(-6F_3 + 10F_5 - \frac{dF_3}{d\alpha} + \frac{dF_5}{d\alpha} - \frac{d^2 F_3}{d\alpha^2} + \frac{d^2 F_5}{d\alpha^2} \right) \right\} \sin \beta \\
 & + \left\{ \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \frac{dF_3}{d\alpha} - \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \frac{d^2 F_3}{d\alpha^2} + r e^{-2\alpha} \left(-2F_1 + 14F_7 - \frac{dF_1}{d\alpha} + \frac{dF_7}{d\alpha} - \frac{d^2 F_1}{d\alpha^2} + \frac{d^2 F_7}{d\alpha^2} \right) \right\} \sin 3\beta \\
 & + \left\{ \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \frac{dF_5}{d\alpha} - \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \frac{d^2 F_5}{d\alpha^2} + r e^{-2\alpha} \left(-2F_1 + 18F_9 + \frac{dF_1}{d\alpha} + \frac{dF_9}{d\alpha} + \frac{d^2 F_1}{d\alpha^2} + \frac{d^2 F_9}{d\alpha^2} \right) \right\} \sin 5\beta \\
 & + \left\{ \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \frac{dF_7}{d\alpha} - \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \frac{d^2 F_7}{d\alpha^2} + r e^{-2\alpha} \left(-6F_3 + \frac{dF_3}{d\alpha} + \frac{d^2 F_3}{d\alpha^2} \right) \right\} \sin 7\beta \\
 & + \left\{ \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \frac{dF_9}{d\alpha} - \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) \frac{d^2 F_9}{d\alpha^2} + r e^{-2\alpha} \left(-10F_5 + \frac{dF_5}{d\alpha} + \frac{d^2 F_5}{d\alpha^2} \right) \right\} \sin 9\beta \\
 & + r e^{-2\alpha} \left(-14F_7 + \frac{dF_7}{d\alpha} + \frac{d^2 F_7}{d\alpha^2} \right) \sin 11\beta \\
 & + r e^{-2\alpha} \left(-18F_9 + \frac{dF_9}{d\alpha} + \frac{d^2 F_9}{d\alpha^2} \right) \sin 13\beta
 \end{aligned} \right] \dots\dots (12)$$

$$\alpha \widehat{\beta} = \frac{Ma}{216 I (e^{2\alpha} + r^2 e^{-6\alpha} - 2r e^{-2\alpha} \cos 4\beta)^2} \times$$

$$\left[\left\{ \left(e^{2\alpha} - 3r^2 e^{-6\alpha} \right) F_1 - \left(e^{2\alpha} + r^2 e^{-6\alpha} \right) \frac{dF_1}{d\alpha} + r e^{-2\alpha} \left(3F_3 + 5F_5 + 5 \frac{dF_3}{d\alpha} + 7 \frac{dF_7}{d\alpha} \right) \right\} \cos \beta \right]$$

$$\left. \begin{aligned}
& + \left\{ 3 \left(e^{2\alpha} - 3r^2 e^{-6\alpha} \right) F_3 - 3 \left(e^{2\alpha} + r^2 e^{-6\alpha} \right) \frac{dF_3}{d\alpha} + r e^{-2\alpha} \left(F_1 + 7F_7 + 3 \frac{dF_1}{d\alpha} + 9 \frac{dF_7}{d\alpha} \right) \right\} \cos 3\beta \\
& + \left\{ 5 \left(\quad \quad \quad \right) F_5 - 5 \left(\quad \quad \quad \right) \frac{dF_5}{d\alpha} + r e^{-2\alpha} \left(F_1 + 9F_9 - \frac{dF_1}{d\alpha} + 11 \frac{dF_9}{d\alpha} \right) \right\} \cos 5\beta \\
& + \left\{ 7 \left(\quad \quad \quad \right) F_7 - 7 \left(\quad \quad \quad \right) \frac{dF_7}{d\alpha} + r e^{-2\alpha} \left(3F_3 + \frac{dF_3}{d\alpha} \right) \right\} \cos 7\beta \\
& + \left\{ 9 \left(\quad \quad \quad \right) F_9 - 9 \left(\quad \quad \quad \right) \frac{dF_9}{d\alpha} + r e^{-2\alpha} \left(5F_5 + 3 \frac{dF_5}{d\alpha} \right) \right\} \cos 9\beta \\
& + r e^{-2\alpha} \left(7F_7 + 5 \frac{dF_7}{d\alpha} \right) \cos 11\beta + r e^{-2\alpha} \left(9F_9 + 7 \frac{dF_9}{d\alpha} \right) \cos 13\beta
\end{aligned} \right\} \quad (13)$$

孔の周邊 $\alpha = \alpha_i$ 上に於て、 $\widehat{\alpha}\alpha = 0$ 及 $\alpha\widehat{\beta} = 0$ の條件を満足させる爲めには、(11) 及 (13) 式に、 $\alpha = \alpha_i$ を代入したものが、 β の値に無關係に零でなければならぬ。即ち是等の式の各三角函數の係數が零でなければならぬ。而して此要求に應ずる爲めには、次の聯立方程式が成立すれば充分である。

$$\left. \begin{array}{ll}
\alpha = \alpha_i \text{ に於て、} & F_1 = 0 \quad \frac{dF_1}{d\alpha} = 0 \\
& F_3 = 0 \quad \frac{dF_3}{d\alpha} = 0 \\
& F_5 = 0 \quad \frac{dF_5}{d\alpha} = 0 \\
& F_7 = 0 \quad \frac{dF_7}{d\alpha} = 0 \\
& F_9 = 0 \quad \frac{dF_9}{d\alpha} = 0
\end{array} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

此 10 箇の條件式を同時に満足させる爲めには、函數 χ が 10 箇の constants $A, A_2, \dots, A_{10}$ を含んで居ればよいのである。然るに $\chi = \chi_0 + \chi_1$ に於ける χ_0 は既に (9) 式にて與へられて居る故、 χ_1 が以上の 10 箇の constants を具備すべきである。以上の見地に依て算出した結果を纏めれば、 χ_1 は次の如くである。

$$\left. \begin{aligned}
& \chi_1 = \frac{Ma^3}{24I} \times \\
& \left[(A_1 e^{-\alpha} + A_2 e^{\alpha}) \sin \beta + A_3 e^{-3\alpha} \sin 3\beta + A_5 e^{-5\alpha} \sin 5\beta + A_7 e^{-7\alpha} \sin 7\beta \right. \\
& + A_9 e^{-9\alpha} \sin 9\beta + A_4 \left\{ \frac{3r}{8} e^{-5\alpha} \sin \beta - \left(\frac{9}{8} e^{-\alpha} - \frac{r^2}{8} e^{-9\alpha} \right) \sin 3\beta + \frac{3r}{8} e^{-5\alpha} \sin 7\beta \right\} \\
& \left. + A_6 \left\{ -\frac{3r}{16} e^{-7\alpha} \sin \beta - \left(\frac{9e^{-3\alpha}}{16} - \frac{3r^2}{32} e^{-11\alpha} \right) \sin 5\beta + \frac{9r}{32} e^{-7\alpha} \sin 9\beta \right\} \right] \dots\dots (15)
\end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{aligned} &+ A_8 \left\{ -\frac{9r}{8} e^{-5\alpha} \sin \beta + \left(\frac{27}{8} e^{-\alpha} + \frac{r^2}{8} e^{-9\alpha} \right) \sin 3\beta + \frac{3r}{8} e^{-5\alpha} \sin 7\beta \right\} \\ &+ A_{10} \left\{ \frac{15r}{16} e^{-7\alpha} \sin \beta + \left(\frac{45}{16} e^{-3\alpha} + \frac{5r^2}{82} e^{-11\alpha} \right) \sin 5\beta + \frac{15r}{32} e^{-7\alpha} \sin 9\beta \right\} \end{aligned} \right]$$

随つて (8), (9) 及 (15) 式より χ を求め整頓すれば、(10) 式中の $F_1, F_3, \dots, F_9$ は夫々次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= 81e^{3\alpha} + (27r + A_1)e^{-\alpha} + A_2e^{\alpha} \\ &\quad + \left(18r^2 + \frac{3r}{8}A_4 - \frac{9r}{8}A_8 \right)e^{-5\alpha} + \left(-\frac{3r}{16}A_6 + \frac{15r}{16}A_{10} \right)e^{-7\alpha} \\ F_3 &= -27e^{3\alpha} - \left(54r + \frac{9}{8}A_4 - \frac{27}{8}A_8 \right)e^{-\alpha} + A_3e^{-3\alpha} \\ &\quad - \left(3r^3 - \frac{r^2}{8}A_4 - \frac{r^2}{8}A_8 \right)e^{-9\alpha} \\ F_5 &= 27re^{-\alpha} + \left(-\frac{9}{16}A_6 + \frac{45}{16}A_{10} \right)e^{-3\alpha} + (9r^2 + A_5)e^{-5\alpha} \\ &\quad + \left(\frac{3r^2}{32}A_6 + \frac{5r^2}{32}A_{10} \right)e^{-11\alpha} \\ F_7 &= \left(-9r^2 + \frac{3r}{8}A_4 + \frac{3r}{8}A_8 \right)e^{-5\alpha} + A_7e^{-7\alpha} \\ F_9 &= \left(\frac{9r}{32}A_6 + \frac{15r}{32}A_{10} \right)e^{-7\alpha} - (r^3 - A_9)e^{-9\alpha} \end{aligned} \right\} \dots\dots (16)$$

但し constants $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ は (14) 式より求めらる。其値は次の如くてある。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 27(e^{4\alpha} - r - 2r^2e^{-4\alpha}) - \frac{9}{8}re^{-4\alpha}A_4 + \frac{3r}{4}e^{-6\alpha}A_6 \\ &\quad + \frac{27r}{8}e^{-4\alpha}A_8 - \frac{15r}{4}e^{-6\alpha}A_{10} \\ A_2 &= -18 \left(9e^{2\alpha} - 2r^2e^{-6\alpha} \right) + \frac{3r}{4}e^{-6\alpha}A_4 - \frac{9r}{16}e^{-8\alpha}A_6 \\ &\quad - \frac{9r}{4}e^{-6\alpha}A_8 + \frac{45r}{16}e^{-8\alpha}A_{10} \\ A_3 &= -54e^{6\alpha} \\ A_4 &= -6e^{\alpha} (3e^{3\alpha} - re^{-\alpha}) \\ A_5 &= 9re^{4\alpha} (3 - re^{-4\alpha}) \\ A_6 &= 24re^{2\alpha} \\ A_7 &= 0 \\ A_8 &= 24r - A_4 \end{aligned} \right\} \dots\dots (17)$$

$$A_9 = r^3$$

$$A_{10} = -\frac{3}{5}A_6$$

故に beam 内の各點に於ける應力は (16), (17) 式を (11), (12) (13) 式に代入すれば得らる。

3. 例 題

孔の周邊を與へる曲線 $\alpha = \alpha$ に於て、 $\alpha_i = 0$ とするも、 r の値に應じて、隅の丸味を色々に變へた正方形を得。即ち $r = 0$ のときは圓形孔であるが、 r の値が、1 に近づくにつれて隅の丸味が次第に減少して、尖端を丸めた四角星形に近い形となる。随つて計算を簡略ならしめる爲め、 $\alpha_i = 0$ の場合に就て數值例題を示した。

隅に於ける曲率半徑を ρ_i 、中心より隅に至る距離を R_i として、隅の丸味の程度を此兩者の比で示せば次の如くである。

$$\frac{\rho_i}{R_i} = \frac{3(1-r)^2}{(3+r)(1+3r)} \quad 0 \leq r < 1$$

次に孔の周邊、中立軸及之れに垂直な軸を夫々基線として、各基線に立てた法線上に其の點に於ける應力の値を取りて應力分布の狀態を圖示した。 r の値が 1 に近きときは、孔は星形な龜裂に近い形となる故、斯様な龜裂が存在する場合に對しても、次に述べる例題は参考となるであらう。

例 1. 4 隅が夫々中立軸及垂直軸上に在る場合に就て。(Fig. 1)

孔が斯様な位置に穿たれてゐる場合は、實際問題としては餘り見受けないであらう。本例題を掲げた目的は、隅が中立軸に垂直な軸上に在る時は、此隅が他の位置にある場合に比して、隅の近傍に於ける應力分布の狀態が一層急激である事を示さん爲めである。

孔の周邊は次式で與へられる。

$$\begin{aligned} x &= a(3 \cos \beta + r \cos 3\beta) \\ y &= a(3 \sin \beta - r \sin 3\beta) \end{aligned} \quad 0 \leq r < 1$$

而して孔の周邊上の應力は次の如くなる。

$$\widehat{\sigma\beta} = \frac{Ma}{I(1+r^2-2r \cos 4\beta)} \{ (3-3r-4r^2) \sin \beta - 3 \sin 3\beta + r \sin 5\beta \} \dots (18)$$

Fig. 1 は、 $r = 0.4$ として求めた應力分布の狀態を示してゐる。即ち孔の周邊上の應力は常に垂直軸 oy 上に在る隅に近づくに従つて増加し、此の隅に於て最大となる。垂直軸 oy 上の應力分布の狀態も、此隅の近傍に於て著しく隅の影響を受けてゐる。而して是れ等の傾向は、隅の丸味の小さな程一層顯著である。

例 2. 4 邊の中點が、夫々中立軸及垂直軸上に在る場合に就て。(Fig. 2)

隅を丸めた四角孔が斯様な狀態に穿れてゐる場合は、金屬板を用ひて構造物、特に船體、航空機

體、車體に於て多い。随つて本例題は實際問題に對して相當參考となるであらう。

孔の位置が本例題の場き如合には、既述の諸計算中の r を $-r$ に、 β を $\beta - \frac{\pi}{4}$ ($=\beta'$ と記す) に置換すれば可い。随つて孔の周邊は次式にて與へられる。

$$\begin{aligned} X &= a(3 \cos \beta' - r \cos 3\beta') & 0 \leq r < 1 \\ Y &= a(3 \sin \beta' + r \sin 3\beta') \\ OX &\text{ 中立軸。} \end{aligned}$$

而して孔の周邊上の應力は次式にて與へられる。

$$\widehat{\beta\beta} = \frac{Ma}{I(1+r^2+2r\cos 4\beta')} \times \{(3+3r-4r^2)\sin \beta' - 3\sin 3\beta' - r\sin 5\beta'\} \quad (19)$$

Fig. 2 は $r=0.4$ の場合に就て求めた結果である。次に側邊の中點 U の位置に固定し隅の丸味のみを種々に變へれば、周邊上の應力の分布状態は Fig. 3, Fig. 4, 及 Fig. 5 に示す如く變る、之を略述すれば次の通りである。

(i) 孔の周邊上の應力が最大となる處に就て。

Fig. 3 に示す如く、圓形孔の場合は垂直軸 OY 上に於て最大である。然し Fig. 3→Fig. 4→Fig. 2→Fig. 5 の順に、隅を次第に尖からせは、周邊上の應力が最大となる處も次第に隅の方へ接近して来る。而して Fig. 5 に示すものより更に隅を尖がらせば、計算の結果、隅に於て最大となるのである。

(ii) 垂直軸 OY 上に在る側邊の中點 C に於ける應力の變化のみに就て。

種々な隅の丸味に就て比較すれば、圓形孔の場合が其値最大にて、隅の丸味が小さくなる程其の値が減少する。今垂直軸上に於ける周邊の應力の中、圓形孔の場合のものを $\widehat{\beta\beta}_0$ 、任意な隅の丸味の場合に對するものを $\widehat{\beta\beta}$ として、隅の丸味の變化に應じて $\widehat{\beta\beta}_0/\widehat{\beta\beta}$ の値が如何に變化するかを示せば Fig. 6 に示す如くである。

(iii) 周邊の隅 B 點に於ける應力の變化のみに就て。

圓形孔の場合は Fig. 3 に示す如く B 點に應力存在せず。然かし隅の丸味を減するに従つて B 點に於ける應力は B 點に於て周邊に立てた法線の長さが示す如く、Fig. 4→Fig. 2→Fig. 5 の順に次第に増加する。

(iv) 周邊に近接した中立軸及び垂直軸上の應力分布の状態は、例 1 の場合と同様に、孔の影響を受けてゐるが、例 1 の場合程著しくない。

(v) 次に Fig. 2—Fig. 5 を通覽して興味ある事實は、周邊上の應力分布に關する限り、圓形孔よりも Fig. 4 に示す如き形の孔の方が却て有利な事である。

例外。(18) 及 (19) 式に $r=0$ を代入すれば、半徑 R が $R=3a$ なる圓形孔の周邊上の應力を得。其の値は次の如くである。

OC ----- CONSTANT.

$\frac{P_i}{R_i}$ ----- VARIABLE

$\widehat{PP}_c^0$ ----- STRESS AT C
WHEN $\frac{P_i}{R_i} = 1$

$\widehat{PP}_c$ ----- STRESS AT C
WHEN $\frac{P_i}{R_i} < 1$

FIG 6.

$$\widehat{\beta\beta} = \frac{MR}{I}(\sin \beta - \sin 3\beta) \dots\dots\dots(20)$$

應力分布の状態は Fig. 3. に示す如くである。

4. 總 括

既述の結果を總括すれば次の如くである。

1. 本篇は、孔を持つた deep beam の面内に「均一曲げ moment」が作用した時生ずる應力を、
2 次元的弾性力學の問題として考察したのである。但し孔の形は隅を丸めた正四角にして、其の中心
が beam の中立軸上に在る。而して 孔の大きさに對して、beam の深さが大なる場合である。

2. 孔の形を與へる式に就て。(但し $\alpha_i = 0$)

(i) 4 隅が中立軸 ox 及垂直軸 oy 上に在る時は、

$$x = a(3 \cos \beta + r \cos 3\beta)$$

$$y = a(3 \sin \beta - r \sin 3\beta)$$

である。

(ii) 4 邊の中點が中立軸 OX 及垂直軸 OY 上に在る時は、孔の形は次式にて與へられる。

$$X = a(3 \cos \beta' - r \cos 3\beta')$$

$$Y = a(3 \sin \beta' + r \sin 3\beta')$$

3. 孔の周邊上の應力を與へる式に就て。(但し $\alpha_i = 0$)

(i) 孔の 4 隅が中立軸及垂直軸上に在る時は、

$$\widehat{\beta\beta} = \frac{Ma}{I(1+r^2-2r\cos 4\beta)} \{ (3-3r-4r^2)\sin \beta - 3\sin 3\beta + r\sin 5\beta \}$$

(ii) 孔の 4 邊の中點が中立軸及垂直軸上にある時は、

$$\widehat{\beta\beta} = \frac{Ma}{I'(1+r^2+2r\cos 4\beta')} \{ (3+3r-4r^2)\sin \beta' - 3\sin 3\beta' - r\sin 5\beta' \}$$

(iii) 特別な場合として $r=0$ のときは、半徑 $R=3\alpha$ なる圓形孔の周邊上の應力を得、其の値は次の如くである

$$\widehat{\beta\beta} = \frac{MR}{I}(\sin \beta - \sin 3\beta)$$

上式中に於て、

α ……長さの單位を持つ任意な數値

β …… $-\pi$ から π に變る。

r ……隅の丸味を支配する數値にして、 $0 \leq r < 1$

M ……「均一曲げ moment」

I 及 $I' \dots$ beam の横断面の中立軸に對する慣性能率。

4. 應力分布に就て。

A. 孔の周邊上及孔の近傍に於ける應力分布に就て。

孔の周邊上に於ける應力分布は、孔の隅の近傍に於て急に増加する。但し中立軸上にある隅に於ては、隅の丸味に關せず應力は存在せぬ。

中立軸及び之れに垂直な軸上の應力分布の状態も、孔の近傍に於ては、孔の影響を受ける。孔の側邊の中點が此兩軸上に在る場合より、孔の 4 隅が此の兩軸上に在る場合の方が著しい。以上何れの傾向も、隅の丸味小さき程一層顯著である。

B. 中立軸及垂直軸上に在る孔の 4 邊の中點の位置を其の儘に保ち、隅の丸味のみを變へた場合に就て。

(i) 周邊上の應力が最大となる處は、圓形孔の場合は、垂直軸上であるが、隅の丸味が減ずるに従つて、其位置が次第に隅の方へと移動し、尖端を丸めた星形に近い形となれば、隅に於て最大となる。何れの場合も、隅を過ぎりて更に中立軸へ向ふに従つて、應力が急に減少し、遂に反對の性質を有する應力となる。(tension に對して compression)。

(ii) 垂直軸上に在る側邊の中點に於ける應力のみに就て述べれば、圓形孔の場合に最大にして、隅の丸味が減少する程小さくなる。

(iii) 隅に於ける應力に就て述べれば、圓形孔の場合は、隅の位置に相當する處で應力存在せぬが隅の丸味が減ずるに従つて、次第に其の値が増大する。

C. 周邊上の應力の分布に關する限り、Fig. 3 及 Fig. 4 に示す如く、隅の丸め方によりて却て圓形孔の場合より有利な場合がある。

(昭和六年十二月、九州帝國大學工學部造船學教室に於て。)

Fig. 1

DISTRIBUTION OF STRESSES.

$$\begin{aligned}\widehat{2\alpha} &= \frac{M\lambda_1}{I} \\ \widehat{\beta\beta} &= \frac{M\lambda^2}{I} \\ \widehat{2\beta} &= \frac{M\lambda^3}{I}\end{aligned}$$

0 1 2 SCALE OF STRESS
(SCALE OF λ^3)

0 1 2 SCALE OF FIGURES

OC ----- CONSTANT

Fig. 2.

Fig. 5

Fig. 4.

Fig. 3.

DISTRIBUTION OF STRESSES.

討 論

○會長(今岡純一郎君) 唯今の御講演に對して御質問又は御意見のある御方は御述べを願ひます。

○井口常雄君 質問でもありませんが、小川君の研究は大變面白いと思つたので氣の付いた點を一言述べさせていただきます。實際問題で四角な孔の出て來るのは cargo boat では N. A. より遠い deck に近い所にある様で、小川君の論文は N. A. 上にある時ですが之をかへて見たら實際問題に近くなりはないかと思ひます。先年やはり九大の故淺羽君が孔のある板に tension のかゝつた場合をやつて居られます。小川君の論文に淺羽君の論文を superpose すると實際に近いものが得られませう。淺羽君のと小川君のとを比較してみると一方は vertical axis に對して increase するに對し他方は decrease して居ります。periphery に於ては模様が似て居りますので、態々重ねなくても大體の見當はつく事と思ひますが、一寸氣が付いた事をどなたも他に御質問が無い様ですから述べさして戴きました。

○小川貞英君 有難う御座いました。

○會長(今岡純一郎君) 他に御質問がなければ小川君の有益なる御講演に對し一言御禮を申述べます。尙未だ實驗されて居られないそうですが、斯かる問題をどうか實驗して本協會に御報告になると幸に存じます。諸君と共に拍手を以て感謝の意を表したいと思ひます。(一同拍手)