圓弧及切込みを持つ斷面柱體の捩り應力

正員 工學士 澤 田 正 雄

Abstract.

Torsion Stress of a Rod having a Section with a Circular Arc and a Reentrant Angle.

By Masao SAWADA, *Kogakushi, Member.*

For the section enclosed by a spiral curve and a circular arc, we apply the following torsion stress function:—

$$\Psi = A(r^n - a^{2n}/r^n) \cos n\theta + B(r^{2n} - a^{4n}/r^{2n}) \cos 2n\theta - r^2 + a^2 \dots\dots\dots (1)$$

where

a = radius of a circle,

n = fraction or integer from 1/2 to 2,

A and B = constants concerning the shape of a section.

Boundary lines can be determined by solving the following equation with respect to r_b or $\cos n\theta$.

$$Ar_b^n(r_b^{2n} - a^{2n}) \cos n\theta + B(r_b^{4n} - a^{4n}) \cos 2n\theta - (r_b^2 - a^2)r_b^{4n} = 0.$$

The stresses are

$$\widehat{Zr}/\tau G = -\frac{1}{2}n \sin n\theta [Ar^n + 4B(r^{2n} + a^{2n}) \cos n\theta] (r^{2n} - a^{2n})/r^{2n+1},$$

$$\widehat{Z\theta}/\tau G = \left[r^2 - \frac{1}{2}nA(r^n + a^{2n}/r^n) \cos n\theta - nB(r^{2n} + a^{4n}/r^{2n}) \cos 2n\theta \right] / r.$$

It is necessary to trace the values of stresses on the boundary in our case. As to the crescent profile, the maximum value of $\widehat{Z\theta}$ occurs on the intersecting point of a circular arc and a polar axis, and that of $|\widehat{Zr}|$ does on the spiral or outer boundary between $\theta=0$ and $\theta=\theta_a$, where θ_a is the angle, at which two arcs of circle and spiral intersect each other. The shorter the radius of a circular arc, the greater the value of this maximum $\widehat{Z\theta}$ and consequently the profile becomes wider.

When the radius of a circle is reduced to zero, we get a reentrant profile, which is easily inferrable from (1). The stress function for this shape of profile is

$$\Psi = Ar^m \cos m\theta + Br^n \cos n\theta - r^2 \dots\dots\dots (2)$$

where

$$m \leq n, \quad 2 \geq m \text{ and } n \geq 1/2.$$

Table 1.

Profile	(A)	(B)	(C)	(D) no reentrant
m	$1/2 \leq m < 1$	$1/2 \leq m < 1$	$1/2 \leq m < 1$	$1 < m < 2$
n	$1/2 \leq n < 1$	$n = 1$	$1 < n \leq 2$	$1 < n \leq 2$
θ	$0 \rightarrow \pi/2m$	$0 \rightarrow \pi/2m$	$0 \rightarrow \pi/2m$	$0 \rightarrow \pi/2m$
$\widehat{Zr}$	$0 \rightarrow -\infty$	$0 \rightarrow -\infty$	$0 \rightarrow -\infty$	$0 \rightarrow \text{max. finite} \rightarrow 0$
$\widehat{Z\theta}$	finite $\rightarrow \infty$	finite $\rightarrow$ finite	finite $\rightarrow 0$	finite $\rightarrow 0$

The values of m and n depend upon the shape of profile. The variations of stresses along on the periphery are easily seen on Table 1. Severe stress is induced at the reentrant point as in the profiles (A), (B) and (C). This accumulation of intensive stress can easily be relieved by producing a small circular are in place or by rounding off the reentrant part to a small degree, which will be at once understood from the first description in this paper.

1. は し が き

極座標函数の應用に依る捩り問題は既に數回概論した。茲で再び三日月形及1箇の切込みある斷面柱體の捩り問題を更に述べる事とする。尤も斷面形は曩に述べたもの⁽¹⁾とは幾分異つて居る。殊に切込みある場合は工學上並に實際上に検討の價值あるものと思はれる。蓋し茲に採用した應力函数は平面調和関を2箇又は4箇組合せて求めたものである。巧みに係數を選ぶとタービン羽根、プロペラー、船殻、特殊カム軸等に應用出来る。

2. 三日月形斷面柱體

問題の斷面に對して次の應力函数を採る。

$$\Psi = A(r^n - a^n/r^n) \cos n\theta + B(r^{2n} - a^{2n}/r^{2n}) \cos 2n\theta - r^2 + a^2 \dots \dots \dots (1)$$

$$= a^n [Aa^{n-2}R^n \cos n\theta + Ba^{2n-2}(R^{2n} + 1) \cos 2n\theta - R^{2n}(R - 1)/(R^{2n} - 1)](R^{2n} - 1)/R^{2n} \dots \dots \dots (1_1)$$

茲に a = 圓弧の半径, $R = r/a$ $2 \geq n \geq 1/2$

A 及 B は斷面の特性恒數

捩り函数を ψ と置くと $\Psi = 2\psi - r^2$ であるから

$$\text{斷面内 } \nabla^2 \psi = 0, \text{ 周邊上 } \Psi = C \dots \dots \dots (1_2), (1_3)$$

(1₁) は (1) を單位圓 ($R=1$) に寫像した形である。斷面外周は極軸に對して對稱的であつて、圓弧 $R=1$ と次の渦卷曲線とで圍まれて居る。但 R_b は原點から周邊に到る半径である。

$$Aa^{n-2}R_b^n \cos n\theta + Ba^{2n-2}(R_b^{2n} + 1) \cos 2n\theta - R_b^{2n}(R_b^2 - 1)/(R_b^{2n} - 1) = 0 \dots (1_4)$$

上式中 ($R_b^2 - 1$) は ($R_b^{2n} - 1$) で割り切れるか又は兩項中に共通因子が存在する 従つて (1₄) を R_b 又は cosine に就いて解くと斷面形は求めらる。只 $R_b > 1$ で常に渦卷曲線の半径は圓弧半径より大であり、 $R_b = 1$ では圓弧と曲線とが交はる。其交點の極軸に對して張る角 θ_a は亦 (1₄) から求めらる。

τ 及 G を例の通り材料係數とすると應力は次の通りである。

$$\widehat{Zr}/\tau G = \frac{1}{2} \partial_\theta (\Psi/r)$$

⁽¹⁾ 造船協會會報 第56號 昭和10年6月刊行

$$= -\frac{1}{2}n \sin n\theta [Ar^n + 4B(r^{2n} + a^{2n}) \cos n\theta] (r^n - a^{2n}) / r^{2n+1} \dots (1_5)$$

$$\begin{aligned} \widehat{Z\theta} / \tau G &= -\frac{1}{2} \partial_r \Psi \\ &= \left[r^2 - \frac{1}{2} n A (r^n + a^{2n} / r^n) \cos n\theta - n B (r^{2n} + a^{4n} / r^{2n}) \cos 2n\theta \right] / r \dots (1_6) \end{aligned}$$

(1₅) から明かな通り 圆弧上及極軸上では

$$[\widehat{Zr}]_{r=a} = [\widehat{Zr}]_{\theta=0} = 0 \dots (1_7)$$

従つて $\widehat{Zr}$ は渦巻曲線上では $\theta=0$ と $\theta=\theta_a$ との間で最大値が存在する。断面が極軸に沿うて細長い時は $[\widehat{Zr}]_{\max}$ は $[\widehat{Z\theta}]_{\max}$ より大となる。次に

$$[\widehat{Z\theta}]_{\theta=\theta_a} = 0 \dots (1_8)$$

渦巻曲線上で $\theta=0$ の點では $\widehat{Z\theta}$ は最大となる。又圆弧上では

$$[\widehat{Z\theta} / \tau G]_{r=a} = a [1 - n A a^{n-1} \cos n\theta - 2n B a^{2n-2} \cos 2n\theta] \dots (1_9)$$

$$[\widehat{Z\theta} / \tau G]_{r=a}^{\theta=0} = -a (n A a^{n-1} + 2n B a^{2n-2} - 1) \dots (1_{10})$$

従つて $[\widehat{Z\theta}]_{\max}$ は圆弧上 $\theta=0$ 點に存在し、渦巻曲線上の $\widehat{Z\theta}_{\max}$ よりも大である。

次にトルクは

$$Q = -\tau G \int_0^{\theta_a} \int_a^{r_b} r^2 \partial_r \Psi dr d\theta \dots (1_{11})$$

$$\begin{aligned} &= 2\tau G \int_0^{\theta_a} \left[A \left(\frac{r_b^{n+2} - a^{n+2}}{n+2} - \frac{a^{2n} r_b^{-n+2} - a^{n+2}}{n-2} \right) \cos n\theta \right. \\ &\quad + B \left(\frac{r_b^{2n+2} - a^{2n+2}}{2n+2} - \frac{a^{4n} r_b^{-2n+2} - a^{2n+2}}{2n-2} \right) \cos 2n\theta \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} (r_b^2 - a^2)^2 \right] d\theta \dots (1_{12}) \end{aligned}$$

何れも圖上積分に依ると宜しく、 $n=2$ の時は注意を要する。

3. 例 題

次に $a=1$ と置いて二三の例題を擧げる事とする。

[1°] $n=1$ の場合

$$\Psi = [Ar \cos \theta + B(r^2 + 1) \cos 2\theta - r^2] (r^2 - 1) / r^2 \dots (2)$$

$$r_b = \{ A \cos \theta \pm [A^2 \cos^2 \theta + 4B \cos 2\theta (1 - B \cos 2\theta)]^{\frac{1}{2}} \} / 2(1 - B \cos 2\theta) \dots (2_1)$$

$$2 \text{ 曲線の交點角 } \theta_a = [-A \pm (A^2 + 6B + 32B^2)^{\frac{1}{2}}] / 8B \dots (2_2)$$

第 1 圖

第 2 圖

第 3 圖

第 4 圖

第 5 圖

第 6 圖

第1圖及第2圖は $A=1, B=0.2$ の場合、第3圖及第4圖は $A=2, B=0.5$ の場合、第5圖及第6圖は $A=2$ 及 $B=-0.1$ の場合の断面形と周邊上應力とを夫々示して居る。斯様に A 及 B の正負及數値に依り種々の断面形が得られる。何れの場合も圓弧上 $\theta=0$ の點の應力が最大である。

[2°] $n=1/2$ の場合

$$\Psi = [r^{\frac{1}{2}} \cos \theta / 2 + B(r+1) \cos \theta - (r+1)r](r-1)/r \dots\dots\dots (2_3)$$

曲線上の半徑を與へて角度を求めると

$$\cos \theta / 2 = \{ -Ar_b^{\frac{1}{2}} \pm [A^2 r_b + 8B(r_b+1)^2(B+r_b)]^{\frac{1}{2}} \} / 4B(r_b+1) \dots\dots\dots (2_4)$$

$$\therefore \cos \theta_a / 2 = -A/8B \pm [(A/8B)^2 + (1+B)/2B]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (2_5)$$

第7圖及第8圖は $A=4, B=0.2$ の場合、又第9圖及第10圖は $A=2, B=5$ の場合の断面形及周邊上應力を示して居る。

第 7 圖

第 8 圖

第 9 圖

第 10 圖

[3°] $n=1/4$ の場合

$$\Psi = [Ar^{\frac{1}{4}} \cos \theta/4 + B(r^{\frac{1}{2}} + 1) \cos \theta/2 - r^{\frac{1}{2}}(r+1)(r^{\frac{1}{2}}+1)](r^{\frac{1}{2}}-1)/r^{\frac{1}{2}} \dots (2_6)$$

$$\cos \theta/4 = \left\{ -A \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x} \pm \left[\left(\frac{Ax^{\frac{1}{2}}}{1+x} \right)^2 + 8B(x+x^3) + 8B^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} / 4B \dots (2_7)$$

$$\text{但 } x = r_b^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \cos \theta_a/4 = \{ -A/2 \pm [(A/2)^2 + 16B + 8B^2]^{\frac{1}{2}} \} / 4B \dots (2_8)$$

第 11 圖及第 12 圖は $A=4$, $B=3$ の場合の断面形及周邊上應力を示して居る。

第 11 圖

第 12 圖

4. 切込みある断面柱體

三日月形断面で圆弧半径 a を漸次小さくすると、断面は肥えて来る。外周は圓形、橢圓形、團扇形等で小圆弧溝を持つものとなる。圆弧と極軸との交點に於ける應力も段々増大して来る。今 (1) に於て $a=0$ と置くと、断面は極心に於て切込みあるものとなる。特に $1/2 \leq n \leq 2$ ならば

$$\Psi = Ar^n \cos n\theta + Br^{2n} \cos 2n\theta - r^2 \dots (3)^{(2)}$$

(3) から種々の断面が得られるが、更に一般的に次の形を探る。

$$\Psi = Ar^m \cos m\theta + Br^n \cos n\theta - r^2 \dots (3_1)$$

$$\text{茲に } 2 \geq m \text{ \& } n \geq 1/2, \quad m \leq n$$

⁽²⁾ W. M. Shepherd: "Engineering," 1927-7-12 p. 39. $\Psi = 2^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} r^{\frac{1}{2}} \sin \theta/2 - ar \cos \theta - r^2$

C. Weber: "Fors.-Arbeit," Heft 249, 1921.

$$\Psi = \frac{1}{2} a^{\frac{4}{3}} r^{\frac{2}{3}} \cos 2\theta/3 + 2ar \cos \theta - r^2$$

何れも切込みある断面を論じて居る。

断面外周は $\Psi=0$ と置いて次式を解くと求められる。

$$A \cos m\theta + Br_b^{n-m} \cos n\theta - r_b^{2-m} = 0 \dots\dots\dots (3_2)$$

應力は

$$\widehat{Zr}|_{\tau G} = -\frac{1}{2}[mA r^m \sin m\theta + nB r^n \sin n\theta]/r \dots\dots\dots (3_3)$$

$$\widehat{Z\theta}|_{\tau G} = \left[r^2 - \frac{1}{2}mA r^m \cos m\theta - \frac{1}{2}nB r^n \cos n\theta \right]/r \dots\dots\dots (3_4)$$

原点を除き極軸上では

$$[\widehat{Zr}]_{r=r_0}^{\theta=0} = 0 \dots\dots\dots (3_5)$$

$$[\widehat{Z\theta}|_{\tau G}]_{r=r_0}^{\theta=0} = r - \frac{1}{2}mA r^{m-1} - \frac{1}{2}nB r^{n-1} \dots\dots\dots (3_6)$$

周邊に沿うて $\theta=0$ から $\theta=\pi/2m$ 即ち極心迄の應力の變化は第1表の通りである。即ち断面形 (A), (B) 及 (C) では $|\widehat{Zr}|$ は 0 から増大して切込み點で ∞ となる。 $\widehat{Z\theta}$ は一般に $\theta=0$ で有限値

第1表 周邊上の應力變化 但 $m < n$

断 面 形	(A) 切込みあり	(B) 切込みあり	(C) 切込みあり	(D) 切込みなし
m	$1/2 \leq m < 1$	$1/2 \leq m < 1$	$1/2 \leq m < 1$	$1 < m < 2$
n	$1/2 \leq n < 1$	$n = 1$	$1 < n \leq 2$	$1 < n \leq 2$
θ	$0 \rightarrow \pi/2m$	$0 \rightarrow \pi/2m$	$0 \rightarrow \pi/2m$	$0 \rightarrow \pi/2m$
$\widehat{Zr}$	$0 \rightarrow -\infty$	$0 \rightarrow -\infty$	$0 \rightarrow -\infty$	$0 \rightarrow \text{最大値} \rightarrow 0$
$\widehat{Z\theta}$	有限値 $\rightarrow \infty$	有限値 $\rightarrow$ 有限値	有限値 $\rightarrow 0$	有限値 $\rightarrow 0$

を採り、 θ の増すに伴れて減少する。然し切込み點で (A) 形では ∞ 、(B) 形で有限値、(C) 形では 0 となる。圓扇形では $|\widehat{Zr}|$ は 0 から最大値を徑て極心で 0 となる。 $\widehat{Z\theta}$ は何れも有限値から減少して極心で 0 となる。従つて一般に應力は切込み點で著く大であり、突出點で作用しない事となる。又 (A), (B) 及 (C) 形に於ても $m=1/2$ に近寄ると、假令切込みは淺くとも、切込み度合が鋭くなる。従つて $m=1/2$ の場合は切込み度合が最も鋭くなる。即ち周邊曲線の切線方向が此場合極心に於て極軸と一致する時、應力は著しく切込み點に集中する事となる。

實際に車軸を圓形に仕上げて、其表面に多數の微小凹凸がある。若し微小凹部が丸味なき鋭い切込み形ならば應力は茲に著しく集中して材質の降伏を起す事は當然である。従つて車軸表面を充分研磨して圓滑にするは必要である。又車軸に淺い龜裂を發生した場合には丸溝を穿つて應力の集中を避け、龜裂の進行を防止するのは當然の對策である。

次にトルクは勿論圖上積分に依る可きである。

$$Q = 2\tau G \int_0^{\pi/2m} \left(\frac{A}{m+2} r_b^{m+2} \cos m\theta + \frac{B}{n+2} r_b^{n+2} \cos n\theta - \frac{1}{4} r_b^4 \right) d\theta \dots\dots\dots (3_7)$$

$$= 2\tau G \int_0^{\pi/2m} \left[\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{4} \right) r_b^4 + A \left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{n+2} \right) r_b^{m+2} \cos m\theta \right] d\theta \quad \dots (3_8)$$

更に断面の重心に於ける $|\Psi|$ の値よりも小さい値 $|C| \neq 0$ を (3) に加へると

$$\Psi = Ar^m \cos m\theta + Br^n \cos n\theta - r^2 + C \dots \dots \dots (3_9)$$

(3₉) は切込み點で丸味を持つ断面形の應力函数である。斯かる断面の凹所では應力は餘り増大しない。凹所の丸味が大きい程其凹所の底の應力は逆に減少する。

5. 例 題

今二三の簡単な断面形と周邊應力とを圖示する事とする。

[1°] $m=1/2, n=3/4$ の場合

$$\Psi = Ar^{1/2} \cos \theta / 2 + Br^{3/4} \cos 3\theta / 4 - r^2 \dots \dots \dots (4)$$

半径 $r_b = x^2$ は次式から求められる。

$$A \cos \theta / 2 + Bx^{3/2} \cos 3\theta / 4 - x^3 = 0 \dots \dots \dots (4_1)$$

第 13 圖及第 14 圖は $A=2, B=1$ の場合の断面形と周邊應力とを示して居る。此場合切込み點で 2 應力は共に著しく大となる。

第 13 圖

第 14 圖

[2°] $m=1/2, n=1$ の場合

$$\Psi = Ar^{1/2} \cos \theta / 2 + Br \cos \theta - r^2 \dots \dots \dots (4_2)$$

$$\therefore \cos \theta / 2 = \{ -A \pm [A^2 - 8B(Br + r^2)]^{1/2} \} / 4Br^{1/2} \dots \dots \dots (4_3)$$

第 15 圖及第 16 圖は $A=1, B=2$ の場合の断面形及周邊應力を示して居る。切込み點では $|\widehat{Zr}|$ のみが著しく大きい。

第 15 圖

第 16 圖

[3°] $m=1/2, n=2$ の場合

$$\Psi = Ar^{\frac{1}{2}} \cos \theta / 2 + Br^2 \cos 2\theta - r^2 \dots \dots \dots (4_1)$$

$$\therefore r_0 = [A \cos \theta / 2 / (1 - B \cos 2\theta)]^{\frac{2}{3}} \dots \dots \dots (4_2)$$

第 17 圖及第 18 圖は $A=1, B=1/2$ の場合の断面形及周邊應力を示して居る。切込み點で $\widehat{Z\theta}$ は有限値を取り、 $|\widehat{Zr}|$ は著しく大きい。

第 17 圖

第 18 圖

[4°] $m=3/4, n=3/2$ の場合

$$\Psi = Ar^{\frac{3}{4}} \cos 3\theta / 4 + Br^{\frac{3}{2}} \cos 3\theta / 2 - r^2 \dots \dots \dots (4_3)$$

$$\cos 3\theta / 4 = [-A \pm (A^2 + 8B^{\frac{3}{2}} r^{\frac{3}{2}} + 8Br^2)^{\frac{1}{2}}] / 4Br^{\frac{3}{4}} \dots \dots \dots (4_4)$$

第 19 圖及第 20 圖は $A=8, B=2$ の場合の断面形及周縁應力を示して居る。

第 19 圖

第 20 圖

[5] $m=5/4, n=3/2$ の場合

$$\Psi = Ar^{\frac{5}{4}} \cos 5\theta/4 + Br^{\frac{3}{2}} \cos 3\theta/2 - r^2 \dots \dots \dots (4_s)$$

半径 $r_0 = x^4$ は次式から求める。

$$A \cos 5\theta/4 + Bx \cos 3\theta/2 - x^3 = 0 \dots \dots \dots (4_3)$$

第 21 圖及第 22 圖は $A=2, B=2$ の断面形及周縁應力を示して居る。此圓扇形では $|Zr|$ は極軸の両端で 0 であつて中間に最大値が存在し、而も $Z\theta_{\max}$ よりも大である。

第 21 圖

第 22 圖

6. む す び

極座標函數を數箇組合はすと種々の圖形が得られる。

(i) 三日月形断面——断面の兩尖端では應力は作用しない。又圓弧上でも $\widehat{Zr}$ は作用しない。周邊と極軸との2交點に於ける應力は最大であるが、圓弧上の $|\widehat{Z\theta}|_{\max}$ は外周上の $\widehat{Z\theta}_{\max}$ より大である。圓弧半径が小さくなる程断面は肥えて來て、圓弧上の $|\widehat{Z\theta}|_{\max}$ は段々増大する。圓弧半径が零となると断面は極心で切込みを生ずる。

(ii) 切込みある断面——調和解の order 數 m 及 n が夫々 $1/2 \leq m < 1$, $1/2 < n \leq 2$ の場合に限り断面は1箇の切込みを持つ。周邊に沿ふ應力中 $\widehat{Z\theta}$ は $\theta=0$ から切込み點に到るに伴れて有限値から減少するが、特に $1/2 < n < 1$ の場合には切込み點で ∞ となる。 $|\widehat{Zr}|$ は $\theta=0$ から増大して切込み點で ∞ となる。此切込み度合は $m=1/2$ の時最も鋭く、周邊上の切線が極心で極軸と一致する事となる。従つて此際應力は最惡の結果を與へる。切込みは如何に小さくとも、過大の應力を誘起するから極力丸味を附す可きである。

(iii) 團扇形——解の order 數 m 及 n が1と2との間ならば断面は1箇の突起を持つ團扇形、木の葉形等となる。突出點では應力は作用しない。周邊上の應力として $[\widehat{Z\theta}]_{\theta=0}$ と $[\widehat{Zr}]_{\max}$ とを吟味すると宜しい。

(昭和10年11月30日)