(昭和十三年十一月六日造船協會講演會に於て講演)

孔縁材の有効高さに就いての一考察

(船體構造部分の不連續箇所における應力集中に關する研究。第四報)

正員 工學士 太 田 友 彌*

Abstract.

Some Considerations on the Effective Height of Coaming Plates.
(Investigations on the Stress Concentration at Discontinuities in Ship Structures.
Report 4.)

By T. Ohta, *Kogakusi, Member.*

In my previous paper [J. of Zosen Kiokai, vol. 62 (1938)], the effect of coaming plates on the stress distribution in a perforated plate were treated, but nothing about the effective height of coaming plates. So the present paper deals with said latter points analytically, and some practical examples are solved by using the derived formulae. The conclusion is to give an effective height of coaming plates, in case of a perforated plate under all round tension, by the following expression,

$$\frac{h_e'}{r_0} = \frac{1}{1-\nu} \frac{t'}{t} \frac{1-\frac{1-\nu}{1+\nu} \left[\frac{2\gamma}{\gamma\{\lambda+(1-\nu)\} + 1.52\lambda^{\frac{2}{3}}\chi} \right]}{1 + \left[\frac{2\gamma}{\gamma\{\lambda+(1-\nu)\} + 1.52\lambda^{\frac{2}{3}}\chi} \right]}$$

where

 h_e' = effective height of a coaming plate. r_0 = radius of a circular hole. t' = thickness of a perforated plate. t = thickness of a coaming plate. ν = Poisson's ratio. $\gamma = t'/r_0$. $\lambda = t/r_0$.

$$\chi = \frac{\tan \alpha \operatorname{sech}^2 \alpha + \tanh \alpha \sec^2 \alpha}{\operatorname{sech}^2 \alpha + \sec^2 \alpha},$$

in which $\alpha = 1.316 \frac{l}{\sqrt{r_0 t}}$, $2l$ being the total height of a coaming plate.

目 次

第 四 報	
IV. 一樣なる引張りを受ける圓孔板の孔縁材の有効高さ	
§ 1. 前言	
§ 2. 計算の理論	
i) 一樣なる引張りを受ける板の應力	
ii) 孔縁材を薄肉圓濤と考へた場合	

iii) 孔縁材を圓環と考へた場合	
iv) 有効斷面と有効高さ	
§ 3. 數値計算	
§ 4. 孔縁材に附せる防撓材の影響	
§ 5. 結言	
附錄 1) 一樣なる引張りを受ける圓孔板の應力と變位	
2) 薄肉圓濤の變形の式	

* 大阪帝國大學助教授 (工學部)

§1. 前 言

前報に於ては、孔縁材の有効断面なるものを考へ、夫れと全く同じ断面を有つ圓環を以つて、孔縁材を代表して孔縁材が板の應力分布に及ぼす影響を計算したのであつたが、其の際有効断面なるものの定義及び大きさ等に就いては少しも觸れなかつた。依つて本論では、此の點に就いて一二の考察を加へて見たのである。後で知る様に孔縁材の有効断面とは、所謂板の有効幅なるものと能く似た意味のものであるが、其の算定は前報で取扱つた荷重の働く場合では——著者が當つて見た所では——極めて粗雑な計算でない限り鳥渡容易ではない様である。依つて本論では差當り有効断面なるものの凡その値でも知る目的を以つて、最も簡単な荷重の働く場合、即ち一様の引張りが働く場合に對して計算を行つて見たのである。其の結果判つた主なる事を先に摘記すれば次の如くである。

- i) 孔縁材の厚さを増してやる事は應力集中の緩和には大いに役立つ。
- ii) 現行寸法の孔縁材は應力集中の緩和材としては、大して役立つてゐる様に思はれぬ。

§2. 計 算 の 理 論

i) 一様なる引張りを受ける板の應力

前報同様第1圖に示す如く圓孔の中心に座標原點を採り、 xy 軸を板面内に、 z 軸を夫れに直角に採る。而して板面上の任意の點の座標 xy を前報 (1) 式の $3ae^a$ を r と置いて次の如く極座標を以つて表はす。

$$x = r \cos \beta, \quad y = r \sin \beta$$

然る時は、無限遠に於て一様なる引張り T が働く場合には、板の應力と變位は〔附録 (3), (4), (5) 式参照〕

$$\widehat{\alpha\alpha} = T + \frac{A_0}{r^2} \dots \dots \dots (1)$$

$$\widehat{\beta\beta} = T - \frac{A_0}{r^2} \dots \dots \dots (2)$$

$$u = \frac{T(1-\nu)}{E} r - \frac{1+\nu}{E} \frac{A_0}{r} \dots \dots \dots (3)$$

但し、上式中

$\widehat{\alpha\alpha}$ = 半徑方向の直應力。 $\widehat{\beta\beta}$ = 半徑に直角な方向の直應力。

u = 半徑方向の變位。 E = ヤング率。

ν = ポアソンの比。 A_0 = 未知常數。

で與へられる。

第 1 圖

一方孔縁材に就いては、其の高さが厚さに比べて大なる場合と、厚さと同程度の場合とでは、茲に記す程度の略計算では、一緒に計算して行く事が出来ないので、計算の假定を變へて別箇に論ずる事にする。即ち前者に對しては孔縁材を薄肉圓壻と看做して、其の理論を、後者に對しては孔縁材を圓環と看做して、其の理論を夫々應用する。孰れの場合も前報同様孔縁材の厚さは孔の大きさに比べて小なるものとする。

ii) 孔縁材を薄肉圓壻と考へた場合

孔縁材を薄肉圓壻と考へると、圓壻の半徑方向の變位 u_c は〔附録 (23) 式参照〕

$$u_c = A \cos \alpha \zeta \cosh \alpha \zeta + B \sin \alpha \zeta \cosh \alpha \zeta \\ + C \cos \alpha \zeta \sinh \alpha \zeta + D \sin \alpha \zeta \sinh \alpha \zeta \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$\text{茲に、} \quad \alpha = 1.316 \frac{l}{\sqrt{r_0 t}} \quad \zeta = z/l$$

$$l = \text{薄肉圓壻の全長の } 1/2 \quad r_0 = \text{薄肉圓壻の半徑}$$

$$t = \text{薄肉圓壻の厚さ} \quad A, B, C, D = \text{未知常數}$$

で與へられる。

依つて、(1)~(4) 式の未知常數を、圓壻と板との附根及び圓壻の自由端に於ける境界條件、即ち $z=0$ ($\zeta=0$), $r=r_0$ に於て、

$$u = u_c \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$\frac{du_c}{dz} = 0 \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$F_z - \frac{N_\beta}{r_0} \frac{t'}{2} + \alpha \widehat{\alpha} \frac{t'}{2} = 0, \quad \text{但し } z > 0^{(1)} \quad \dots \dots \dots (7)$$

$z=l$ ($\zeta=1$) に於て

$$\frac{d^2 u_c}{dz^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$\frac{d^3 u_c}{dz^3} = 0 \quad \dots \dots \dots (9)$$

上式中、

F_z = 圓壻の軸に直角な斷面に於て、半徑方向に働く單位長さに就いての剪斷力

$$= - \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^3 u_c}{dz^3}$$

N_β = 圓壻の軸を含む平面で截つた斷面に於て圓周方向に働く單位長さに就いての垂直力

$$= \frac{Et}{1-\nu^2} \frac{\mu_c}{r_0}$$

⁽¹⁾ $z < 0$ では $-F_z - \frac{N_\beta}{r_0} \frac{t'}{2} + \alpha \widehat{\alpha} \frac{t'}{2} = 0$.

t' = 外部の板の厚さ

に依つて決めてやれば問題は解決する。依つて (1), (3), (4) 式を上記諸式に代入してやれば

$$\frac{T(1-\nu)}{E} r_0 - \frac{1+\nu}{E} \frac{A_0}{r_0} = A \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$B + C = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{t'}{r_0} \left\{ \frac{t}{r_0} + (1-\nu) \right\} A + \frac{2}{3} \frac{Et^3}{1-\nu^2} \left(\frac{\alpha}{l} \right)^3 B - \frac{2Tt'}{1-\nu} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$A \sin \alpha \sinh \alpha - B \cos \alpha \sinh \alpha + C \sin \alpha \cosh \alpha - D \cos \alpha \cosh \alpha = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$A (\sin \alpha \cosh \alpha + \cos \alpha \sinh \alpha) + B (\sin \alpha \sinh \alpha - \cos \alpha \cosh \alpha) \\ + C (\sin \alpha \sinh \alpha + \cos \alpha \cosh \alpha) + D (\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha) = 0 \quad \dots\dots (14)$$

となる。故に之を解けば、

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{Tr_0^2(1-\nu)}{1+\nu} \left[1 - \frac{2\gamma}{\gamma\{\lambda+(1-\nu)\} + \frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^3\chi} \right] \\ A &= \frac{2Tr_0(1-\nu)\gamma}{E} \frac{1}{\gamma\{\lambda+(1-\nu)\} + \frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^3\chi} \\ B &= \frac{2Tr_0(1-\nu)\gamma}{E} \frac{\chi}{\gamma\{\lambda+(1-\nu)\} + \frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^3\chi} \\ C &= -B \\ D &= \frac{2Tr_0(1-\nu)\gamma}{E} \frac{\operatorname{sech}^2 \alpha - \sec^2 \alpha}{\gamma\{\lambda+(1-\nu)\}(\operatorname{sech}^2 \alpha + \sec^2 \alpha) + \frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^3(\tan \alpha \operatorname{sech}^2 \alpha + \tanh \alpha \sec^2 \alpha)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\text{但し、} \quad \chi = \frac{\tan \alpha \operatorname{sech}^2 \alpha + \tanh \alpha \sec^2 \alpha}{\operatorname{sech}^2 \alpha + \sec^2 \alpha}$$

$$\gamma = t'/r_0 \quad \lambda = t/r_0 \quad \mu = l/t$$

従つて、是等を (1)~(4) 式に代入してやれば、板面上の任意の點の應力或は孔縁材の變形等が得られる。其中本論に必要なのは板と孔縁材の附根に於ける應力で、夫れは

$$(\widehat{\alpha\alpha})_{r=r_0} \left/ \begin{array}{l} T=1+\frac{1-\nu}{1+\nu} \left[1 - \frac{2\gamma}{\gamma\{\lambda+(1-\nu)\} + \frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^3\chi} \right] \end{array} \right. \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$(\widehat{\beta\beta})_{r=r_0} \left/ \begin{array}{l} T=1-\frac{1-\nu}{1+\nu} \left[1 - \frac{2\gamma}{\gamma\{\lambda+(1-\nu)\} + \frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^3\chi} \right] \end{array} \right. \quad \dots\dots\dots (17)$$

で與へられる。但し、上式は孔縁材の高さが厚さに比べて大と云ふ假定の下に導いた式であるから、 $l \approx 0$ 附近のものには當嵌まらない。例へば、孔縁材の高さ即ち l を零に近付けば當然 $(\widehat{\alpha\alpha})_{r=r_0}$ も零に近づくべきであるが、(16) 式の $(\widehat{\alpha\alpha})_{r=r_0}$ は零とならず或る値に近づく。

iii) 孔縁材を圓環と考へた場合

今度は孔縁材を h_{et_0} なる断面を有つ圓環と考へると、圓環の半徑方向の變位 u_r は容易に判る様に

$$u_r = K \dots \dots \dots (18)$$

茲に、 K = 未知常數

で與へられる。

然るに圓環と板との附根、即ち $r = r_0$ に於ては

$$u = u_r \dots \dots \dots (19)$$

$$\frac{\bar{N}_\beta}{r_0} - \widehat{\alpha\alpha} \cdot t' = 0 \dots \dots \dots (20)$$

$$\text{茲に、} \bar{N}_\beta = \text{圓環の断面に直角に働く引張力} = Eh_{et_0} \frac{u_r}{r_0}$$

なる境界條件が成立せねばならぬから、依つて之に (1), (3) 及び (18) 式を代入してやれば、

$$K = \frac{Tr_0(1-\nu)}{E} - \frac{1+\nu}{E} \frac{\bar{A}_0}{r_0}$$

$$\frac{Eh_{et_0}}{r_0^2} K - \left(T + \frac{\bar{A}_0}{r_0^2} \right) t' = 0$$

となる。但し、薄肉圓環の場合と區別する爲めに (1) 式中の未知常數 A_0 を $\bar{A}_0$ で表はした。

依つて、之を K 及び $\bar{A}_0$ に就いて解けば、

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= -Tr_0^2 \frac{1 - (1-\nu) \frac{h_{et_0}}{r_0 t'}}{1 + (1+\nu) \frac{h_{et_0}}{r_0 t'}} \\ K &= \frac{2Tr_0}{E} \frac{1}{1 + (1+\nu) \frac{h_{et_0}}{r_0 t'}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

従つて、是等を (1), (2) 式に代入してやれば板面上の任意の點の應力が判る。其の内で圓環と板との附根に於ける應力は

$$(\widehat{\alpha\alpha})_{r=r_0} = T \left\{ 1 - \frac{1 - (1-\nu) \frac{h_{et_0}}{r_0 t'}}{1 + (1+\nu) \frac{h_{et_0}}{r_0 t'}} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

$$(\widehat{\beta\beta})_{r=r_0} = T \left\{ 1 + \frac{1 - (1-\nu) \frac{h_e t_e}{r_0 t'}}{1 + (1+\nu) \frac{h_e t_e}{r_0 t'}} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

で與へられる。

iv) 有効断面と有効高さ

今圓孔板の孔縁材を或る断面を有つ圓環で置き換へた場合に、板の應力分布が前と變らなければ、斯様な圓環の断面を以つて孔縁材の有効断面と呼ぶ事にする⁽¹⁾。

詳しく云へば、今 $(\widehat{\alpha\alpha})_e$, $(\widehat{\alpha\beta})_e$ を孔縁材を薄肉圓環と考へた、即ち實際の場合の板と孔縁材との附根に於ける應力とし、 $(\widehat{\alpha\alpha})_r$, $(\widehat{\alpha\beta})_r$ を孔縁材を或る断面——之が求めんとする断面——を有つ圓環と考へた場合の附根の應力とすれば

$$(\widehat{\alpha\alpha})_r = (\widehat{\alpha\alpha})_e \dots\dots\dots (24)$$

$$(\widehat{\alpha\beta})_r = (\widehat{\alpha\beta})_e \dots\dots\dots (25)$$

となる様な圓環の断面を、考慮せる孔縁材の有効断面と定める。但し此の定義は理想的のものであつて、板の荷重状態に依つては必ずしも適用出来ない。本論で取扱ふ様な荷重の働く場合では (25) 式は不用で、従つて有効断面の高さ h_e と厚さ t_e は其の積 $h_e t_e$ さへ變らなければ、任意に採つて差支へないから、今厚さ t_e を常に孔縁材の厚さ t に等しく採るとすれば、夫れに對する高さが出て來る譯で、斯くして得られる高さを有効高さと呼ぶ事にする。

次に、之は後から判る様に、有孔板の厚さと、孔の寸法と、孔縁材の厚さとが與へられて居る場合に、孔縁材の高さを次第に増して行つたとすると、孔縁材と板との附根に於ける應力、例へば $(\widehat{\beta\beta})_{r=r_0}$ は夫れに伴つて次第に減少して行く。然し、孔縁材の高さが或る値に達すれば $(\widehat{\beta\beta})_{r=r_0}$ の減り方は急に僅かとなり、夫れ以後幾ら高さを増しても $(\widehat{\beta\beta})_{r=r_0}$ は殆んど減らなくなる。依つて此の時の高さを有効限界高さと呼ぶ事にする。此の高さは後出する第3圖の曲線から判る様に各人の裁量に依つて如何様にも採れるものであるが(然し大體の値は決まる)、夫れでは種々の寸法の孔縁材に對して區々となり、統一を缺く虞れがあるので、仍つて夫れと殆んど違はぬ所の無限大の高さを有つ孔縁材の有効高さを以つて有効限界高さとする事にする⁽²⁾。

偕、以上の定義に従へば、先づ孔縁材の有効断面 $h_e t_e$ は (24) 式に (16) と (22) 式を代入する事に依つて、次の如く與へられる。

$$\frac{h_e t_e}{r_0 t'} = \frac{1 - A_0'}{(1-\nu) + (1+\nu)A_0'} \dots\dots\dots (26)$$

⁽¹⁾ 寧ろ同等断面 (equivalent section) と名附けた方が妥當であらうが、前報との關係上斯く呼ぶ事とする。

⁽²⁾ 此の定義は板の有効幅の普通の定義と全く一致する。

$$\text{茲に、} \quad A_0' = \frac{1-\nu}{1+\nu} \left[\frac{2\gamma}{\gamma \{ \lambda + (1-\nu) \} + \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha}{\mu} \right)^3 \chi} - 1 \right]$$

$$\chi = \frac{\tan \alpha \operatorname{sech}^2 \alpha + \tanh \alpha \sec^2 \alpha}{\operatorname{sech}^2 \alpha + \sec^2 \alpha}$$

従つて、有効高さ h_e' は $t_e = t$ と置いて、

$$\frac{h_e'}{r_0} = \frac{t'}{t} \cdot \frac{1 - A_0'}{(1-\nu) + (1+\nu)A_0'} \dots\dots\dots (27)$$

故に、有効限界高さ h_c は

$$\frac{h_c}{r_0} = \frac{t'}{t} \cdot \frac{1 - (A_0')_{l=\infty}}{(1-\nu) + (1+\nu)(A_0')_{l=\infty}} \dots\dots\dots (28)$$

$$\text{茲に、} \quad (A_0')_{l=\infty} = \frac{1-\nu}{1+\nu} \left[\frac{2\gamma}{\gamma \{ \lambda + (1-\nu) \} + \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha}{\mu} \right)^3 \chi} - 1 \right]$$

で與へられる。

§3. 数 値 計 算

以上の諸式を以つて、次表に示す様な寸法の板の應力、或は孔縁材の有効高さ等を計算して見た。

$\gamma = \frac{\text{板の厚さ } (t')}{\text{孔の半径 } (r_0)}$	1/10	1/20	1/40	1/80	1/160
	1	2	4	8	16
$\frac{\lambda}{\gamma} = \frac{\text{孔縁材の厚さ } (t)}{\text{板の厚さ } (t')}$	1/2	1	2	4	8
	1/4	1/2	1	2	4
	1/8	1/4	1/2	1	2
	1/16	1/8	1/4	1/1	1

其の結果は第 2, 3, 4 圖に示してある。

第 2 圖の a), b), c), d), e) は縦軸に $(\widehat{\beta\beta})_{r=r_0}/T$ 或は $(\widehat{\alpha\alpha})_{r=r_0}/T$ を、横軸に l/r_0 (茲に l は孔縁材の全長の 1/2) を採つて、板の厚さ、孔の大きさ、及び孔縁材の厚さが與へられて居る場合に孔縁材の高さの大小に依つて $(\widehat{\beta\beta})_{r=r_0}$ が如何様に變るかを示したものである。實線は孔縁材を薄肉圓環と考へた場合、點線は圓環と考へた場合で、後者は原點附近に丈しか使用出来ない。

第 3 圖 a), b), c), d), e) は (27) 式に依る有効高さを示すもので、縦軸には有効高さを、横軸には $2l/r_0$ を採つてある。

此の圖に於いて $2l/r_0$ が無限大のものに相當する縦距が有効限界高さであつて、此の高さ以上に孔

縁材を高くする事は應力集中の緩和の目的には全く無意味な譯である。又圖中に原點より 45° の傾きを爲す點線が引いてあるが、其の點線より左の曲線部分は有効高さの定義から見て使用出来ない。防撓せる板の有効幅に就いては、柳本博士等の研究に依つて $30 \sim 50t$ (t は板の厚さ) と云つた簡単なものでない事が闡明されて居るが、夫れと同様孔縁材の有効高さに就いても、板の厚さのみの函数で與へる事は出来ない。孔の大きさ、孔縁材の厚さに依つても廣い範圍に變化する事は (28) 式が示す通りである。参考の爲め一例を示せば

$$\frac{t}{r_0} = \frac{1}{10}, \quad \frac{t'}{r_0} = \frac{1}{160} \quad \text{の時には} \quad h_c \doteq 88t'$$

$$\frac{t}{r_0} = \frac{1}{160}, \quad \frac{t'}{r_0} = \frac{1}{160} \quad \text{の時には} \quad h_c \doteq 24t'$$

である。

第 4 圖 a) は厚さと、孔の大きさが與へられてゐる板に、無限大の高さの孔縁材を附けて、其の厚さを種々變へた場合に $(\beta\beta)_{r=r_0}$ 或は $(\alpha\alpha)_{r=r_0}$ が如何様に變るかを示したものである。

第 4 圖 b) は板の厚さと、孔の大きさが與へられた時に、孔縁に於ける應力を平均應力以下に留める孔縁材の寸法を與へる設計圖表とも云ふべきものである。即ち、圖中の ① 曲線は (16) 或は (17) 式に於て、

$$\text{或は} \quad \left. \begin{aligned} (\alpha\alpha)_{r=r_0} &= T \\ (\beta\beta)_{r=r_0} &= T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

としたものより得られる γ と λ の關係、即ち

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \frac{\lambda^{\frac{5}{2}}}{1+\nu-\lambda}, \quad \lambda \ll 1 \quad \dots\dots\dots (30)$$

を γ を横軸に、 λ を縦軸に採つて置點したものである。

② 曲線は (28) 式に (30) の關係を代入して得られる。

$$\frac{h_c}{r_0} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{(1-\nu)(1+\nu-\lambda)}, \quad \lambda \ll 1 \quad \dots\dots\dots (31)$$

なる式を、 h_c/r_0 を横軸に、 λ を縦軸に採つて置點したものである。

此の圖の使用法は、今板の厚さと、孔の大きさが判つて居れば、 t'/r_0 が判るから、横軸上の其の t'/r_0 に對する ① 曲線の縦距を讀めば、孔縁材の厚さが判る。次に其の縦距に對する ② 曲線の横距を讀めば、孔縁材の有効限界高さが判る。

例へば、

孔の大きさ $2r_0=25'$, 板の厚さ $t'=1''$ なる時は孔縁材の厚さ $t=4.3''$, 孔縁材の高さの

$1/2=2' \sim 11''$ となる。是れで觀ると孔縁材の高さは合法的であるが、厚さは法外に大で非實用的である。然し孔の大きさが小になると孔縁材の厚さも適度のものとなる。茲で面白い事は、孔縁に於ける應力を孔縁材の寸法を加減して平均應力 T にしたとすれば、板面上至る所で應力は T になると云ふ事である。如何となれば (30) 式を (15) 式の A_0 に代入して更に夫れを (1), (2) 式に入れて見れば $\alpha\alpha = T, \beta\beta = T$ となるからである。

次に、參考迄に孔縁材の變形模様を計算して第 5 圖に示して置いた。圖中鎖線で示してあるのが變形模様であり、夫れを擴大して變位を縦軸に採つて其の分布を示してある。之を觀ると、變形は孔縁材の厚さが板の厚さに比べて小なるもの程大となるが、其の減衰仕方も早い。即ち板の厚さが同じ場合には、薄い孔縁材程局部的に膨れるのである。

§4. 孔縁材に附せる防撓材の影響

上甲板の孔縁材には多くの場合、相當丈夫な防撓材が附いて居るが、夫れが若し孔縁材の有効限界高さ以上に附いて居れば何の役にも立たぬ。然し有効限界高さ以下に附いて居れば、孔縁材の有効斷面が増えて來る事は明かである。依つて今其の増しの程度に就いて調べて見よう。

問題を理想化して防撓材が孔縁材の上下兩端に對稱に附いて居るものとする。(第 6 圖には防撓材を半円で示してある。)

第 6 圖

然る時は、板及び孔縁材の式は前と全く同様に (1), (2), (3), (4) で與へられる。境界條件は (5), (6), (7) 迄は同じであるが、

圓嚢の兩端末では半丸棒の抵抗に依つて、孔縁材には剪斷力と屈曲モーメントが働く。従つて境界條件は次の如くなる。

$z=l$ に於て、

$$\frac{t^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^3 u_c}{dz^3} - \frac{I_s}{r_0^2} \frac{du_c}{dz} = 0 \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$\frac{t^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^3 u_c}{dz^3} - \frac{A_s}{r_0^2} u_c = 0 \quad \dots\dots\dots (33)$$

茲に、 I_s = 防撓材の斷面の中性軸の周りの慣性能率

A_s = 防撓材の斷面積

其の他は前述の通りである。

依つて、(5), (6), (7), (32), (33) 式に依り、(1), (2), (3), (4) 式中の未知常数を決定すれば、

$$A_0 = \frac{Tr_0^2(1-\nu)}{E} \left[1 - \frac{2\gamma}{\gamma\{\lambda + (1-\nu)\} + \frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^3\chi} \right]$$

$$\left. \begin{aligned}
 A &= \frac{2Tr_0(1-\nu)\gamma}{E} \frac{1}{\gamma\{\lambda + (1-\nu)\} + \frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^3 \chi} \\
 B &= \frac{2Tr_0(1-\nu)\gamma}{E} \frac{\nu}{\gamma\{\lambda + (1-\nu)\} + \frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^3 \chi} \\
 C &= -B \\
 D &= \frac{2Tr_0(1-\nu)\gamma}{E} \frac{1}{\gamma\{\lambda + (1-\nu)\} + \frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^3 \chi} \\
 &\quad \frac{2I_c\left(\frac{\alpha}{l}\right)^3 (\tan\alpha + \tanh\alpha - 2\chi) + \frac{A_s}{r_0}\{1 + \chi(\tan\alpha - \tanh\alpha)\}}{2I_c\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^3 (\tanh\alpha - \tan\alpha) - \frac{A_s}{r_0^2} \tan\alpha \tanh\alpha}
 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

但し上式中、

$$\begin{aligned}
 I_c &= \frac{t^3}{12(1-\nu)} \\
 \chi &= \left[4I_c^2 \left(\frac{\alpha}{l}\right)^4 (\tan\alpha \operatorname{sech}^2\alpha + \tanh\alpha \sec^2\alpha) - \frac{A_s I_s}{r_0^4} (\tan\alpha \operatorname{sech}^2\alpha + \tanh\alpha \sec^2\alpha) \right. \\
 &\quad \left. + 4 \frac{I_s I_c}{r_0^2} \left(\frac{\alpha}{l}\right)^3 (\operatorname{sech}^2\alpha - \sec^2\alpha) + 2 \frac{A_s I_c}{r_0^2} \left(\frac{\alpha}{l}\right) (1 + \tan^2\alpha \tanh^2\alpha) \right] \\
 &\quad \Bigg/ \left[4I_c^2 \left(\frac{\alpha}{l}\right)^4 (\operatorname{sech}^2\alpha + \sec^2\alpha) - \frac{A_s I_s}{r_0^4} (\tanh^2\alpha \sec^2\alpha - \tan^2\alpha \operatorname{sech}^2\alpha) \right. \\
 &\quad \left. + 4 \frac{I_s I_c}{r_0^2} \left(\frac{\alpha}{l}\right)^3 \{ \tanh\alpha \tan\alpha (\tanh\alpha - \tan\alpha) - (\tanh\alpha + \tan\alpha) \} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{A_s I_c}{r_0^2} \frac{\alpha}{l} (\tanh\alpha \sec^2\alpha - \tan\alpha \operatorname{sech}^2\alpha) \right]
 \end{aligned}$$

となる。依つて、是等の常数を (1), (2), (3), (4) 式に代入してやれば、板面上の任意の點の應力、或は孔縁材の變形が得られる。

上式は $A_s = I_s = 0$ の時には防撓材の無い場合の (15) 式となり、 $A_s = I_s = \infty$ の時には孔縁材の兩端が固定された場合のものとなる。又 $l = \infty$ にすれば $\chi = 1$ となり、之亦防撓材の無い時の夫れと一致する。即ち、此の時には防撓

第 7 圖

材は在つても無くても同じである。

そこで、上式を用ひて次の様な寸法の孔縁材

$$\begin{aligned} \text{孔の大きさ } 2r_0 &= 25', & \text{板の厚さ } t' &= 1'', \\ \text{孔縁材の厚さ } t &= 1'' \text{ 或は } 1/2'', & \text{防撓材の慣性能率 } I_s &= 4/3 [\text{吋}^4] \\ \text{防撓材の断面積 } A_s &= 4 [\text{吋}^2] \end{aligned}$$

に對して防撓材の影響を計算して見た。其の結果は第 7 圖に示す如くである。之で觀ると例に取つた防撓材は丈夫過ぎるものであるが、夫れでも、板と孔縁材の附根に極く近く在る場合の外、效いて呉れない。故に實際構造の防撓材は孔縁材の有効断面の計算に考慮する必要は少しもない。

§ 5. 結 言

本篇に於ては、前報に於て説明を省略した孔縁材の有効断面に就いて詳述し、板が一様の引張りを受ける場合に對して其の値を算定した。此の簡單且僅かの計算から、船口縁材の働きを云々するのは早計ではあるが、今暫く大膽な想像を許すならば、現行寸法の孔縁材は應力集中の緩和材としては、大して役立つて居る様に思へない。又、孔縁材の防撓材も相當強力なものではあるが、多くは有效限界高さ程度の所に附けられて居るので矢張り有効に働いて居ない。故に孔縁材のみを以つて、孔縁の應力を平均應力（孔の影響の無い所の應力）に迄減少せしめんとするには、孔縁材の厚さを板の厚さの 3~4 倍程度にせねばならぬ。或は、防撓材を成可く低い所に附けなければならぬ。即ち有效限界高さ以下に附ける必要がある。

終りに、本稿の數値計算及び圖表の製作に就いては生山四郎君の手を煩はした點が尠くない。茲に記して厚く感謝の意を表はす。

第 3 圖 a)

第 3 圖 b)

第 2 圖 c)

第 3 圖 c)

第 3 圖 d)

第 3 圖 e)

第 4 圖 a)

第 4 圖 b)

第 5 圖 a)

第 5 圖 b)

第 5 圖 c)

第 5 圖 d)

第 5 圖 e)

第 5 圖 f)

第 5 圖 g)

附 録

1) 一様なる引張りを受ける圓孔板の應力と變位

一様なる引張りを受ける圓孔板の應力に就いては、既に古くから解は判つてゐるが⁽¹⁾、前報との續きの關係上前報の解を利用して其の結果を出して置かう。

本文第 1 圖に示す如く座標軸を選び、板面上の任意の點の座標を

$$x = r \cos \beta; \quad y = r \sin \beta \dots\dots\dots(1)$$

茲に、 $r = 3ae^{\alpha}$

で表はし、半徑方向の變位を u とすれば、前報 (2) 式より、夫れは

$$u = C_1 \frac{1-\nu}{E} \frac{r}{3a^2} - \frac{1+\nu}{E} \frac{A_0}{r} \dots\dots\dots(2)$$

茲に、記號の意味等は總て前報に於けると全く同じで與へられる。

従つて、此の u を前報の (6) 式に代入してやれば、應力が得られる。即ち

$$\begin{aligned} 9a^2 e^{2\alpha} \cdot \widehat{\alpha\alpha} &= 3C_1 e^{2\alpha} + A_0 \\ 9a^2 e^{2\alpha} \cdot \widehat{\beta\beta} &= 3C_1 e^{2\alpha} - A_0 \end{aligned}$$

或は、書き替へて

$$\widehat{\alpha\alpha} = \frac{C_1}{3a^2} + \frac{A_0}{r^2}; \quad \widehat{\beta\beta} = \frac{C_1}{3a^2} - \frac{A_0}{r^2}$$

然るに、 $r = \infty$ に於ては $\widehat{\alpha\alpha} = \widehat{\beta\beta} = T$ でなければならぬから

$$C_1 = 3a^2 T$$

従つて、

$$\widehat{\alpha\alpha} = T + \frac{A_0}{r^2} \dots\dots\dots(3)$$

$$\widehat{\beta\beta} = T - \frac{A_0}{r^2} \dots\dots\dots(4)$$

$$u = \frac{T(1-\nu)}{E} r - \frac{(1+\nu)}{E} \frac{A_0}{r} \dots\dots\dots(5)$$

2) 薄肉圓盤の變形の式

圓盤の軸の中央に座標原點を採り、 z 軸を軸方向に採つて、楕壁上の點を z, r, β なる圓錐座標を以て表はせば、楕壁の微小片 $dz \cdot d\beta \cdot t$ に就いて (第 8 圖参照)、次の様な力の釣合方程式が成立つ⁽²⁾。但し、本論で取扱ふものは、薄肉故に r に就いては無關係として問題を二次元的に考へる事が出来る。

$$\frac{\partial N_r}{\partial z} + \frac{\partial T}{r_0 \partial \beta} = 0 \dots\dots\dots(6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial N_\beta}{r_0 \partial \beta} + \frac{F_\beta}{r_0} = 0 \dots\dots\dots(7)$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial z} + \frac{\partial F_\beta}{r_0 \partial \beta} - \frac{N_\beta}{r_0} = 0 \dots\dots\dots(8)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial z} - \frac{\partial H}{r_0 \partial \beta} - F_z = 0 \dots\dots\dots(9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial M_\beta}{r_0 \partial \beta} + F_\beta = 0 \dots\dots\dots(10)$$

第 8 圖

(1) 例へば Föppl; Drang und Zwang, Bd. 1, S. 317.

(2) 本論の様な簡単な荷重の場合では、態々斯様な一般式から出發する必要は少しもないが、將來前報で取扱つた荷重の場合も取扱ひ度の希望を持つて居るので、其の場合には (2) 式では不充分で一般式を必要とするからである。

茲に、

N_z = 圓筒の軸に直角な斷面に働く單位長さに就いての垂直力

F_z = 圓筒の軸に直角な斷面に於て半徑方向に働く單位長さに就いての剪斷力

M_z = 圓筒の軸に直角な斷面に於て半徑方向に働く單位長さに就いての屈曲モーメント

T = 圓筒の軸に直角な斷面に於て圓周方向に働く單位長さに就いての剪斷力

H = 圓筒の軸に直角な斷面に於て圓周方向に働く單位長さに就いての捩りモーメント

N_β = 圓筒の軸を含む面で截つた斷面に働く單位長さに就いての垂直力

F_β = 圓筒の軸を含む面で截つた斷面に於て半徑方向に働く單位長さに就いての剪斷力

r_0 = 薄肉圓筒の平均半徑

是等の方向の正負は、第 8 圖の矢印で示す通りとする。

次に嚮壁上の點の變位の r, β, z 方向の成分を u_c, v_c, w で表せば、變位と上記諸力との間には次の如き關係がある。

$$\left. \begin{aligned} N_z &= \frac{Et}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial v_c}{r_0 \partial \beta} + \frac{u_c}{r_0} \right) \right\} \\ N_\beta &= \frac{Et}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial v_c}{r_0 \partial \beta} + \frac{u_c}{r_0} + \nu \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \\ T &= \frac{Et}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{\partial v_c}{\partial z} + \frac{\partial w}{r_0 \partial \beta} \right\} \\ M_z &= -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\partial^2 u_c}{\partial z^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_c}{r_0^2 \partial \beta^2} - \frac{\partial v_c}{r_0^2 \partial \beta} \right) \right\} \\ M_\beta &= -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_c}{\partial \beta^2} - \frac{\partial v_c}{\partial \beta} \right) + \nu \frac{\partial^2 u_c}{\partial z^2} \right\} \\ H &= \frac{Et^3}{12(1+\nu)} \left\{ \frac{\partial^2 u_c}{r_0 \partial \beta \partial z} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial v_c}{\partial z} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

以上の (6)~(11) 式に就いては、人に依つては或る項を省略し、或は又式中に書き入れなかつた項を考慮してゐる人もある⁽¹⁾。此の點に就いては、既に數年前論争的となつたもので、今は論議濟のものであるから、其の検討に就いては前掲各文獻を見て頂くとして、茲では一切觸れない事にする。著者が取扱ふ又將來取扱ひ度いと希つてゐる圓形孔縁材の場合では、其の比例寸法から見て上式で充分差支へない。

諸問題を簡單にする爲めに、孔縁材の圓周方向の屈曲剛性を無視する事にする。然る時は、上式は次の如く簡單になる。

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{\partial T}{r_0 \partial \beta} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial N_\beta}{r_0 \partial \beta} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial z} - \frac{N_\beta}{r_0} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

(1) 主なるもの、

1. E. Schwerin: Über die Spannungen in freitragenden gefüllten Rohren. Z.A.M.M., Bd. 2, 1922, S. 340.
2. Kurt Miesel: Über die Festigkeit von Kreiszyinderschalen mit nicht-achsensymmetrischer Belastung. Ing. Arch. Bd. 1, 1930, S. 23.
3. K. Sezawa and K. Kubo: The Buckling of a Cylindrical Shell under Torsion. Aero. Research Inst., Tokyo Imperial Univ., Report No. 76, Vol. VI, No. 10, 1931.
4. W. Flügge: Die Stabilität der Kreiszyinderschale. Ing. Arch. Bd. IIR, 1932, S. 463.
5. L. H. Donnell: Stability of Thin-walled Tubes under Torsion. N.A.C.A., Report No. 479, 1933.
6. I. A. Wojtaszak: Deformation of Thin Cylindrical Shells subjected to Internal Loading. Phil. Mag. Vol. 13, 1934, p. 1099.
7. Max. Jobst Gerke: Formänderung und Beanspruchung dünner Kreiszyindrischer Ringe und Rohre. Z.A.M.M., Bd. 14, 1934, Okt., S. 313.

$$\frac{\partial M_z}{\partial z} - F_z = 0 \dots\dots\dots (15)$$

更に、本文に在る様な板に一樣の引張りが働く場合には、孔縁材の變形は一次元的となり、總ての量は β に就いて無關係となる。

従つて、上式は容易に

$$N_z = T = 0 \dots\dots\dots (16)$$

$$\frac{dF_z}{dz} - \frac{N_\beta}{r_0} = 0 \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{dM_z}{dz} - F_z = 0 \dots\dots\dots (18)$$

となる。或は上式より

$$\frac{d^2 M_z}{dz^2} - \frac{N_\beta}{r_0} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

然るに (11) 式より

$$N_\beta = -\frac{Et}{1-\nu^2} \frac{u_c}{r_0} \dots\dots\dots (20)$$

$$M_z = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2 u_c}{dz^2} \dots\dots\dots (21)$$

なる無關係があるから (19) 式は

$$\frac{d^4 u_c}{dz^4} + \frac{12}{t^2} \frac{1}{r_0^2} u_c = 0 \dots\dots\dots (22)$$

となる。此の式は多くの人に依つて種々異つた方法で得られてゐる⁽¹⁾。

之の解は周知の如く、

$$u_c = A \cos \alpha \zeta \cosh \alpha \zeta + B \sin \alpha \zeta \cosh \alpha \zeta + C \cos \alpha \zeta \sinh \alpha \zeta + D \sin \alpha \zeta \sinh \alpha \zeta \dots\dots\dots (23)$$

但し、 $\alpha = \sqrt[4]{\frac{3}{r_0 t}}; \quad \zeta = \frac{z}{t}$

(1) 前掲文献及び J. Prescott: Applied Elasticity, p. 537.