第 2 種曲邊正多角形斷面を持つ中空柱體の 捩り應力

正員 工學士 澤 田 正 雄

Abstract.

Torsion Stress in a Hollow Cylinder having
the Section of Curved-sided Polygon of Second Kind.

By Masao Sawada, *Kogakushi, Member.*

For the section of a hollow-cylinder in heading, we can apply the torsion stress function in the following form:—

$$\Psi = k(1/a^n - 1/r^n \cdot \cos n\theta) - r^2 + a^2$$

where $n=0$ or integer, a =radius of a circle, $k \geq 0$.

The function holds good in the outer region of a circle, and the inner periphery can be obtained by solving the following equation with respect to a parameter r .

$$k(1/a^n - 1/r^n \cdot \cos n\theta) - r^2 + a^2 = 0.$$

The outer periphery can be determined by taking

$$\Psi = C_2 = a^2 - b^2 + k(1/a^n - 1/b^n)$$

where $b > a$.

Then we have the stresses in two directions

$$\widehat{Z}_\theta = \tau G \left(r - \frac{1}{2} k n r^{-1-n} \cos n\theta \right),$$

$$\widehat{Z}_r = \tau G \left(\frac{1}{2} k n r^{-1-n} \sin n\theta \right).$$

Between two stresses, it is necessary to consider the value of $\widehat{Z}_\theta$ on the outer boundary, which becomes maximum at the angles $\theta = (2s-1)\pi/n$, where $s=1, 2, 3, \dots, n$.

1. は し が き

中空斷面體の捩り問題に關して、小川貞英博士⁽¹⁾は直角曲交座標に依りハイポトロコイド曲線斷面柱體に就いての研究を發表された。筆者は之に類似な斷面を持つ中空柱體に就いて極座標函數を以て

⁽¹⁾ 機械學會誌第 33 卷第 162 號 603 頁

単純な解法を試みる事とする。即ち一種の曲邊正多角形に類似の周邊形を基準内周とし、任意の剪斷應力線を外周とする中空柱體の捩り應力を概論する。

2. 應力函数の見方

從來捩り應力函数を所謂“Plandtl の丘”又は“周邊支持で均壓を受ける薄膜の撓み”と解説して居る。此の理論に依ると中實斷面體の應力函数は、其の剪斷應力線を内周とする中空斷面體に無難に應用出来る。此の場合に内周形は外周形よりも幾分又は著しく丸味を帯びる。時としては外周形と全然相似で且同心的又は離心的である。

然し外周形よりも凹凸の多い内周形を持つ斷面體に對しては應力函数の見方を變へねばならない。今内周領域内で壓力を全然受けない非常に廣い薄膜を考へ、内周に沿うて支持して均壓を加へるとしよう。此際薄膜は撓んで曲面即ち“丘”を造るであらう。之が求める應力函数である。そこで丘の頂上平面即ち内周邊を含む平面に平行して或る高さの平面で此丘を切ると、底面周邊として内周形よりも丸味を持つ外周形が得られる。丘の高くなる程外周形は段々圓形に近づく事となる。

斯様に考へると此場合も“丘”の定理は明に成立する。従つて應力函数は内周領域内では特異點を持つて居ても差支へないが、斷面内では勿論連續條件を満たし且剪斷應力線は何れも連續閉塞曲線でなければならない。

3. 本 論

今問題の斷面柱體に對して應力函数は次の基本式及び周邊條件を満足せねばならない。

$$\text{基本式} \quad (\partial_r^2 + 1/r \cdot \partial_r + 1/r^2 \cdot \partial_\theta^2) \Psi = -4 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{條 件} \quad [\Psi]_{\text{内周}} = 0; \quad [\Psi]_{\text{外周}} = C_2 \quad \dots\dots\dots (1_1)$$

$$\text{解の形} \quad \Psi = k(1/a^n - 1/r^n \cdot \cos n\theta) - r^2 + a^2 \quad \dots\dots\dots (1_2)$$

$$= a^2 [K(1 - 1/R^n \cdot \cos n\theta) - R^2 + 1] \quad \dots\dots\dots (1_3)$$

$$\text{但} \quad n=0 \text{ 又は整数,} \quad K = k/a^{n+2} \geq 0$$

$$R = r/a \geq 1, \quad a = \text{圓の半径}$$

解(1₂)は圓 $r=a$ の内側では使用出来ない。(1₃)は單位圓 ($R=1$) を基準にして寫像した形である。 n 及 K の値に依り種々な内周形を與へる。内周形は次式を r_b に就いて解いて求めると宜しい。

$$k(1/a^n - 1/r_b^n \cdot \cos n\theta) - r_b^2 + a^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (1_4)$$

即ち原點から内周邊迄の距離 r_b は常に $\geq a$ であつて θ の函数である。 n 及 k の値に依り種々の圖形が與へられる。例へば (i) $n=0$ 又は $k=0$ ならば圓形、(ii) $n=1, k>0$ ならば 1 箇の凹みある圓形、(iii) $n=2, k>0$ ならば 2 箇の凹みある橢圓形、(iv) $n=3, k>0$ ならば 3 箇の凹みあ

る曲邊正三角形、(v) $n=4$, $k>0$ ならば 4 箇の凹みある曲邊正四角形となる。一般に

(イ) $0 < k \leq 2/n$ 圓 $r=a$ に外接する曲邊 n 角形

(ロ) $k > 2/n$ 圓 $r=a$ の外方にある曲邊 n 角形

であつて何れも n 軸對稱形となる。 $k=2/n$ は圓 $r=a$ の外接多角形を與へる極限值で、 k が之れより大きくなると圓外に存在する圖形を支へる。第 1, 2, 3 及 4 圖は $n=1, 2, 3$ 及 4 の場合の内周基本形を示して居る。 $K=k/a^{n+2}$ が 0 又は ∞ に近づくに伴て段々圓形となつて來る事が明かである。

第1圖 $n=1$ の場合

第2圖 $n=2$ の場合

第3圖 $n=3$ の場合

第4圖 $n=4$ の場合

次に外周形を求める爲に $[\Psi]_{\text{外周}} = C_2$ と置くと (1₂) から

$$k(1/a^n - 1/r_c^n \cdot \cos n\theta) - r_c^2 + a^2 = C_2 \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{但 } C_2 = a^2 - b^2 + k(1/a^n - 1/b^n)$$

$$\therefore k(1/b^n - 1/r_c^n \cdot \cos n\theta) - r_c^2 + b^2 = 0 \dots \dots \dots (2_1)$$

$$\text{或は } b^2[K'(1 - 1/R_c^n \cdot \cos n\theta) - R_c^2 + 1] = 0 \dots \dots \dots (2_2)$$

$$\text{但 } K' = k/b^{2+n}, R_c = r_c/b, b > a$$

(2) は (2₁) の與へる圖形を單位圓 ($R_c=1$) に寫像した形であつて、何れも (1₂) 又は (1₃) と夫々類似形である。只 $b > a$ であるから $K' < K$ となる。従つて外周形は一般に内周形よりも丸味を帯びて来る事が了解出来る。

更に單位長さの捩り角度: τ , 剛性係數: G と置くと應力は次の通りになる。

$$\widehat{Z\theta} = -\frac{1}{2} \tau G \partial_r \Psi, \quad \widehat{Zr} = \frac{1}{2} \tau G \partial_\theta (\Psi/r) \dots \dots \dots (3), (3_1)$$

$$\therefore \widehat{Z\theta} = \tau G \left(r - \frac{1}{2} knr^{-1-n} \cos n\theta \right) \dots \dots \dots (3_2)$$

$$\widehat{Zr} = \tau G \left(\frac{1}{2} knr^{-1-n} \sin n\theta \right) \dots \dots \dots (3_3)$$

今 $s=1, 2, 3, \dots, n$ と置くと

$$[\widehat{Z\theta}/\tau G]_{\theta=2(s-1)\pi/n} = r - \frac{1}{2} kn/r^{1+n} \dots \dots \dots (3_4)$$

$$[\widehat{Z\theta}/\tau G]_{\theta=(2s-1)\pi/n} = r + \frac{1}{2} kn/r^{1+n} \dots \dots \dots (3_5)$$

斷面形は何れも n 對の對稱曲邊から成立するから、 $\theta=0$ から $\theta=\pi/n$ 迄考へると宜しい。應力は常に周邊上で吟味せねばならない。周邊上では $\widehat{Z\theta}$ は θ の増加するに伴れて増し、 $\theta=\pi/n$ で最大値となる。又同一の θ に對しては外周邊の値は内周邊の値よりも大である。従つて外周邊上で $\theta=(2s-1)\pi/n$ の點で最も大となる。

又 (3₅) から次の結果を得。

$$[\widehat{Zr}]_{\theta=2(s-1)\pi/n} = [\widehat{Zr}]_{\theta=(2s-1)\pi/n} = 0 \dots \dots \dots (3_6)$$

之は明に曲線又は應力線の接合點に於ける連續性を確立する事となる。 $\widehat{Zr}$ は $\theta=0$ 及 $\theta=\pi/n$ で零となるから、此間で最大となる。然し同一の θ に對し外周邊の値は内周邊の値より小さい。尙ほ $\widehat{Z\theta}$ の値に比べると一般に小さい。

更にトルクは

$$Q = -\frac{1}{2} \tau G \int_{r_b}^{r_c} \int_0^{2\pi} r^2 \partial_r \Psi dr d\theta \dots \dots \dots (4)$$

$$\begin{aligned}
&= -n\tau G \int_0^{\pi/n} \left[r^2 \Psi \Big|_{r_b}^{r_c} - 2 \int_{r_b}^{r_c} r \Psi dr \right] d\theta \dots\dots\dots (4_1) \\
&= n\tau G \int_0^{\pi/n} r_c^2 \left\{ k \left[\frac{1}{a^n} - \frac{2 \cos n\theta}{(n-2)r_c^n} \right] - \frac{r_c^2}{2} + a^2 \right\} d\theta \\
&\quad - n\tau G \int_0^{\pi/n} r_b^2 \left\{ k \left[\frac{1}{a^n} - \frac{2 \cos n\theta}{(n-2)r_b^n} \right] - \frac{r_b^2}{2} + a^2 \right\} d\theta \\
&\quad - \tau G C_2 A \dots\dots\dots (4_2)
\end{aligned}$$

$$\text{但 } C_2 = [\Psi]_{\text{内周}} = a^2 - b^2 + k \left(\frac{1}{a^n} - \frac{1}{b^n} \right), \quad A = n \int_0^{\pi/n} r_c^2 d\theta$$

更に (4₂) は周邊條件式を入れて圖上積分を進めねばならない。只 $n=2$ の時には注意を要する。

4. 例 題

[1°] $n=1$ の場合

$$\Psi = k \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \cos \theta \right) - r^2 + a^2 \dots\dots\dots (5)$$

$a=1, k=1$ と置くと $[\Psi]_{\text{内周}}=0$ であるから、内周邊の半径 r_b は次式から得られる。但 $[r_b]_{\theta=0}=1$

$$r_b^3 - 2r_b + \cos \theta = 0 \dots\dots\dots (5_1)$$

外周邊の半径 $R_c = r_c/b$ は次式から求める。

$$K\left(1 - \frac{1}{R_c} \cos \theta\right) - R_c^2 + 1 = 0 \quad \dots\dots\dots (5_2)$$

茲に $K = k/b^3$ であつて假りに $K = 0.1$ と置くと $b = 2.1544$ となる故、 R_c は結局

$$10R_c^3 - 11R_c + \cos \theta = 0 \quad \dots\dots\dots (5_3)$$

から得られる。但 $[R_c]_{\theta=0} = 1$ 或は $[r_c]_{\theta=0} = b = 2.1544$

$$\begin{aligned} \therefore [\Psi]_{\text{外周}} &= C_2 = a^2 - b^2 + k\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \\ &= -3.1058 \quad \dots\dots\dots (5_4) \end{aligned}$$

求めた断面は肉厚一様でない中空圓形である。第5圖参照。尙ほ圖中には $Z\theta/\tau G$ の値を示して置いた。第6圖は周邊上の應力を示して居る。最大應力は薄肉部 $\theta = \pi$ で外周邊上にかかる。

[2°] $n=2$ の場合

$$\Psi = k\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \cos 2\theta\right) - r^2 + a^2 \quad \dots\dots\dots (5_5)$$

$a=1$ と置くと $k=1$ ならば $K=1$ 、又 $k=0.8$ ならば $K=0.8$ となる。又 $[\Psi]_{\text{内周}} = 0$ 、 $[\Psi]_{\text{外周}} = -0.6833$ 及 -0.6 と置くと夫々第7圖及第8圖の如き橢圓中空形が得られる。又應力は夫々第9圖及第10圖に示す通りになる。即ち最大應力は薄肉部の外周上にかかる。

第6圖 $n=1, K=1$ の場合

第7圖 $n=2, K=1$

第8圖 $n=2, K=0.8$

第9図 $n=2, K=1$

第10図 $n=2, K=0.8$

[3°] $n=3$ の場合

$$\Psi = k \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{r^3} \cdot \cos 3\theta \right) - r^2 + a^2 \dots \dots \dots (5_0)$$

第11図 $n=3, K=2/3$

第12図 $n=3, k=1$

第13図 $n=3, K=2/3$

第14図 $n=3, k=1$

$a=1, k=2/3$ 従つて $K=2/3$ と置くと $[r_b]_{\theta=0}=1$ 又 $[r_c]_{\theta=0}=1.32$ に取ると $[\Psi]_{\text{外周}}=-0.3368$ となる。然し $a=1, k=1$ 従つて $K=1$ に置いても $[r_b]_{\theta=0}=1.178$ となり、 $[r_c]_{\theta=0}=1.373$ に取ると $[\Psi]_{\text{外周}}=-0.2735$ となる。第 11 及 12 圖は此の 2 つの場合の断面形を示し、第 13 及 14 圖は夫々周邊上の應力を示して居る。何れも外周上 $\theta=\pi/3$ で最大應力が起る。

[4°] $n=4$ の場合

$$\Psi = k \left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{r^4} \cdot \cos 4\theta \right) - r^2 + a^2 \dots \dots \dots (5)$$

今 $a=1, k=1/2$ と置くと $[r_b]_{\theta=0}=1, [\Psi]_{\text{外周}}=-1.5$ と置くと $[r_c]_{\theta=0}=1.714$ 第 15 圖参照。次に $a=1, k=1$ と置くと $[r_b]_{\theta=0}=1.272, [\Psi]_{\text{外周}}=-0.3794$ と置くと $[r_c]_{\theta=0}=1.47$ となる。第 16 圖參

第15圖 $n=4, k=1/2$

第16圖 $n=4, k=1$

第17圖 $n=4, k=1/2$

第18圖 $n=4, k=1$

照。尚ほ應力は周邊上で第17及18圖に示す通りとなる。

5. む す び

茲に取扱つた應力函数は基準圓内では成立しないが此の圓外で成立する。従つて普通の曲邊正多角形の中空断面とは異り、内周形よりも外周形の方が丸味を持つて来る。此故に假りに第2種曲邊正多角形と名附ける。圖形は n 軸對稱形であるから、各 n 個の厚肉部と薄肉部と存在する。

應力中 $\widehat{Zr}$ は大體に於て $\widehat{Z\theta}$ より小さく、兩周上に於て $\theta=0$ 及 $\theta=\pi/n$ で $\widehat{Zr}$ は消失する。兩周上で $\widehat{Z\theta}$ は $\theta=0 \rightarrow \pi/n$ に到るに伴れて増大し、外周上の値は同一角度に對して内周の値よりも常に大である。即ち兩周上では厚肉部で最小で、薄肉部で最大である。従つて外周上最薄肉部で $\widehat{Z\theta}$ は最大となる。此の點は $\theta=\pi/n$ で断面の原點より最も離れて居る。原點に最も近き點即ち最厚部で内周上内向き頂點では應力は反つて輕小となる。

(昭和10年6月30日)

討 論

○會長代理(平賀讓君) 何方か御質問、又は御討論は御座いませんか。……御質問がありません様ですから、私から一言申し上げます。澤田君の引續いての有益なる御研究に對し皆様と共に拍手を以て御禮申し上げます。(一同拍手)