(昭和十五年十一月十七日造船協會講演會に於て講演)

船舶自由横動搖に關する理論

正員 工 學 士 上 野 敬 三*

Abstract.

Theory for Free Rolling of Ship.

By Keizo Ueno, *Kogakusi, Member.*

This paper deals with the free rolling of ship theoretically and experimentally, and the following results are obtained.

(1) The free rolling of ship is made up of coupled oscillations of a horizontal transverse motion of its centre of gravity G with a rotational motion of ship about a longitudinal axis through G . And the horizontal motion is made up of two motions, the one being a damped oscillation and the other a damped translation, but the rotation simply a single damped oscillation. That is to say that, G , about the longitudinal axis through which the ship is rotating, translates transversely in the direction against the initial heeling, oscillating horizontally, and at last after the shift of a certain distance the motion is at rest.

(2) C_0 , the apparent centre of free rolling, which is the point having a minimum double amplitude of horizontal oscillation $2|\xi|_{m_0}$ among the points in the middle line of the ship, is at a distance Y_0 below G . For box-shaped model ship, a ratio Y_0/d , where d is a draught of ship, has a value of about 0.08, and a ratio $2|\xi|_{m_0}/d$ increases as the initial angle of heel θ_0 increases and has a value of 0.03 at $\theta_0=35^\circ$. And these calculated values of Y_0 and $2|\xi|_{m_0}$ are in agreement with the experimental results.

(3) The actual amplitudes of horizontal oscillations of any point in the middle line of the ship are larger and more irregular than the calculated ones, but the direction and the amount of the horizontal translation calculated agree with the experimental results. And D , a calculated distance of a horizontal shift of G between the time elapsed from the initial and the final instant of the motion, coincides perfectly with the experimental results, and D/d increases as θ_0 increases and has a value of 0.9 at $\theta_0=35^\circ$.

(4) A damping power α and a circular frequency ω in the free rolling of the ship are expressed as follows.

$$\alpha = \alpha_0 - C_\alpha,$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + C_\omega},$$

where α_0 and ω_0 are a damping power and a circular frequency respectively in the free rolling of the ship, the horizontal motion of the centre of gravity of which are restrained. Therefore, C_α and C_ω are the effects of the horizontal motion on the free rolling, and the calculated C_α and C_ω agree with the experimental results. For the box-shaped model ship, the calculated C_α/α , C_ω/ω^2 and $(T_0-T)/T$ (where T and T_0 are π/ω and π/ω_0 respectively) have the following values.

C_α/α : 7%~4% in the range of $\theta_0=0^\circ\sim35^\circ$.

C_ω/ω^2 : about 4% throughout the same range of θ_0 as above.

$(T_0-T)/T$: about 2% ,, ,,

* 九州帝國大學助教授

(5) If the effect of the horizontal motion on the free rolling should be neglected as small, the damping power α and the period T , which shall be greatly influenced by the rotational motion, are approximately expressed as follows.

$$\alpha \doteq \frac{I_0 h_1}{2(I + I_1 h_1)},$$

$$T^2 \doteq \pi^2 \cdot \frac{(I + I_1 h_1)}{W \cdot h \cdot G_s}$$

Namely, α is proportional to the resistance couple $I_0 h_1$ and inversely proportional to the apparent moment of inertia $(I + I_1 h_1)$, but small affected by the form of the ship. T^2 is proportional to the apparent moment of inertia and inversely proportional to the weight of the ship W , the metacentric height h and the effect of the form G_s , where G_s is a non-dimensional factor which is a function of the form of the statical stability curve and the initial angle of heel θ_0 .

(6) By the facts that the calculated values of Y_0 , $2\|\dot{m}_0$, D , C_a and C_w are excellently in agreement with the experimental results, it is proved that the theory for free rolling of ship above mentioned are proper and correct.

目 次

1. 緒 言	10. 船が其の重心の水平移動を拘束された状態に於て自由横動揺を行ふ場合の近似解
2. 運動方程式の誘導	11. 船の自由横動揺実験に使用せる模型船
3. 運動方程式の解	12. 水平運動に關する常數の決定
4. 根の吟味	13. 自由横動揺実験結果
5. 減衰動揺の性質	14. 結 論
6. 廻轉運動の見掛けの中心	附録 I. X の極小と極大
7. 船體中心線の運動	附録 II. 自由横動揺実験結果の解析
8. 減衰係數及び振動數に及ぼす水平運動の影響	
9. 運動方程式の近似解法	

1. 緒 言

靜止せる水に直立状態に於て浮び平衡を保つ船がある。今此の船に外部から或る偶力を加へて或る角度 θ_0 だけ横方向に傾斜せしめ、次に此の偶力を取除いた時に發生する現象、即ち船の自由横動揺に就て只今から論ずる。此の問題を解くに當り問題を全然二次元的に取扱ひ、自由横動揺に依つて誘起せらるゝ所の縦動揺及び船搖の横動揺に及ぼす影響を無視するものとす。

2. 運動方程式の誘導

第 1 圖に於て、船を先づ最初に時計廻轉方向に θ_0 だけ傾斜せしめて置いて、然る後に、船を自由にしたものとする。此の時船は自由横動揺をなし、水の抵抗のために勢力が次第に減殺され、従つて動揺も亦次第に減衰し、最後に元の平衡の位置、即ち直立状態に於て靜止する。此の最後に靜止せる時の船の中心線の方向下向きに y 軸を取り、水面に沿ひ右向きに x 軸を取る。

問題を二次元的に取扱ふ故、船の運動を、船の重心 G の x, y 平面内に於ける運動と G の周りの船の廻轉運動とに分けて考へることが出来る。

今任意の時刻 t に於ける船の傾斜角を θ とす。但し θ は圖の如く時計廻轉方向の傾斜を以て正に取る。又此の時の重心の位置 G の座標を x, y にて表はし、船が最後に静止せる時の重心の位置 G' の座標を x', y' とする。又此の任意の時刻に於ける船の重心の x, y 方向の速度を夫々 $\dot{x}, \dot{y}$ 、加速度を夫々 $\ddot{x}, \ddot{y}$ とし、重心 G の周りの時計廻轉方向の角速度を $\dot{\theta}$ 、角加速度を $\ddot{\theta}$ とする。

次に此の任意の角 θ だけ傾斜せる状態に於て船體に作用する力を考へて見る。

先づ靜的力を考へて見ると、重心 G に船の重量 W が鉛直方向下向きに作用する。又船が排水量を變ずることなく θ だけ傾斜せる時の水面 W_2L_2 は

$$(y - y' \cos \theta)$$

だけ現在の水面 W_1L_1 よりも下にある。従つて W_2L_2 以下の排水體積の中心 B 點に大き W なる浮力が鉛直方向上向きに作用し、 W_1L_1 と W_2L_2 との間の容積の中心に其の容積に相當する浮力

$$\lambda A_w (y - y' \cos \theta)$$

但し A_w = 水面積、 λ = 船體周圍の水の單位體積の重量

が矢張り鉛直方向上向きに作用する。

今 h_0 = 重心 G より浮力 W までの水平距離

h_4 = 重心 G より浮力 $\lambda A_w (y - y' \cos \theta)$ までの水平距離

と置けば、船の重心 G の周りの偶力として靜的偶力 Wh_0 及び $\lambda A_w (y - y' \cos \theta) h_4$ が船の廻轉方向に對して逆に作用する。

次に動的力を考へて見ると、船は重心 G の周りに或る角速度を以て廻轉してゐるのであるから、此の廻轉運動に對する水の抵抗が働く筈である。此の水の抵抗の水圧の合力として F なる力が船體中心線上の一點 P に於て、船體中心線に對し直角の方向と ϕ なる角度をなして作用するものとする。今 G に於て F に平行にして且つ大き F に等しく方向互に相反する 2 力 F_r 及び F_t を加へると、 F と F_t とに依つて船體に抵抗偶力

$$F h_1 \cos \phi \quad \text{但し} \quad h_1 = GP$$

が廻轉と反對方向に作用することが判る。残りの F_r なる力を、水平力 H と鉛直力 V とに分解すれば、 H 及び V は夫々次式にて表はされる。

$$H = F \cos(\theta - \phi), \quad V = F \sin(\theta - \phi)$$

H は船を水平方向に押して x 軸に平行なる運動を與へ、 V は船を鉛直方向に押して y 軸に平行なる運動即ち鉛直運動を生ずる原因となる。

斯くして H のために水平運動起れば、此の水平運動に對する水の抵抗 R が圖の如く作用し、従つて又

Rh_2 但し h_2 =重心 G より水の抵抗 R までの鉛直距離

なる偶力が廻轉運動を助ける様な方向に働く。

之と全く同様にして、 V のために起つた鉛直運動に對して水の抵抗 U が働き、從つて又

$U \cdot h_3$ 但し h_3 =重心 G より水の抵抗 U までの水平距離

なる偶力が圖の様な方向に作用する。

以上の力を綜合して見ると、廻轉、水平、鉛直の 3 運動に對して次の様な 3 つの運動方程式を書くことが出来る。

$$\text{廻轉運動に對し} \quad I\ddot{\theta} = -Wh_0 - Fh_1 \cos \phi + Rh_2 + Uh_3 - \lambda A_w(y - y' \cos \theta)h_4 \quad \dots\dots\dots(2.1)$$

$$\text{水平運動に對し} \quad M\ddot{x} = F \cos(\theta - \phi) - R \quad \dots\dots\dots(2.2)$$

$$\text{鉛直運動に對し} \quad M\ddot{y} = F \sin(\theta - \phi) - U - \lambda A_w' y - y' \cos \theta \quad \dots\dots\dots(2.3)$$

但し I =船の重心を通る縦軸の周りの質量慣性力率、 M =船の質量

(2.1), (2.2), (2.3) 式中の各項は一般に次の様な函數である。

$$\left. \begin{aligned} &h_0(\theta, h_1(\theta), h_2(\theta), h_3(\theta), h_4(\theta), \phi(\theta), \\ &F, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dots), \quad R(\theta, \dot{x}, \ddot{x}, \dots), \\ &U(\theta, \dot{y}, \ddot{y}, \dots), \quad A_w(\theta, y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.4)$$

從來の實驗に徴するに、鉛直運動甚小にして其の船の自由横動搖に及ぼす影響を無視し得るものと考へられるを以て今之を考慮の外に置くならば、(2.3) は省略せられ、又 (2.1) の右邊最後の 2 項を無視することが出来る。從つて運動方程式として次の 2 式が残る。

$$\text{廻轉運動に對する運動方程式} \quad I\ddot{\theta} + Fh_1 \cos \phi + Wh_0 - Rh_2 = 0 \quad \dots\dots\dots(2.5)$$

$$\text{水平運動に對する運動方程式} \quad M\ddot{x} + R - F \cos(\theta - \phi) = 0 \quad \dots\dots\dots(2.6)$$

(2.5), (2.6) は船の自由横動搖が廻轉運動と水平運動との聯成振動なることを示してゐる。

3. 運動方程式の解

前節に於ては鉛直運動を無視することに依り 3 運動方程式 (2.1), (2.2), (2.3) を簡單化して (2.5), (2.6) の 2 式を得たのであるが、此の 2 式中の h_0, h_1, h_2, ϕ, F 及び R は (2.4) に示す様な函數であるから、此の 2 運動方程式は實に複雑な形であり、正確な解を得ること困難である。

茲では先づ第 1 近似解として、此の 2 式を更に簡單化し、線形微分方程式に變形して之を解き、廻轉運動と水平運動との聯成振動の概括的な傾向を調べて見ることにする。

其のために先づ次の様な假定を設ける。

$$\left. \begin{aligned} &h_0 = h \cdot \theta & h_1 = \theta \text{ に無關係な或る常數} \\ &h_2 = \theta \text{ に無關係な或る係數} & \phi = \theta \text{ に無關係な或る係數} \\ &F = I_1 \ddot{\theta} + I_{10} \dot{\theta} & R = M_1 \ddot{x} + M_{10} \dot{x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.1)$$

但し h = metacentric height $I_1 = \theta$ に無関係な比例常数
 $I_{10} = \theta$ に無関係な比例常数 $M_1 = \theta$ に無関係な比例常数
 $M_{10} = \theta$ に無関係な比例常数

(3.1) を (2.5), (2.6) に代入して少しく變形すれば次の 2 式が得られる。

$$(I + I_1 h_1 \cos \phi) \ddot{\theta} + I_{10} h_1 \cos \phi \dot{\theta} + W h \theta - (M_1 \ddot{x} + M_{10} \dot{x}) h_2 = 0 \dots\dots\dots (3.2)$$

$$(M + M_1) \ddot{x} + M_{10} \dot{x} - (I_1 \ddot{\theta} + I_{10} \dot{\theta}) (\cos \theta \cdot \cos \phi + \sin \theta \cdot \sin \phi) = 0 \dots\dots\dots (3.3)$$

茲に於て更に次の假定を附加する。

$$\phi = 0, \quad \cos \theta \doteq 1 \dots\dots\dots (3.4)$$

すると (3.2), (3.3) は更に簡單となり

$$(I + I_1 h_1) \ddot{\theta} + I_{10} h_1 \dot{\theta} + W h \theta - (M_1 \ddot{x} + M_{10} \dot{x}) h_2 = 0 \dots\dots\dots (3.5)$$

$$(M + M_1) \ddot{x} + M_{10} \dot{x} - (I_1 \ddot{\theta} + I_{10} \dot{\theta}) = 0 \dots\dots\dots (3.6)$$

(3.5), (3.6) は明らかに線形微分方程式であるから容易に解くことが出来る。

之を解くために次の様な記號を使用する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{W h}{I + I_1 h_1} &= \omega_1^2, \quad \frac{I_{10} h_1}{I + I_1 h_1} = 2\alpha_1 \\ \frac{I_{10} h_1}{I_1 h_1} &= \frac{I_{10}}{I_1} = \alpha_2, \quad \frac{I_1 h_1}{I + I_1 h_1} = i_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.7)$$

$$\text{と置けば} \quad 2\alpha_1 = i_1 \alpha_2 \dots\dots\dots (3.8)$$

なる關係あり。

又

$$\frac{M_{10}}{M + M_1} = \varphi_1, \quad \frac{M_{10}}{M_1} = \varphi_2, \quad \frac{M_1}{M + M_1} = m_1 \dots\dots\dots (3.9)$$

$$\text{なる記號を用ふれば} \quad \varphi_1 = m_1 \varphi_2 \dots\dots\dots (3.10)$$

なる關係を生ず。

更に次の記號を附加する。

$$\frac{I + I_1 h_1}{M + M_1} = k^2, \quad \frac{h_2}{h_1} = \gamma \dots\dots\dots (3.11)$$

(3.7), (3.9), (3.11) を (3.5), (3.6) に代入すれば次式が得られる。

$$\ddot{\theta} + 2\alpha_1 \dot{\theta} + \omega_1^2 \theta - \frac{m_1 h_2}{k^2} (\ddot{x} + \varphi_2 \dot{x}) = 0 \dots\dots\dots (3.12)$$

$$\ddot{x} + \varphi_1 \dot{x} - \frac{i_1 k^2}{h_1} (\ddot{\theta} + \alpha_2 \dot{\theta}) = 0 \dots\dots\dots (3.13)$$

$$\text{今} \quad \theta = \theta e^{i t}, \quad x = B e^{i t} \dots\dots\dots (3.14)$$

と置き、(3.14) を (3.12) に代入すれば

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{m_1 h_2}{k^2} (p + \varphi_2) p}{(p^2 + 2\alpha_1 p + \omega_1^2)} \dots\dots\dots (3.15)$$

が得られ、又 (3.14) を (3.13) に代入すれば

$$\frac{A}{B} = \frac{(p + \varphi_1) p}{\frac{i_1 k^2}{h_1} (p + \alpha_2) p} \dots\dots\dots (3.16)$$

が得られる。

(3.15) と (3.16) とを結合すれば

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{m_1 h_2}{k^2} (p + \varphi_2) p}{(p^2 + 2\alpha_1 p + \omega_1^2)} = \frac{(p + \varphi_1) p}{\frac{i_1 k^2}{h_1} (p + \alpha_2) p} \dots\dots\dots (3.17)$$

となり、(3.17) を開けば p に関する次の如き四次の振動数方程式が得られる。

$$(p^2 + 2\alpha_1 p + \omega_1^2) (p + \varphi_1) p - m_1 i_1 \gamma \cdot (p + \varphi_1) (p + \alpha_2) p^2 = 0 \dots\dots\dots (3.18)$$

(3.18) の 1 根は明らかに零にして、今此の根を p_0 なる記號にて示せば

$$p_0 = 0 \dots\dots\dots (3.19)$$

となる。

又残りの 3 根 p_1, p_2, p_3 は次の様な三次方程式の根として表はされる。

$$\left. \begin{aligned} p^3 + b_1 p^2 + c_1 p + d_1 &= 0 \\ b_1 &= \frac{2\alpha_1(1 - m_1 \gamma) + \varphi_1(1 - i_1 \gamma)}{(1 - m_1 i_1 \gamma)} \\ c_1 &= \frac{\omega_1^2 + 2\alpha_1 \varphi_1(1 - \gamma)}{(1 - m_1 i_1 \gamma)}, \quad d_1 = \frac{\varphi_1 \omega_1^2}{(1 - m_1 i_1 \gamma)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.20)$$

(3.20) を解けば 3 根 p_1, p_2, p_3 は次の形で表はされる。

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \left(u + v - \frac{b_2}{3} \right) \sqrt[3]{d_1} \\ p_2 &= \left\{ -\frac{1}{2}(u+v) - \frac{b_2}{3} + i \sqrt{\frac{3}{2}}(u-v) \right\} \sqrt[3]{d_1} \\ p_3 &= \left\{ -\frac{1}{2}(u+v) - \frac{b_2}{3} - i \sqrt{\frac{3}{2}}(u-v) \right\} \sqrt[3]{d_1} \\ u &= \sqrt[3]{-d_3 + \sqrt{d_3^2 + c_3^3}}, \quad v = \sqrt[3]{-d_3 - \sqrt{d_3^2 + c_3^3}}, \quad c_3 = \frac{c_2}{3} - \frac{b_2^2}{9} \\ d_3 &= \frac{b_2^3}{27} - \frac{b_2 \cdot c_2}{6} + \frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{b_1}{\sqrt[3]{d_1}}, \quad c_2 = \frac{c_1}{\sqrt[3]{d_1^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.21)$$

但し

4. 根 の 吟 味

振動数方程式 (3.18) の 4 根 p_0, p_1, p_2, p_3 の内で p_0 は (3.19) に示す如く零であるから、之は運動の週期性及び安定性には無関係である。従つて茲では残りの 3 根 p_1, p_2, p_3 に就て吟味を行ふこととする。

(3.21) より明らかなる如く、 p_1 が實数で p_2, p_3 が虚数ならば運動は週期的となる。今若し $\sqrt{d_3^2 + c_3^3}$ が實数であるならば、 u 及び v が實数となり、従つて運動が週期的なるための条件を満足する。其のためには

$$d_3^2 + c_3^3 > 0 \dots\dots\dots (4.1)$$

なることを要す。即ち (4.1) の週期的なるための条件を満足することとなる。同様にして

$$d_3^2 + c_3^3 < 0 \dots\dots\dots (4.2)$$

であるならば非週期的運動をなすこととなり、週期的運動と非週期的運動との境界は

$$d_3^2 + c_3^3 = 0 \dots\dots\dots (4.3)$$

に依つて表はされる。

(4.3) に (3.21) の d_3 及び c_3 の値を代入すれば次の式が得られる。

$$d_3^2 + c_3^3 = -\frac{1}{108} \{b_2^2 c_2^2 - 4(b_2^3 + c_2^3) + 18b_2 c_2 - 27\} = 0 \dots\dots\dots (4.4)$$

(4.4) の括弧の中が負ならば週期的となり、正ならば非週期的となる。 b_2 を横軸となし c_2 を縦軸とせる直交座標軸に於て (4.4) を曲線に畫けば第 2 圖に示す様になる。 b_2 及び c_2 の正の値に對して、第 2 圖の斜線を施せる部分が非週期的運動の領域となり、此の曲線と座標軸との間の部分が週期的運動の領域を示す。

次に動揺の安定度を調べて見る。動揺が安定なるためには、實根 p_1 及び虚根 p_2, p_3 の實數部分が負でなければならない。其の条件を求めて見ると

$$\left. \begin{array}{l} b_1 > 0, \quad c_1 > 0, \quad d_1 > 0, \\ b_1 c_1 - d_1 > 0 \text{ 或は } \frac{b_1 c_1}{d_1} = b_2 c_2 > 1 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (4.5)$$

が得られる。然るに普通

$$0 < m_1 < 1, \quad 0 < i_1 < 1, \quad 0 < \gamma < 1 \dots\dots\dots (4.6)$$

であるから

$$(1 - \gamma) > 0, \quad (1 - m_1 \gamma) > 0, \quad (1 - i_1 \gamma) > 0, \quad (1 - m_1 i_1 \gamma) > 0 \dots\dots\dots (4.7)$$

となる。一方に於て船の廻轉運動及び水平運動に對する水の抵抗が正なること明らかであるから

$$2\alpha_1 > 0, \quad \varphi_1 > 0 \dots\dots\dots (4.8)$$

となり、又現在では

$$h > 0 \dots\dots\dots (4.9)$$

なる場合を取扱つてゐるのであるから

$$\omega_1^2 > 0 \quad \dots\dots\dots (4.10)$$

が成立する。従つて (3.20) に (4.7), (4.8), (4.10) を代入すれば

$$b_1 > 0, \quad c_1 > 0, \quad d_1 > 0 \quad \dots\dots\dots (4.11)$$

となり、(4.5) の 4 条件の内、最初の 3 条件は完全に満足されてゐる。故に残りの条件

$$b_2 c_2 > 1 \quad \dots\dots\dots (4.12)$$

が満足されれば動揺は安定であり、

$$b_2 c_2 < 1 \quad \dots\dots\dots (4.13)$$

ならば不安定となる。而して其の境界は

$$b_2 c_2 = 1 \quad \dots\dots\dots (4.14)$$

に依つて表はされる。

(4.14) を曲線に畫けば第 2 圖に示す如く直角双曲線となり、此の曲線と座標軸との間が不安定領域即ち非減衰動揺の領域となり、其の外側が安定領域即ち減衰動揺の領域となり、更に曲線 (4.4) にて限られた斜線部分が非週期的減衰運動の領域となる譯である。

安定条件 (4.12) を更に今少しく具體的に調べるために (3.21) の b_2, c_2 の値を (4.12) に代入して少しく變形すれば次の様な形になる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi_1}{2\alpha_1} &< \frac{(1-m_1)\gamma}{(1-m_1)i_1\gamma} \cdot E_1 \\ E_1 &= \frac{1 + \frac{2\alpha_1\varphi_1}{\omega_1^2}(1-\gamma)}{1 - \frac{2\alpha_1\varphi_1}{\omega_1^2} \frac{(1-\gamma)(1-i_1\gamma)}{(1-m_1)i_1\gamma}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.15)$$

但し

後述の箱型模型船に関する實驗結果を示した所の第 31 圖より判斷すると、上式中の E_1 は θ_0 と共に増加し、 $\theta_0 = 0^\circ \sim 35^\circ$ の範圍内に於て 1.08~1.24 の値を示すものであるが、 θ_0 に依る變動少く、極近似的に言へば殆ど恒數と見做して差支へない。

(4.15) は次の様な形にも書き換へられる。

$$\frac{\varphi_1\gamma(1-m_1)}{(1-m_1\gamma)} < \alpha_1 \cdot E_1 \quad \dots\dots\dots (4.16)$$

(4.16) は安定の条件であるが、之と全く同様にして

$$\frac{\varphi_1\gamma(1-m_1)}{(1-m_1\gamma)} > \alpha_2 \cdot E_1 \quad \dots\dots\dots (4.17)$$

が成立すれば不安定であり、又安定と不安定との境界は次式にて示されることが判る。

$$\frac{\varphi_1\gamma(1-m_1)}{(1-m_1\gamma)} = \alpha_2 E_1 \quad \dots\dots\dots (4.18)$$

(4.16) より次のことが判る。即ち今若し E_1 を恒数と見るならば、 φ_1, γ の小なる程又 α_2, m_1 の大なる程安定度が大となる。

(3.7) の α_2 , (3.9) の φ_1, m_1 及び (3.11) の γ の値を (4.16) に代入して少しく整理すれば次の形となる。

$$\frac{\left[\frac{M_{10} \cdot M}{M + M_1} \right] \cdot \left(\frac{h_2}{h_1} \right)}{\left[M + M_1 \left(1 - \frac{h_2}{h_1} \right) \right]} < \left(\frac{I_{10}}{I_1} \right) \cdot E_1 \dots \dots \dots (4.19)$$

(4.19) を見ると M_{10}, I_1 及び $\frac{h_2}{h_1}$ の小なる程又 M_1 及び I_{10} の大なる程安定度の大なることが判る。

次に實際の自由横動揺に就て調べる。

後述の箱型模型船に関する自由横動揺實驗結果を見ると、 $(d_s^2 + c_s^3)$ は第 50 圖に示す如く $\theta_0 = 0^\circ \sim 35^\circ$ の範囲内に於て 29~36 の範囲内の値を示し、從つて

$d_s^2 + c_s^3 > 0$ となり、之は (4.1) の週期的運動なるための條件を満足してゐる。

又第 50 圖の $b_2 \cdot c_2$ の値を見ると 3~10 の範囲内の値を示し、從つて

$b_2 \cdot c_2 > 1$ となり、(4.12) の條件を満足し、運動の安定なることを示してゐる。運動の安定なることは次の様にして亦證明することが出来る。即ち第 51 圖を見れば判る如く、 $\frac{\varphi_1 \gamma (1 - m_1)}{(1 - m_1 \gamma)}$ の値は $\alpha_2 \cdot E_1 \times 10^{-2}$ 程度の大さを示し、從つて

$\frac{\varphi_1 \gamma (1 - m_1)}{(1 - m_1 \gamma)} \ll \alpha_2 \cdot E_1$ となり、(4.16) の安定條件を充分満足してゐることが判る。

以上の實驗結果を綜合すれば、此の實際運動は週期的にして且つ安定であるから、所謂減衰動揺をすることになる。第 50 圖の b_2, c_2 の大さを座標とする點を第 2 圖に記入すれば、此の實驗値は明らかに減衰動揺の領域にあることを示してゐる。

5. 減 衰 動 揺 の 性 質

前節に於ては實際運動は減衰動揺であることを示したのであるが、本節に於ては此の減衰動揺の性質に就て述べることにする。運動が減衰動揺であるためには、 p_1 は負の實數であり、 p_2 及び p_3 は負の實數部分を有する共軛複素數であらねばならぬこと明らかであるから、今之等を次の様に置く。

$$p_1 = -\varphi, \quad p_2 = -\alpha + i\omega, \quad p_3 = -\alpha - i\omega \dots \dots \dots (5.1)$$

然る時は (5.1) と (3.21) とを照らし合せて φ, α 及び ω が次式にて表はされることが判る。

$$\varphi = \left\{ -(u+v) + \frac{b_2}{3} \right\} \sqrt[3]{d_1}, \quad \alpha = \left\{ \frac{1}{2}(u+v) + \frac{b_2}{3} \right\} \sqrt[3]{d_1}, \quad \omega = \frac{\sqrt{3}}{2} (u-v) \sqrt[3]{d_1} \dots \dots (5.2)$$

(3.19) の p_0 及び (5.1) の p_1, p_2, p_3 を (3.14) に代入すれば、 θ 及び x の一般解として次の 2 式が得られる。

$$\theta = A_0 + A_1 e^{-\varphi t} + A_2 e^{(-\alpha + i\omega)t} + A_3 e^{(-\alpha - i\omega)t} \dots \dots \dots (5.3)$$

$$x = B_0 + B_1 e^{-\varphi t} + B_2 e^{(-\alpha + i\omega)t} + B_3 e^{(-\alpha - i\omega)t} \quad (5.4)$$

(5.3) 及び (5.4) の中の A_0, A_1, A_2, A_3 及び B_0, B_1, B_2, B_3 は 4 箇の初期条件より決定し得る積分常数であり、且つ A_0, A_1, A_2, A_3 と B_0, B_1, B_2, B_3 との間に夫々次の関係がある。

$$p_0 \text{ を (3.15) に代入すれば } \frac{A_0}{B_0} = 0 \quad (5.5)$$

が得られる。又 p_1 を (3.15) に代入すれば

$$\frac{B_1}{A_1} = - \frac{(\varphi^2 - 2\alpha_1\varphi + \omega_1^2)}{\frac{m_1 h_2}{k^2} (-\varphi + \varphi_2)\varphi} \quad (5.6)$$

となる。 $\frac{B_1}{A_1}$ は長さの dimension であるから、今之を $-R_1$ なる記號にて示せば、 R_1 は次の形となる。

$$R_1 = - \frac{B_1}{A_1} = \frac{(\varphi^2 - 2\alpha_1\varphi + \omega_1^2)}{\frac{m_1 h_2}{k^2} (-\varphi + \varphi_2)\varphi} \quad (5.7)$$

次に p_2 を (3.16) に代入して其の逆数を $R_2 e^{-i\varepsilon}$ と置けば次の様になる。

$$R_2 e^{-i\varepsilon} = \frac{B_2}{A_2} = \frac{\frac{i_1 k^2}{h_1} (-\alpha_1 + \alpha_2 + i\omega)}{(-\alpha + \varphi_1 + i\omega)} \quad (5.8)$$

(5.8) より R_2 及び ε の値として次のものが得られる。

$$R_2 = \frac{i_1 k^2}{h_1} \cdot E_2 \quad \text{但し} \quad E_2 = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{-\alpha + \alpha_2}{\omega}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{-\alpha + \varphi_1}{\omega}\right)^2}} \quad (5.9)$$

$$\tan \varepsilon = \frac{(\alpha_2 - \varphi_1)}{\omega} \cdot E_3 \quad \text{但し} \quad E_3 = \frac{1}{1 + \left(\frac{-\alpha + \alpha_2}{\omega}\right) \left(\frac{-\alpha + \varphi_1}{\omega}\right)} \quad (5.10)$$

第 31 圖の實驗結果を見ると、(5.9) の E_2 は $\theta_0 = 0^\circ \sim 35^\circ$ の範圍内に於て 1.02~1.06 の値を示し、又 (5.10) の E_3 は 1.0~1.04 の値を示してゐる。斯くの如く E_2 及び E_3 は共に其の値が殆ど 1 に近く、且つ變動が至つて少く、殆ど恒數と見て差支へない程度のものであるから、今若し

$$E_2 \doteq 1 \quad (5.11)$$

$$E_3 \doteq 1 \quad (5.12)$$

と假定するならば、 R_2 及び $\tan \varepsilon$ の近似値として次の形が得られる。

$$R_2 \doteq \frac{i_1 k^2}{h_1} \quad (5.13)$$

$$\tan \varepsilon \doteq \frac{(\alpha_2 - \varphi_1)}{\omega} \quad (5.14)$$

前同様にして p_3 を (3.16) に代入すれば

$$\frac{B_3}{A_3} = R_2 e^{i\varepsilon} \dots\dots\dots (5.15)$$

が得られる。

次に

$$B_0 \neq \infty \dots\dots\dots (5.16)$$

と假定すれば (5.5) より

$$A_0 = 0 \dots\dots\dots (5.17)$$

となる。

(5.17) を (5.3) に代入すれば

$$\theta = A_1 e^{-\varphi t} + A_2 e^{-\alpha t + i\omega t} + A_3 e^{-\alpha t - i\omega t} \dots\dots\dots (5.18)$$

(5.7), (5.8) 及び (5.15) を (5.4) に代入すれば

$$x = B_0 - A_1 R_1 e^{-\varphi t} + A_2 R_2 e^{-\alpha t + i(\omega t - \varepsilon)} + A_3 R_2 e^{-\alpha t - i(\omega t - \varepsilon)} \dots\dots\dots (5.19)$$

となる。

初期條件として次の 4 條件を取る。

$$t=0 \text{ に於て } \theta = \theta_0, \quad x = x_0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{x} = 0 \dots\dots\dots (5.20)$$

(5.18), (5.19) を (5.20) に代入して得た 4 式を聯立方程式として解き、4 箇の積分常數 B_0, A_1, A_2, A_3 の値を求めれば次の結果が得られる。

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= x_0 - \frac{\theta_0 R_2 \left[R_1 \left\{ \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon + \cos(\varepsilon + \sigma) \right\} + R_2 \cos \sigma \right]}{R_1 \cos \sigma - R_2 \left\{ \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon - \cos(\varepsilon - \sigma) \right\}} \\ A_1 &= - \frac{\theta_0 R_2 \cdot \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon}{R_1 \cos \sigma - R_2 \left\{ \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon - \cos(\varepsilon - \sigma) \right\}} \\ A_2 &= \frac{\frac{\theta_0}{2} \{ R_1 e^{-i\sigma} + R_2 e^{i(\varepsilon - \sigma)} \}}{R_1 \cos \sigma - R_2 \left\{ \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon - \cos(\varepsilon - \sigma) \right\}} \\ A_3 &= \frac{\frac{\theta_0}{2} \{ R_1 e^{i\sigma} + R_2 e^{-i(\varepsilon - \sigma)} \}}{R_1 \cos \sigma - R_2 \left\{ \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon - \cos(\varepsilon - \sigma) \right\}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.21)$$

$$\text{但し} \quad \mu = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}, \quad \tan \sigma = \frac{\alpha}{\omega}$$

(5.21) を (5.18) に代入して次の如き θ の値が得られる。

$$\theta = \frac{\theta_0 \left[-R_2 e^{-\eta t} \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon + e^{-\alpha t} \{ R_1 \cos(\omega t - \sigma) + R_2 \cos(\omega t + \varepsilon - \sigma) \} \right]}{R_1 \cos \sigma - R_2 \left\{ \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon - \cos(\varepsilon - \sigma) \right\}} \dots\dots (5.22)$$

(5.22) は次の様な形にも書き換へ得られる。

$$\theta = \frac{\theta_0 \sec \sigma \left[e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \sigma) - \frac{R_2}{R_1} \left\{ e^{-\eta t} \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon - e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varepsilon - \sigma) \right\} \right]}{1 - \frac{R_2}{R_1} \sec \sigma \left\{ \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon - \cos(\varepsilon - \sigma) \right\}} \dots\dots (5.23)$$

(5.21) を (5.19) に代入すれば x の値として次式が得られる。

$$x = x_0 - \frac{\theta_0 R_2 \left[R_1 \left\{ \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon + \cos(\varepsilon + \sigma) \right\} + R_2 \cos \sigma \right]}{R_1 \cos \sigma - R_2 \left\{ \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon - \cos(\varepsilon - \sigma) \right\}} + \frac{\theta_0 R_2 \left[R_1 e^{-\eta t} \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon + e^{-\alpha t} \{ R_1 \cos(\omega t - \varepsilon - \sigma) + R_2 \cos(\omega t - \sigma) \} \right]}{R_1 \cos \sigma - R_2 \left\{ \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon - \cos(\varepsilon - \sigma) \right\}} \dots\dots (5.24)$$

今 $t = \infty$ に於ける x を x_∞ なる記號にて示せば、(5.24) より次の結果が得られる。

$$x_\infty = x_0 - \frac{\theta_0 R_2 \left[R_1 \left\{ \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon + \cos(\varepsilon + \sigma) \right\} + R_2 \cos \sigma \right]}{R_1 \cos \sigma - R_2 \left\{ \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon - \cos(\varepsilon - \sigma) \right\}} \dots\dots\dots (5.25)$$

然るに船の自由横動揺が減衰し、 $t = \infty$ に於て遂に静止せる時の船體中心線上に x 軸の原點を置いてあるから、

$$x_\infty = 0 \dots\dots\dots (5.26)$$

が成立する。(5.25) を (5.26) に代入して次の様な x_0 の値が得られる。

$$x_0 = \frac{\theta_0 R_2 \left[R_1 \left\{ \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon + \cos(\varepsilon + \sigma) \right\} + R_2 \cos \sigma \right]}{R_1 \cos \sigma - R_2 \left\{ \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon - \cos(\varepsilon - \sigma) \right\}} \dots\dots\dots (5.27)$$

(5.27) を (5.24) に代入すれば x の値として次式が得られる。

$$x = \frac{\theta_0 R_2 \left[R_1 e^{-\eta t} \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon + e^{-\alpha t} \{ R_1 \cos(\omega t - \varepsilon - \sigma) + R_2 \cos(\omega t - \sigma) \} \right]}{R_1 \cos \sigma - R_2 \left\{ \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon - \cos(\varepsilon - \sigma) \right\}} \dots\dots\dots (5.28)$$

(5.28) は次の様な形にも書き換へ得られる。

$$x = \frac{\theta_0 R_2 \sec \sigma \left[e^{-\varphi t} \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon + e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \varepsilon - \sigma) + \frac{R_2}{R_1} e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \sigma) \right]}{1 - \frac{R_2}{R_1} \sec \sigma \left\{ \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon - \cos(\varepsilon - \sigma) \right\}} \dots (5.29)$$

(5.22) を見ると、廻轉運動 θ は分子第 1 項に示す所の非週期的減衰運動と第 2 項括弧の中に示された 2 箇の週期的減衰動搖とが合成されて出来てゐることが判る。且つ此の 2 箇の減衰動搖相互間には ε の位相差があり、振幅は R_2/R_1 の比をなしてゐる。然るに附録 II. (i) に於て後述する如く、或は第 49 圖の實驗結果に示す如く、 R_2/R_1 は 10^{-4} 程度の大さであるから、(5.23) の分子及び分母の第 2 項は第 1 項に對して無視し得られて、 θ は近似的に次式にて表はされる。

$$\theta \doteq \theta_0 \sec \sigma e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \sigma) \dots (5.30)$$

即ち (5.22) に示された 3 運動の中で、非週期的運動と週期的動搖の中の 1 箇とは其の運動が甚小なるため表面に認め得る程度に至らず、結局 (5.30) に示された項のみが残り、恰も只 1 箇の週期的動搖をしてゐるかの如く見ゆる譯である。

(5.28) より判る如く、船の重心の水平運動 x も亦 θ と同じ様に 1 箇の非週期的減衰運動と 2 箇の週期的減衰振動との和より成る。而して此の 2 箇の週期的減衰振動は θ の場合と同じ様に相互に R_2/R_1 の振幅比と ε の位相差とを有すると共に、 θ の之等に相對應する動搖に對し、夫々 ε の位相の遅れを有してゐる。前同様の理由に依り (5.29) の分子及び分母に於て R_2/R_1 の乗ぜられてゐる項を無視すれば x は次式の如く簡單になる。

$$x \doteq \theta_0 R_2 \sec \sigma \left[e^{-\varphi t} \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon + e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \varepsilon - \sigma) \right] \dots (5.31)$$

即ち水平運動の場合には、週期的振動の内の 1 箇は甚小の故を以て省略せられ、(5.31) に示す如く、1 箇の非週期的減衰水平移動と 1 箇の週期的減衰水平振動とが残ることとなる。換言すれば船の重心の運動は、水平振動を續け乍ら、船が初めに外力に依りて傾斜せしめられてゐた側に對し逆の方向に水平移動をなし、時間の経過と共に運動が次第に減衰せられ、時間が無限大に至つて始めて靜止する。此の事は第 7 節に於て詳述する實驗に依りて容易に證し得られた。

今 D = 時間 $t=0$ より $t=\infty$ に至る間に重心の水平に移動する距離とすれば、 D の値として次式が得られる。

$$D = x_0 - x_\infty \doteq \theta_0 R_2 \sec \sigma \left[\frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon + \cos(\varepsilon + \sigma) \right] \dots (5.32)$$

後述の模型船に就て D の値を計算し、其の大きさを第 48 圖に曲線として畫いた。 D は又實驗に依り容易に計測し得られる大さにして、同一模型船に関する實驗値を同じく第 48 圖中に記入して置いた。但し實驗の方法は附録 II. (h) に於て詳述した。第 48 圖を見ると計算より求めた D が實驗値の殆ど平均曲線となり、只今までの理論の妥當なるを證してゐる。又第 47 圖に於て D の吃水 d に對する比を調べて見ると、 D/d は θ_0 と共に増加し、 $\theta_0=35^\circ$ にて約 0.9 となつてゐる。

6. 廻轉運動の見掛けの中心

前節に於ては、船の自由横動揺は船の重心を通る縦軸の周りの廻轉運動と船の重心の水平運動との聯成振動より成立し、而して廻轉運動は單一なる減衰動揺であるに對し、水平運動は減衰水平横振動と減衰水平横移動との 2 運動より成ることを述べた。即ち二次元的に言へば、船は重心の周りに廻轉運動をなすと同時に、一方に於て重心其のものは (5.31) の第 2 項の如き水平振動を續け乍ら、船の初めの傾斜角の側に對し逆の方向に向つて水平横移動をなし、運動は時間の経過と共に次第に減衰し、 $t=\infty$ に於て完全に靜止の状態となる。

今第 3 圖に示す如く、船體中心線上に於て任意の 1 點 C を取り、C 點の重心 G からの距離を Y とす。但し Y は下向きに測つて正に取る。然る時は C 點の任意の時刻 t に於ける水平座標 X は次式にて示される。

$$X = x - Y \sin \theta \dots\dots\dots (6.1)$$

θ を小なりと考へて

$$\sin \theta \doteq \theta \dots\dots\dots (6.2)$$

と置けば

$$X = x - Y\theta \dots\dots\dots (6.3)$$

(6.3) の中の x 及び θ の値として (5.31) 及び (5.30) を使用すれば X は次の様になる。

$$X = \theta_0 R_2 \sec \sigma \left[e^{-\varphi t} \frac{\mu}{\varphi} \sin \epsilon + e^{-\alpha t} \left\{ \cos(\omega t - \epsilon - \sigma) - \frac{Y}{R_2} \cos(\omega t - \sigma) \right\} \right]$$

上式を整理すれば次の様になる。

$$X = \theta_0 R_2 \sec \sigma \left[e^{-\varphi t} \frac{\mu}{\varphi} \sin \epsilon + g e^{-\alpha t} \cos(\omega t - q - \sigma) \right] \dots\dots\dots (6.4)$$

但し

$$g = \sqrt{\left(\cos \epsilon - \frac{Y}{R_2} \right)^2 + \sin^2 \epsilon}, \quad \tan q = \frac{\sin \epsilon}{\left(\cos \epsilon - \frac{Y}{R_2} \right)} \dots\dots\dots (6.5)$$

(6.4) より明らかなる如く、船體中心線上の任意の 1 點 C の水平運動の有様は、重心 G の運動と同じく、矢張り減衰水平横振動と減衰水平横移動との 2 運動より成立してゐる。(6.4) の第 1 項即ち水平移動の項は Y に無關係換言すれば C 點の高さに無關係であるが、第 2 項即ち水平振動の項は C 點の高さに依りて變化し、其の振幅の大きさを支配する所の g 及び位相の遅れ q の Y に依る變化は (6.5) に依つて與へられる。

Y に無關係な第 1 項を茲暫くの間考慮の外に置き、第 2 項の水平振動のみを考へ、其の項を ξ と置く。

従つて

$$\xi = \theta_0 R_2 \sec \sigma \cdot g e^{-\alpha t} \cos(\omega t - q - \sigma) \dots\dots\dots (6.6)$$

(6.6) は單なる減衰振動の式にして、 Y 一定なる時に時間 t の變化に對する ξ の變化は第 4 圖の様な曲線に依つて示される。

ξ の振幅は C 點の位置に依り、即ち Y に依つて變化するものであるが、今 ξ の振幅の内

$$(\omega t - q - \sigma) = 0 \dots\dots\dots (6.7)$$

$$\text{を満足するものを } |\xi|_0 \text{ と置けば } |\xi|_0 = \theta_0 R_2 \sec \sigma \cdot g e^{-\frac{\alpha}{\omega}(q+\sigma)} \dots\dots\dots (6.8)$$

$$\text{又 } (\omega t - q - \sigma) = \pi \dots\dots\dots (6.9)$$

$$\text{を満足するものを } |\xi|_1 \text{ と置けば } |\xi|_1 = \theta_1 R_2 \sec \sigma \cdot g e^{-\frac{\alpha}{\omega}(q+\sigma+\pi)} \dots\dots\dots (6.10)$$

$$\text{今 } 2|\xi|_m = |\xi|_0 + |\xi|_1 \dots\dots\dots (6.11)$$

$$\text{と置けば } 2|\xi|_m = \theta_0 R_2 \sec \sigma g e^{-\frac{\alpha}{\omega}(q+\sigma)} \cdot [1 + e^{-\frac{\alpha}{\omega}\pi}] \dots\dots\dots (6.12)$$

茲に $2|\xi|_m$ は C 點の左右の全振幅の大きさを表はすものであるが、今船體中心線上に於て $2|\xi|_m$ の最小なる C 點の位置を求めるため $2|\xi|_m$ を Y にて微分して零と置く。

$$\therefore \frac{d(2|\xi|_m)}{dY} = 0 \dots\dots\dots (6.13)$$

$2|\xi|_m$ を最小ならしむる Y の値を Y_0 と名付け、(6.13) に (6.12) を代入して Y_0 を求むれば

$$Y_0 = R_2 \cos \epsilon [1 + \tan \epsilon \cdot \tan \sigma] \dots\dots\dots (6.14)$$

Y_0 に相當する g, q の値を夫々 g_0, q_0 とすれば、(6.5) に (6.14) を代入して

$$g_0 = \sin \epsilon \cdot \sec \sigma, \quad q_0 = \tan^{-1}(-\cot \sigma) = \frac{\pi}{2} + \sigma \dots\dots\dots (6.15)$$

$2|\xi|_m$ の最小値を $2|\xi|_{m0}$ とすれば、(6.15) を (6.12) に代入して

$$2|\xi|_{m0} = \theta_0 R_2 \sec^2 \sigma \cdot \sin \epsilon \cdot e^{-\frac{\alpha}{\omega}(\frac{\pi}{2} + 2\sigma)} \cdot [1 + e^{-\frac{\alpha}{\omega}\pi}] \dots\dots\dots (6.16)$$

を得。

今半週期間を 4 間隔に分割し、 $t=0$ より始り各時刻を $0, 1, 2, \dots$ と名付ける。然る時は時刻 2 は 1/4 週期目を示し、時刻 4 は半週期目、時刻 8 は 1 週期目を表はす。而して各時刻に於ける船體中心線の位置並びに方向を示せば第 6 圖のようになる。第 6 圖を見ると (6.8) 及び (6.10) で與へらるゝ $|\xi|_0$ 及び $|\xi|_1$ の曲線は何れも船體中心線を表はす直線群の包絡線なることを示し、特に $|\xi|_0$ は最初の半週期間の又 $|\xi|_1$ は最後の半週期間の包絡線なることが判る。

扱て船體中心線上の點に於て $2|\xi|_m$ の最小なる點を C_0 と名付けるならば、 C_0 は重心 G より下に Y_0 の距離にあり、 Y_0 は (6.14) にて與へられ、 C_0 の全振幅 $2|\xi|_{m0}$ は (6.16) に依つて表はされる。又現時刻に於ける船體中心線と次の瞬間に於ける船體中心線との交點を現時刻に於ける瞬間的廻轉軸と定義するならば、此の瞬間的廻轉軸は空間の或る一定點ではなく、時間と共に變化し、其の軌跡は第 6 圖の $|\xi|_0$ 及び $|\xi|_1$ 曲線に依つて示される。又同じく此の瞬間的廻轉軸は船體中心線上の或る一定點ではなく、最初の半週期間及び最後の半週期間に於て $Y=-\infty$ の點より $Y=+\infty$ の點に至る迄移動する。併し外觀上船は恰も水平振動の振幅最小なる點 C_0 を中心として廻轉してゐるかの如く見ゆる譯である。嚴密な意味では横動搖の中心とは純粹の偶力が與へられた時の廻轉運動の中心を

指すものであるから、便宜上茲に C_0 を自由横動揺に於ける廻轉運動の見掛けの中心、或は單に自由横動揺の見掛けの中心と名付ける。

自由横動揺の見掛けの中心 C_0 の重心 G からの距離 Y_0 の本質を究めるために (6.14) 中の R_2 に (5.9) を代入し、更に (3.7), (3.11) を用ふれば

$$Y_0 = \frac{I_1}{(M+M_1)} E_2 \cos \epsilon \cdot [1 + \tan \epsilon \cdot \tan \sigma] \cdots \cdots \cdots (6.17)$$

上式に於て $E_2 \cos \epsilon \cdot [1 + \tan \epsilon \cdot \tan \sigma]$ は θ_0 に依る變動至つて少く、且つ其の値も殆ど 1 に近い故、 Y_0 の大さは主として

$$\frac{I_1}{(M+M_1)} \cdots \cdots \cdots (6.18)$$

に依つて左右せられる。即ち Y_0 は I_1 に正比例し、 $(M+M_1)$ に逆比例する。而して I_1 は (3.1) にて定義した如く、質量×距離の dimension を有し、船の廻轉運動に依つて生ずる水平方向の推力の内で水の慣性に比例する項を表はし、 $(M+M_1)$ は船體の水平運動に對する見掛けの質量の大きさを示すものである。

後述の箱型模型船に就て Y_0 , $2|\xi|_{m_0}$ の大きさを附録 II. (g) の計算に依つて求め、 θ_0 の變化に對して曲線に畫けば第 46 圖の様になる。第 46 圖を見ると Y_0 は大約 1 糎内外の値を示し、 $2|\xi|_{m_0}$ の大さは θ_0 と共に増加し、 $\theta_0 = 35^\circ$ で約 0.4 糎となつてゐる。又 Y_0 , $2|\xi|_{m_0}$ の吃水 d に對する比を求め、之を第 47 圖に示した。第 47 圖を見ると Y_0/d は大約 0.08 内外であり、 $2|\xi|_{m_0}/d$ は $\theta_0 = 35^\circ$ 附近にて大約 0.03 の値を示してゐる。

第 7 節末尾に於て詳述の實驗に依り、本模型船の $\theta_0 = 33^\circ$ の場合の色々な時刻に於ける船體中心線の位置を求めて之を第 7 圖に示し、且つ船體中心線群の包絡線 $|\xi|_0$ 及び $|\xi|_1$ を畫いた。第 7 圖の實驗から求めた $|\xi|_0$, $|\xi|_1$ 曲線の形は第 6 圖の計算から求めた曲線に類似し、且つ實驗値 $Y_0 = 1.11$ 糎、 $2|\xi|_{m_0} = 0.38$ 糎は第 46 圖の計算値に大體に於て一致することを認めることが出来る。

次に (6.6) に依つて示された ξ に於て減衰の影響を無視し $e^{-\alpha t}$ を省略した場合を考へて見る。以下の諸計算に於ては $e^{-\alpha t}$ を省略せざる場合と同一の記號を用ひ、只 dash を附することに依り兩者を區別することとする。

$$\text{然る時は} \quad \xi' = \theta_0 R_2 \sec \sigma \cdot g \cos(\omega t - q - \sigma) \cdots \cdots \cdots (6.19)$$

$$\text{又 (6.8), (6.10), (6.12) より} \quad |\xi|_0' = |\xi|_1' = |\xi|_{m'} = \theta_0 R_2 \sec \sigma \cdot g \cdots \cdots \cdots (6.20)$$

$$\text{従つて今之を } |\xi| \text{ と置けば} \quad |\xi| = \theta_0 R_2 \sec \sigma \cdot g \cdots \cdots \cdots (6.21)$$

$$(6.14) \text{ より} \quad Y_0' = R_2 \cos \epsilon \cdots \cdots \cdots (6.22)$$

$$(6.15) \text{ より} \quad g_0' = \sin \epsilon, \quad q_0' = \frac{\pi}{2} \cdots \cdots \cdots (6.23)$$

$$(6.16) \text{ より} \quad |\xi|_{m_0}' = \theta_0 R_2 \sec \sigma \cdot \sin \epsilon \cdots \cdots \cdots (6.24)$$

(6.21) の中の g に (6.5) を代入して變形すれば

$$\frac{|\xi|^2}{[\theta_0 R_2 \sec \sigma \cdot \sin \epsilon]^2} - \frac{[R_2 \cos \epsilon - Y]^2}{[R_2 \sin \epsilon]^2} = 1 \quad \dots\dots\dots (6.25)$$

(6.25) は $|\xi|$ 及び Y を座標とする直角双曲線の方程式にして、其の交軸は

$$Y = R_2 \cdot \cos \epsilon \quad \dots\dots\dots (6.26)$$

である。(6.25) を圖示すれば第 8 圖のようになる。

今 a = 交軸の長さの半分、 b = 共軛軸の長さの半分

とすれば、 a, b は次式にて表はされる。

$$a = \theta_0 R_2 \sec \sigma \cdot \sin \epsilon \quad \dots\dots\dots (6.27)$$

$$b = R_2 \sin \epsilon \quad \dots\dots\dots (6.28)$$

(6.27) の a は (6.24) にて示された $|\xi|$ の最小値 $|\xi|_{\min}$ に等しい。

斯くの如く $e^{-a\xi}$ を省略せる場合には瞬間的廻轉軸の軌跡は直角双曲線となり、其の中心 C_0' の位置 Y_0' は (6.22) にて與へられ、 Y_0' は (6.14) の Y_0 に較べて僅かに小である。即ち C_0' は C_0 よりも僅かに上方にある。後述の模型船に於ける Y_0', a, b の θ_0 の變化に對する曲線圖を附録 II (g) の計算に依つて求め、之を第 46 圖に示した。

7. 船 體 中 心 線 の 運 動

前節に於ては船全體としての水平移動を考慮外に置いて廻轉運動の中心を求めたのであるが、本節に於ては水平移動をも考慮して船體中心線が時刻と共に變化する有様を調べることにする。

任意の時刻 t に於ける船體中心線上の任意の 2 點の位置を (6.4) の X より求め、其の 2 點を連結すれば、其の時刻に於ける船體中心線の位置が決定せられる。

今 T を動搖の半週期とし、時刻 $t=0$ より始まり、時間 $T/6$ の間隔を有する各時刻を 0, 1, 2, $\dots$ と名付ける。而して各時刻に於ける船體中心線の位置を上のように求めて圖示すれば第 9 圖のようになる。第 9 圖は後述の箱型模型船に於て $\theta_0=30^\circ$ の場合に就て計算した結果を示したのである。

第 9 圖の直線群の cross curve を作れば、船體中心線上の任意の點 C の時間と共に變化する水平運動の有様を示すことが出来る。第 9 圖に於て船體中心線上の點 $A, G, C_0', C_0'', B', A'$ の水平移動曲線を第 11 圖に示した。

第 11 圖を見ると C_0' の曲線は $t=0$ に於て X の極大あり、 G の曲線では $t=0$ の極大點の外に極小、極大が夫々 1 箇宛ある。 A 點の曲線では $t=0$ の極大點の外に極小及び極大が夫々 2 箇宛ある。又 B' では $t=0$ に於ける極小を含めて 1 對の極小、極大あり、 A' では 2 對の極小、極大がある。 C_0'' の曲線では $t=0$ に於て變曲點となり、極小、極大なし。斯くの如く C が C_0'' より上下の方向に遠ざかるに連れて極小、極大の数が漸次増加してゐる。

今極小及び極大を夫々 1 對だけづゝ増加する所の境界點を C_0'' より始めて上向きに順次 $C_1, C_2, \dots$

……と名付け、下向きに $C_1', C_2', \dots$ と名付ける。然る時は C_0'' と C_1 との間に於ては極大點は $t=0$ のみ、 C_1 と C_2 との間では $t=0$ に於ける極大點以外に 1 對の極小、極大を與へる。又 C_0'' と C_1' との間では極小、極大を 1 對與へ、 C_1' と C_2' との間では 2 對生ずる。以下順次之に準ずるものとする。今之等の C を C_n と名付け、 C_n に対する Y の値を Y_n とすれば、 Y_n は附録 I の證明法に依り、次式にて計算し得ることが判る。

$$Y_n = R_2 \cos \varepsilon [1 - \tan \varepsilon \cdot \cot q_n] \dots\dots\dots (7.1)$$

茲に q_n は Y_n に対する q の値にして、

$$\operatorname{cosec} q_n = e^{\left[(4n-1) \frac{\pi}{2} + q_n - \sigma' \right] \tan \sigma'} \cdot \sec \sigma' \quad \text{但し} \quad \tan \sigma' = \frac{(\alpha - \varphi)}{\omega} \dots\dots\dots (7.2)$$

なる式を用ひ、逐次近似法に依り計算し得る値である。

又 C_n の cross curve に變曲點を生ぜしむる時刻 t_n は附録 I. (9) に依つて與へられ、次の形となる。

$$t_n = \frac{1}{\omega} \left[(4n-1) \frac{\pi}{2} + q_n - \sigma' \right] \dots\dots\dots (7.3)$$

今 C_0'' に対する t_n, q_n, Y_n を夫々 t_0'', q_0'', Y_0'' とすれば、附録 I の (11), (12), (13) より

$$t_0'' = 0 \dots\dots\dots (7.4)$$

$$q_0'' = \frac{\pi}{2} + \sigma' \dots\dots\dots (7.5)$$

$$Y_0'' = R_2 \cos \varepsilon \cdot [1 + \tan \varepsilon \cdot \tan \sigma'] \dots\dots\dots (7.6)$$

(7.6) の Y_0'' を (6.14) の Y_0 と比較して見ると、 σ が σ' に變化してゐるのみであるから、 Y_0'' の方が Y_0 より極僅かに値が小さく、従つて C_0'' は C_0 より極少し上にあるが、其の差は極僅少にして、 C_0'' は C_0 に殆ど一致してゐると見て差支へなし。本模型船に関する Y_0'' の θ_0 に対する變化を第 46 圖に曲線にて示した。

C_n の cross curve に於て變曲點を生ずる位置即ち t_n, Y_n を (7.1), (7.2), (7.3) より求めて第 9 圖に記入すれば $\overline{C_n}$ となる。 $\overline{C_n}$ を連結すれば第 9 圖に點線にて示した様な曲線にて表はされ、此の曲線は t_n が無限大に近づくに連れて $X=0$ の直線に接近して行く。

只今の箱型模型船に就て $\theta_0 = 30^\circ$ の場合の C_n の位置及び t_n の大きさを示せば次の如し。

C_n	C_0'' C_n (糎)	t_n (秒)
C_1	0.714	1.77
C_2	1.353	3.78
C_3	2.380	5.83
C_1'	0.702	2.45
C_2'	1.617	4.64

茲に注意すべきことは第 4 圖、第 9 圖、第 11 圖の諸曲線は何れも種々な θ_0 の値に對して α を一定と考へて計算して求めたことである。然るに實際運動に於ては第 25 圖に示す如く、 α は θ_0 と共に變化し、 θ_0 が増せば α も増大する性質を有してゐる。即ち α は自由横動搖の最初の 1 振れ、次の 1 振れ、更に次の 1 振れと動搖が遅れるに連れて次第に小さくなる。従つて以上の諸曲線は何れも α の一定なる場合即ち θ_0 の非常に小なる場合にのみ適用せられるものであつて、 θ_0 が大きくなると此のまゝでは實際運動とは可なり遊離したものを表はすこととなる。第 22 圖に示す如く ω も θ_0 と共に變化するが、其の變化の以上の諸曲線に及ぼす影響は至つて小なる故、茲では ω の變化の影響を無視し、單に α が θ_0 に依つて變化した場合に以上の諸曲線が如何に變化するかと云ふ問題を研究して見ることにする。

第 1、第 2、第 3、……の各振れに對する α を第 25 圖より求め、此の α を (6.6) の α の中に代入して求めた ξ を第 5 圖に示した。第 5 圖を第 4 圖に比較すると第 5 圖の方が減衰の程度が非常に小さく、第 6 振れの振幅は前者に於ては後者の約 3.5 倍となつてゐる。又此の α を (5.3) に代入して重心 G の水平座標 x を計算し、此の x の時間 t に對する變化を第 12 圖の G 曲線として示した。

第 11 圖、第 12 圖に示せる G の曲線より判斷すると、 α を一定として計算すれば x の極小、極大が只 1 對のみしか無かつたのであるが、實際運動に於ては x の極小、極大が可なり長い時間連續するものであることが判る。之等の理論を確かむるため次の實驗を行つた。第 13 圖に示せる如く、箱型模型船の中央部に上下の方向に目盛を附せる檣を樹立し、縦横に目盛を施せる screen の前面に於て自由横動搖を行はしめ、16 耗活動寫眞機に依つて檣の振動狀況を撮影し、其の結果から船の重心附近の船體中心線の振動狀況を求め、之を第 10 圖に示した。第 10 圖には $\theta_0=33^\circ$ の場合に就て實驗した結果を示した。第 10 圖中の 0, 1, 2, ……の番號を附せる各直線は夫々 $t=0$ より始まり、 $T/6$ (T は動搖の半週期) の間隔を有する各時刻に於ける船體中心線の占むる位置を示す。重心 G の水平運動を第 10 圖の直線群の cross curve として求め、之を第 12 圖に G_0 曲線として示した。又 $\theta_0=33^\circ$ に對する Y_0'' を第 46 圖より求めて第 10 圖に C_0'' の位置を記録し、其の cross curve を第 12 圖に C_0'' 曲線として示した。第 12 圖に於て計算に依つて求めた G 曲線と實驗結果の G_0 曲線とを比較すると、大體に於て兩曲線は近似してゐるが、特に最初の 1 振れの間は全く一致してゐるものと言つて差支へない。又極小、極大が可なり長い間連續してゐる點は兩曲線共一致してゐるが、實際運動の方が山及び谷の振幅が計算値よりも大きい。計算値では時間の経過と共に振幅が次第に減衰してゐるが、實驗値では振動が非常に不規則である。又第 12 圖に示した C_0'' の實際運動と第 11 圖に示した C_0'' の計算値とを比較すると、最初の 1 振れに於て非常に良く近似してゐるが、時間の経過と共に實際運動の方が次第に不規則となり、山及び谷が大きく現はれて来る。之は最初の 1 振れのみが亂されざる水中の運動であるが、第 2 振れ以後の動搖は何れも以前の動搖に依

つて亂されたる水中に於て運動することの影響であることは論を俟たぬ。

第 12 圖より判斷して、船全體としての水平移動の方向及び大きさは計算と實驗とが大體に於て一致してゐるものと云ふことが出来る。

又第 12 圖に於て、實驗より求めた G_e, C_0'' の兩曲線に對する純水平移動のみの項 $\theta_0 R_2 \sec \sigma e^{-\frac{\mu}{\varphi} t} \sin \epsilon$ を表はすものとして圖に點線にて示した様な曲線を假定し、此の曲線と G_e, C_0'' 曲線との差を取れば、其の差は夫々 G_e, C_0'' 曲線の任意の時刻に於ける振動の振幅を表はす。従つて G_e, C_0'' 曲線の cross curve を作り、其の際水平移動の項を省略し、振動の振幅の大きさのみを取るならば、船の自由横動搖に於て水平移動を考慮外に置き船の廻轉運動のみを考へた時の任意の時刻に於ける船體中心線の位置を決定することが出来る。今 1 週期間を 8 間隔に分割し、 $t=0$ より始まり、各時刻に 0, 1, 2, ... と名付け、各時刻に於ける船體中心線の位置を上の如くして求めて圖示すれば第 7 圖となる。第 7 圖に於て直線群に對する包絡線 $|\xi|_0, |\xi|_1$ を畫けば、此の 2 包絡線の形は第 6 圖の夫に類似してゐる。又 $|\xi|_0, |\xi|_1$ 兩曲線間の水平距離の最小なる船體中心線上の點 C_0 を求め、 C_0 の重心 G からの距離 Y_0 及び C_0 の所に於ける水平振動の全振幅 $2|\xi|_{m0}$ の大きさを圖より求むれば $Y_0=1.11$ 糎、 $2|\xi|_{m0}=0.38$ 糎となり、之等は何れも第 46 圖に示した $\theta_0=33^\circ$ に對する計算値と殆ど一致してゐること判る。

8. 減衰係數及び振動數に及ぼす水平運動の影響

減衰係數 φ, α 及び振動數 ω に及ぼす水平運動の影響を本節に於て述べる。(3.17) を書き換へれば次の様になる。

$$p = -\varphi_1 + \frac{m_1 i_1 \gamma (p + \alpha_2)(p + \varphi_2)p}{(p^2 + 2\alpha_1 p + \omega_1^2)} \quad \dots\dots\dots (8.1)$$

上式の p の中に $p_1 = -\varphi$ を代入すれば次式が得られる。

$$\varphi = \varphi_1 + C_\varphi \quad \text{但し} \quad C_\varphi = \frac{m_1 i_1 \gamma (-\varphi + \alpha_2)(-\varphi + \varphi_2)\varphi}{(\varphi^2 - 2\alpha_1 \varphi + \omega_1^2)} \quad \dots\dots\dots (8.2)$$

附録 II. (f) に於て後述する如く、又第 41 圖の實驗結果よりも明らかなる如く、 C_φ は $\varphi_1 \times 10^{-3}$ 以下の程度の大さであるから、之を φ_1 に對して無視し得て、近似的に

$$\varphi \doteq \varphi_1 \quad \dots\dots\dots (8.3)$$

と置いて差支へなし。

次に α, ω の近似値を求めるために (3.17) を次の様な形に書き換へる。

$$p^2 + 2\alpha_1 p + \omega_1^2 = \frac{m_1 i_1 \gamma (p + \alpha_2)(p + \varphi_2)p}{(p + \varphi_1)} \quad \dots\dots\dots (8.4)$$

上式の右邊の p の中に $p_2 = -\alpha + i\omega$ を代入したものを $-Q\omega^2 e^{-i\eta}$ と置く。即ち

$$-Q\omega^2 e^{-i\eta} = \frac{m_1 i_1 \gamma (-\alpha + \alpha_2 + i\omega)(-\alpha + \varphi_2 + i\omega)(-\alpha + i\omega)}{(-\alpha + \varphi_1 + i\omega)} \quad \dots\dots\dots (8.5)$$

然る時は Q 及び η は次式にて表はされる。

$$Q = m_1 \gamma \cdot E_4, \text{ 但し } E_4 = E_2 \sqrt{1 + \left(\frac{-\alpha + \varphi_1}{\omega}\right)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2} \dots\dots\dots (8.6)$$

$$\eta = \varepsilon - \delta, \quad \tan \delta = \frac{(2\alpha - \varphi_1)}{\omega} \cdot E_5, \text{ 但し } E_5 = \frac{1}{1 + \left(\frac{-\alpha + \varphi_1}{\omega}\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)} \dots\dots\dots (8.7)$$

第 31 圖の實驗結果を見ると (8.6) の E_4 は $\theta_0 = 0^\circ \sim 35^\circ$ の範圍内に於て 1.01~1.07 の値を示し、又 (8.7) の E_5 は 0.99~1.01 の値を示してゐる。斯くの如く E_4 及び E_5 は共に其の値が 1 に近く、且つ θ_0 に依る變動が至つて少く、殆ど恒數と見做して差支へない程度のものであるから、今若し

$$E_4 = 1 \quad \dots\dots\dots (8.8)$$

$$E_5 = 1 \quad \dots\dots\dots (8.9)$$

と置くならば、 Q 及び η の近似値として次式が得られる。

$$Q = m_1 \gamma \quad \dots\dots\dots (8.10)$$

$$\eta = \varepsilon - \delta, \quad \tan \delta = \frac{(2\alpha - \varphi_1)}{\omega} \quad \dots\dots\dots (8.11)$$

(8.4) 中の p の値として $p_1 = -\alpha + i\omega$ を代入し、且つ右邊には (8.5) を代入して實數部分と虚數部分とに分けて整理をすれば次式が得られる。

$$[\alpha^2 - \omega^2 - 2\alpha_1\alpha + \omega_1^2 + Q\omega^2 \cos \eta] + i[-2\alpha\omega + 2\alpha_1\omega - Q\omega^2 \sin \eta] = 0$$

上式を成立せしむるために、實數部分と虚數部分とを夫々零と置いて次の 2 式が得られる。

$$\alpha^2 - \omega^2 - 2\alpha_1\alpha + \omega_1^2 + Q\omega^2 \cos \eta = 0 \quad \dots\dots\dots (8.12)$$

$$-2\alpha\omega + 2\alpha_1\omega - Q\omega^2 \sin \eta = 0 \quad \dots\dots\dots (8.13)$$

(8.13) より α の値として次のものが得られる。

$$\alpha = \alpha_1 - C_\alpha \quad \text{但し } C_\alpha = \frac{Q\omega}{2} \sin \eta \quad \dots\dots\dots (8.14)$$

(8.14) を (8.12) に代入すれば ω の値として次の形のものが得られる。

$$\omega = \sqrt{(\omega_1^2 - \alpha_1^2) + C_\omega} \quad \text{但し } C_\omega = Q\omega^2 \cos \eta + C_\alpha^2 \dots\dots\dots (8.15)$$

第 43 圖の C_α と第 44 圖の C_ω との實驗結果を互に比較して見ると、 C_ω 中の第 2 項は第 1 項に對して其の 0.1% 内外に止まる故、之を無視することが出来る。

故に

$$C_\omega = Q\omega^2 \cos \eta \quad \dots\dots\dots (8.16)$$

次に船の重心の水平運動を拘束し、廻轉運動のみを許して自由横動搖を行はしめた場合を考へて見る。此の場合の原微分方程式は (3.12) の第 4 項を省略したもの

$$\text{即ち} \quad \ddot{\theta} + 2\alpha_1\dot{\theta} + \omega_1^2\theta = 0 \quad \dots\dots\dots (8.17)$$

となる。今

α_0 = 重心の水平運動を拘束せる場合の減衰係數

ω_0 = 重心の水平運動を拘束せる場合の振動数

と置けば、 α_0, ω_0 は (8.17) より直ちに次の形にて表はされることが判る。

$$\alpha_0 = \alpha_1 \dots\dots\dots (8.18)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 - \alpha_1^2} \dots\dots\dots (8.19)$$

$$(8.14) \text{ と } (8.18) \text{ とを比較すれば } \alpha_0 - \alpha = C_\alpha \dots\dots\dots (8.20)$$

$$\text{又 } (8.15) \text{ と } (8.19) \text{ とを比較すれば } \omega_0^2 - \omega^2 = C_\omega \dots\dots\dots (8.21)$$

となる。従つて (8.20) 及び (8.21) を見ると C_α 及び C_ω は廻轉運動に及ぼす水平運動の影響を表はす項であることが判る。

後述の箱型模型船に関する実験結果を見ると、第 45 圖に示す如く、自由横動揺の減衰係数に及ぼす水平運動の影響 $C_\alpha/\alpha \times 100\%$ は $\theta_0 = 0^\circ$ 附近にて約 7% であるが、 θ_0 の増加と共に漸次減少し、 $\theta_0 = 35^\circ$ 附近にて約 4% となつてゐる。又水平運動の振動数に及ぼす影響 $(C_\omega/\omega^2) \times 100\%$ は θ_0 の大小に無關係に大約 4% であり、水平運動の週期に及ぼす影響 $\{(T_0 - T)/T\} \times 100\%$ は非常に小さく、且つ θ_0 の大小に無關係に約 2% となつてゐる。茲に T 及び T_0 は夫々 π/ω 及び π/ω_0 のことにして、重心の水平運動を拘束せざる場合及び拘束せる場合の半週期を意味するものとす。

9. 運動方程式の近似解法

運動方程式 (2.5), (2.6) は非常に複雑な式であつて、其の正確な解を得ること困難である。第 3 節に於ては之を先づ (3.5), (3.6) に示された様な線形微分方程式に簡單化して解き、廻轉運動と水平運動との聯成振動の概括的な傾向を知ることが出来たのであるが、本節に於ては原運動方程式 (2.5), (2.6) を其のまゝの形で近似的に解く方法を考究しようと思ふ。其の爲に嘗て渡邊教授が、波の上の横動揺の解析に應用された Hamilton の原理を此の場合にも使用することにする。

Hamilton の原理は次の様なものである。

$$\int_0^t [\delta T + \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)] dt = 0 \dots\dots\dots (9.1)$$

(9.1) に於て δ は變分を表はし、 T は kinetic energy、 X, Y, Z は x, y, z の方向の外力を表はす。

今運動を廻轉運動と水平運動との聯成振動とすれば

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2, & \sum X\delta x &= X_1\delta\theta + X_2\delta x \\ \sum Y\delta y &= 0, & \sum Z\delta z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9.2)$$

と置くことが出来る。但し X_1 及び X_2 は夫々 dissipative force を含んだ external couple 及び horizontal force とす。

$$(9.2) \text{ の } T \text{ より } \delta T = I\dot{\theta}\delta\dot{\theta} + M\dot{x}\delta\dot{x} \dots\dots\dots (9.3)$$

を得。(9.2), (9.3) を (9.1) に代入して次式を得。

$$\int_{t_0}^{t_1} [I\dot{\theta}\delta\dot{\theta} + X_1\delta\theta] dt + \int_{t_0}^{t_1} [M\dot{x}\delta\dot{x} + X_2\delta x] dt = 0 \quad \dots\dots\dots (9.4)$$

然るに

$$\left. \begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} I\dot{\theta}\delta\dot{\theta} dt &= [I\dot{\theta}\delta\theta]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} I\ddot{\theta}\delta\theta dt \\ \int_0^{t_1} M\dot{x}\delta\dot{x} dt &= [M\dot{x}\delta x]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} M\ddot{x}\delta x dt \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9.5)$$

(9.5) を (9.4) に代入すれば

$$[I\dot{\theta}\delta\theta]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} [I\ddot{\theta} - X_1]\delta\theta dt + [M\dot{x}\delta x]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} [M\ddot{x} - X_2]\delta x dt = 0 \quad \dots\dots\dots (9.6)$$

今 θ に對して (5.30), x に對して (5.31) を用ひ、次の様に置く。

$$\theta = \theta_0 \sec \sigma e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \sigma) \quad \dots\dots\dots (9.7)$$

$$x = \theta_0 R_2 \sec \sigma \left[e^{-\varphi t} \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon + e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \varepsilon - \sigma) \right] \quad \dots\dots\dots (9.8)$$

然る時は

$$t=0 \quad \text{に於て} \quad \dot{\theta}=0, \quad \dot{x}=0$$

又 $t=\infty$ に於て

$$\dot{\theta}=0, \quad \dot{x}=0$$

故に今若し

$$t_0=0, \quad t_1=\infty \quad \dots\dots\dots (9.9)$$

に取るならば (9.6) の第 1 項及び第 3 項は零となる。即ち

$$[I\dot{\theta}\delta\theta]_0^\infty = 0, \quad [M\dot{x}\delta x]_0^\infty = 0 \quad \dots\dots\dots (9.10)$$

又 (9.6) の第 2 項及び第 4 項の括弧の中は、夫々 (2.5) 及び (2.6) の左邊と同一のものを表はしてゐるから、今之等を夫々 Φ_1, Φ_2 なる記號にて示す。即ち

$$\Phi_1 \equiv I\ddot{\theta} - X_1 \equiv I\ddot{\theta} + Fh_1 \cos \phi + Wh_0 - Rh_2 \quad \dots\dots\dots (9.11)$$

$$\Phi_2 \equiv M\ddot{x} - X_2 \equiv M\ddot{x} + R - F \cos(\theta - \phi) \quad \dots\dots\dots (9.12)$$

(9.9), (9.10), (9.11), (9.12) を (9.6) に代入すれば次式を得。

$$\int_0^\infty \Phi_1 \delta\theta dt + \int_0^\infty \Phi_2 \delta x dt = 0 \quad \dots\dots\dots (9.13)$$

(9.7), (9.8) より夫々 $\delta\theta, \delta x$ を計算すれば

$$\delta\theta = \delta\theta_0 \sec \sigma e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \sigma) + \delta\sigma \cdot \theta_0 \sec^2 \sigma e^{-\alpha t} \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (9.14)$$

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta R_2 \cdot \theta_0 \sec \sigma \left[e^{-\varphi t} \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon + e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \varepsilon - \sigma) \right] \\ &\quad + \delta\varepsilon \cdot R_2 \theta_0 \sec \sigma \left[e^{-\varphi t} \frac{\mu}{\varphi} \cos \varepsilon + e^{-\alpha t} \sin(\omega t - \varepsilon - \sigma) \right] \quad \dots\dots\dots (9.15) \end{aligned}$$

(9.13) に (9.14), (9.15) を代入すれば

$$\delta\theta_0 \cdot \sec \sigma \int_0^\infty \Phi_1 e^{-\alpha t} \cos \omega t - \sigma dt + \delta\sigma \cdot \theta_0 \sec^2 \sigma \int_0^\infty \Phi_1 e^{-\alpha t} \sin \omega t \cdot dt$$

$$\begin{aligned}
& +\delta R_2 \cdot \rho_0 \sec \sigma \int_0^\infty \Phi_2 \left[e^{-\gamma t} \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon + e^{-\alpha t} \cos (\omega t - \varepsilon - \sigma) \right] dt \\
& +\delta \varepsilon \cdot \theta_0 R_2 \sec \sigma \int_0^\infty \Phi_2 \left[e^{-\gamma t} \frac{\mu}{\varphi} \cos \varepsilon + e^{-\alpha t} \sin (\omega t - \varepsilon - \sigma) \right] dt = 0 \dots\dots\dots (9.16)
\end{aligned}$$

上式が $\delta\theta_0$, $\delta\sigma$, δR_2 , $\delta\varepsilon$ に無関係に成立するためには、次の 4 式が成立しなければならぬ。

$$\int_0^\infty \Phi_1 e^{-\alpha t} \cos (\omega t - \sigma) dt = 0 \dots\dots\dots (9.17)$$

$$\int_0^\infty \Phi_1 e^{-\alpha t} \sin \omega t dt = 0 \dots\dots\dots (9.18)$$

$$\int_0^\infty \Phi \left[e^{-\gamma t} \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon + e^{-\alpha t} \cos (\omega t - \varepsilon - \sigma) \right] dt = 0 \dots\dots\dots (9.19)$$

$$\int_0^\infty \Phi_2 \left[e^{-\gamma t} \frac{\mu}{\varphi} \cos \varepsilon + e^{-\alpha t} \sin (\omega t - \varepsilon - \sigma) \right] dt \dots\dots\dots (9.20)$$

先づ (9.11), (9.12) の中に含まれた h_0 , h_1 , h_2 , ϕ , F , R を夫々 θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, $\dots$, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dots$ の任意の函数に展開し、(9.7), (9.8) に示された θ , x を (9.11), (9.12) に代入して Φ_1 , Φ_2 を求め、之を (9.17), (9.18), (9.19), (9.20) に代入して得た 4 式を聯立方程式として解けば、求むる近似解が得られる。

10. 船が其の重心の水平移動を拘束された状態に於て自由 横動揺を行ふ場合の近似解

此の場合には (2.6) は水平運動に對する運動方程式であるから廢せられ、(2.5) の左邊最後の項も亦水平運動の廻轉運動に及ぼす影響を表はす項であるから省略せられて、結局次の如き廻轉運動に對する運動方程式が残る。

$$I\ddot{\theta} + Fh_1 \cos \phi + Wh_0 = 0 \dots\dots\dots (10.1)$$

一般に水の抵抗 F としては $\dot{\theta}^2$ の項まで取らねばならないことは良く知られてゐる。又復原挺 h_0 は傾斜角 θ が大きくなると θ の一次式にては表はし得ず、少く共 θ の三次又は五次までは取らねばならない。依つて今次の様な假定を設ける。

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= h(\theta + k_1\theta^3 + k_2\theta^5), \quad h_1 = \theta \text{ に無関係な或る常數} \\ \phi &= 0, \quad F = I_1\dot{\theta} + I_{10}\dot{\theta}^2 \pm I_{20}\dot{\theta}^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10.2)$$

但し k_1 , k_2 及び I_1 , I_{10} , I_{20} は θ に無関係な比例常數とす。又 $\pm I_{20}\dot{\theta}^3$ の正負の符號は $\dot{\theta}$ の正負と同符號を取るものとす。

(10.2) を (10.1) に代入すれば次式が得られる。

$$(I + I_1h_1)\ddot{\theta} + I_{10}h_1\dot{\theta} \pm I_{20}h_1\dot{\theta}^2 + Wh(\theta + k_1\theta^3 + k_2\theta^5) = 0 \dots\dots\dots (10.3)$$

茲で第 3 節に於ける第 1 近似解との混同を避けるため、次の様な符號を使用する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{I_{10}h_1}{I + I_1h_1} &= 2\alpha_{10}, \quad \frac{I_{20}h_1}{I + I_1h_1} = \beta, \quad \frac{Wh}{I + I_1h_1} = \omega_{10}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10.4)$$

(10.3) に (10.4) を代入すれば次の様になる。

$$\ddot{\theta} + 2\alpha_{10}\dot{\theta} \pm \beta\dot{\theta}^2 + \omega_{10}^2 (\theta + k_1\theta^3 + k_2\theta^5) = 0 \quad \dots\dots\dots (10.5)$$

(10.5) を近似的に解くために前節の方法を用ふ。今 (10.5) の左邊を Φ_1 なる記號にて示すこととする。即ち

$$\Phi_1 \equiv \ddot{\theta} + 2\alpha_{10}\dot{\theta} \pm \beta\dot{\theta}^2 + \omega_{10}^2 (\theta + k_1\theta^3 + k_2\theta^5) \quad \dots\dots\dots (10.6)$$

又次の形の θ を假定する。

$$\theta = \theta_0 \sec \sigma_0 e^{-\alpha_0 t} \cos (\omega_0 t - \sigma_0), \quad \text{但し} \quad \sqrt{\alpha_0^2 + \omega_0^2} = \mu_0, \quad \frac{\alpha_0}{\omega_0} = \tan \sigma_0 \quad \dots\dots\dots (10.7)$$

(10.6) に (10.7) を代入して Φ_1 を計算し、此の Φ_1 を (9.17) 及び (9.18) の 2 式に代入する。

$$\text{先づ (9.17) より} \quad \int_0^\infty \Phi_1 e^{-\alpha_0 t} \cos (\omega_0 t - \sigma_0) dt = 0 \quad \dots\dots\dots (10.8)$$

なる關係式を求めれば次式を得。

$$\begin{aligned} & -\ell_0 \sec \sigma_0 \frac{\omega_0^2}{4\alpha_0} - 2\alpha_{10}\theta_0 \sec \sigma_0 \frac{\omega_0^2}{2\mu_0^2} - \beta\theta_0^2 \mu_0^2 \sec^2 \sigma_0 \cdot \frac{4\alpha_0\omega_0^3}{3\mu_0^3(9\alpha_0^2 + \omega_0^2)} \cdot \coth\left(\frac{3\alpha_0\pi}{2\omega_0}\right) \\ & + \omega_{10}^2 \theta_0 \sec \sigma_0 \frac{\omega_0^2}{4\alpha_0\mu_0^2} \left[\left(1 + \frac{4\alpha_0^2}{\mu_0^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2} k_1\theta_0^2 + \frac{1}{3} k_2\theta_0^4\right) - \frac{1}{2} k_1\theta_0^2 \cdot G_1 - \frac{1}{3} k_2\theta_0^4 G_2 \right] = 0 \\ & \dots\dots\dots (10.9) \end{aligned}$$

但し

$$G_1 = \frac{(\omega_0^2 - 23\alpha_0^2)}{4(\omega_0^2 + 4\alpha_0^2)} \quad \dots\dots\dots (10.10)$$

$$G_2 = \frac{(3\omega_0^6 - 87\alpha_0^2\omega_0^4 - 503\alpha_0^4\omega_0^2 - 413\alpha_0^6)}{9(\omega_0^2 + \alpha_0^2) \left(\omega_0^2 + \frac{9}{4}\alpha_0^2\right) (\omega_0^2 + 9\alpha_0^2)} \quad \dots\dots\dots (10.11)$$

次に (9.18) より

$$\int_0^\infty \Phi_1 e^{-\alpha_0 t} \sin \omega_0 t dt = 0 \quad \dots\dots\dots (10.12)$$

なる關係式を求めれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} & -2\alpha_{10}\theta_0\mu_0 \sec \sigma_0 \frac{\omega_0^2}{4\alpha_0\mu_0^2} - \beta\theta_0^2 \mu_0^2 \sec^2 \sigma_0 \frac{2\omega_0^3}{3\mu_0^3(9\alpha_0^2 + \omega_0^2)} \cdot \coth\left(\frac{3\alpha_0\pi}{2\omega_0}\right) \\ & + \omega_{10}^2 \ell_0 \sec \sigma_0 \frac{\omega_0^2}{2\mu_0^3} \left(1 + \frac{1}{2} k_1\theta_0^2 + \frac{1}{3} k_2\theta_0^4\right) = 0 \quad \dots\dots\dots (10.13) \end{aligned}$$

(10.13) より α_0 を計算すれば次式が得られる。

$$\alpha_0 = \frac{\mu_0^2}{\omega_{10}^2 \cdot G_3} \cdot (\alpha_{10} + \alpha_3 \beta \theta_0) \quad \dots\dots\dots (10.14)$$

但し

$$G_3 = \left(1 + \frac{1}{2} k_1\theta_0^2 + \frac{1}{3} k_2\theta_0^4\right) \quad \dots\dots\dots (10.15)$$

$$\alpha_3 = \frac{4\alpha_0(\omega_0^2 + \alpha_0^2)}{3(\omega_0^2 + 9\alpha_0^2)} \cdot \coth\left(\frac{3\alpha_0\pi}{2\omega_0}\right) \quad \dots\dots\dots (10.16)$$

(10.9) に (10.14) の関係式を代入して整理すれば、 μ_0^2 の値として次のものが得られる。

$$\mu_0^2 = \omega_{10}^2 \cdot K_1 \dots\dots\dots (10.17)$$

$$\text{但し} \quad K_1 = G_3 - \frac{1}{2} k_1 \theta_0^2 \cdot G_1 - \frac{1}{3} k_2 \theta_0^4 \cdot G_2 = 1 + \frac{1}{2} k_1 \theta_0^2 (1 - G_1) + \frac{1}{3} k_2 \theta_0^4 (1 - G_2) \dots\dots (10.18)$$

然るに $\mu_0^2 = \omega_0^2 + \alpha_0^2$ なる関係があるから、 ω_0 の値は (10.17) から出る。即ち

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{10}^2 \cdot K_1 - \alpha_0^2} \dots\dots\dots (10.19)$$

又 (10.14) に (10.17) の関係を代入して α_0 は次の形に書き換へられる。

$$\alpha_0 = (\alpha_{10} + \alpha_3 \beta \theta_0) \cdot K_2 \dots\dots\dots (10.20)$$

$$\text{但し} \quad K_2 = \frac{K_1}{G_3} = \left[1 - \frac{\left(\frac{1}{2} k_1 \theta_0^2 G_1 + \frac{1}{3} k_2 \theta_0^4 \cdot G_2 \right)}{G_3} \right] \dots\dots\dots (10.21)$$

後述の模型船に関する実験結果を解析して得た G_1, G_2, G_3, K_1, K_2 を第 26 圖に示してある。第 26 圖を見ると G_1 の値は $\theta_0 = 0^\circ \sim 35^\circ$ の範囲内に於て 0.1~0.24 の範囲内の値を示し、 G_2 は 0.03 以下である。今若し 1 に對し G_1, G_2 を無視するならば

$$K_1 \doteq 1 + \frac{1}{2} k_1 \theta_0^2 + \frac{1}{3} k_2 \theta_0^4 = G_3, \quad K_2 \doteq 1 \dots\dots\dots (10.22)$$

と置き得る。(10.19) 及び (10.20) に (10.22) を代入すれば

$$\omega_0 \doteq \sqrt{\omega_{10}^2 \left(1 + \frac{1}{2} k_1 \theta_0^2 + \frac{1}{3} k_2 \theta_0^4 \right) - \alpha_0^2} \dots\dots\dots (10.23)$$

$$\alpha_0 \doteq (\alpha_{10} + \alpha_3 \beta \theta_0) \dots\dots\dots (10.24)$$

$$\text{今若し} \quad k_1 = k_2 = \beta = 0 \dots\dots\dots (10.25)$$

なる場合を考へれば、此の時には

$$K_1 = K_2 = 1 \dots\dots\dots (10.26)$$

となり、(10.19) 及び (10.20) より

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{10}^2 - \alpha_0^2} \dots\dots\dots (10.27)$$

$$\alpha_0 = \alpha_{10} \dots\dots\dots (10.28)$$

を得。之は明らかに運動方程式の線形微分方程式なる場合に相當し、(8.19) 及び (8.18) に一致する。

今最初の振幅を θ_0 とし、其の反對舷への次の振幅を θ_1 なる記號にて示せば、 θ_1 は (10.7) より次の形なることが判る。

$$\theta_1 = \theta_0 e^{-\frac{\alpha_0}{\omega_0} \pi} \dots\dots\dots (10.29)$$

従つて 1 振れの間振幅の減少 $\Delta\theta$ は次式にて示される。

$$\Delta\theta = \theta_0 - \theta_1 = \theta_0 \left(1 - e^{-\frac{\alpha_0}{\omega_0} \pi} \right) \dots\dots\dots (10.30)$$

$$\text{茲で} \left(\frac{\alpha_0 \pi}{\omega_0} \right) \text{ の自乗以上を無視すれば } \Delta\theta \doteq \frac{\alpha_0}{\omega_0} \pi \cdot \theta_0 \dots\dots\dots (10.31)$$

(10.31) の α_0 に (10.24) を代入すれば

$$\Delta\theta = \frac{\alpha_{10}}{\omega_0} \pi \theta_0 + \frac{\alpha_3 \beta \pi}{\omega_0} \cdot \theta_0^2 \dots\dots\dots (10.32)$$

$$\text{若し} \quad \Delta\theta = a\theta_0 + b\theta_0^2 \dots\dots\dots (10.33)$$

と置くならば、(10.32) と (10.33) とを比較して θ_0 及び θ_0^2 の係数の間に夫々次の関係のあることが判る。

$$a = \frac{\pi}{\omega_0} \alpha_{10} \dots\dots\dots (10.34)$$

$$b = \frac{\pi}{\omega_0} \alpha_3 \beta \dots\dots\dots (10.35)$$

(10.16) の α_3 を展開すれば

$$\alpha_3 = \frac{4}{3} \alpha_0 \left[\frac{1 + \left(\frac{\alpha_0}{\omega_0} \right)^2}{1 + \left(\frac{3\alpha_0}{\omega_0} \right)^2} \right] \cdot \left[\frac{1}{\left(\frac{3\alpha_0 \pi}{2\omega_0} \right)} + \frac{1}{3} \left(\frac{3\alpha_0 \pi}{2\omega_0} \right) - \frac{1}{45} \left(\frac{3\alpha_0 \pi}{2\omega_0} \right)^3 + \dots \right] \dots\dots (10.36)$$

茲で $\left(\frac{3\alpha_0 \pi}{2\omega_0} \right)$ の自乗以上を 1 に對して無視すれば

$$\alpha_3 = \frac{4}{3} \alpha_0 \cdot \frac{1}{\left(\frac{3\alpha_0 \pi}{2\omega_0} \right)} = \frac{8\omega_0}{9\pi} \dots\dots\dots (10.37)$$

$$(10.35) \text{ の } \alpha_3 \text{ に (10.37) を代入すれば } b = \frac{8}{9} \beta \dots\dots\dots (10.38)$$

11. 船の自由横動揺實驗に使用せる模型船

以上の理論に依つて船の自由横動揺は廻轉運動と水平運動との聯成振動より成立することが證明せられ、且つ又、其の聯成振動の有様も大體に於て判明した。茲に於て此の水平運動の自由横動揺に及ぼす影響及び自由横動揺の中心の位置等を數値的に求めるために、次の様な模型船を使用して自由横動揺實驗を行ふこととした。

實驗に使用せる模型船は木製箱形にして、船底兩側に半径 2.54 呎の bilge circle がある。bilge keel は船體中央部船長の半分に亘り取附けられ、木製にして、幅 7 耗、厚さ 1.5 耗の寸法を有してゐる。

模型船の寸法は次の如し。

長さ	182.90 呎	KB	6.40 呎
幅	27.40 呎	BM	4.98 呎
深さ	24.10 呎	KG	10.38 呎
吃水	12.70 呎	GM	1.00 呎
排水重量	62,345 匁	I (慣性力率)	4.751 匁・呎 ² ・秒 ²

本船は箱形船であるから、傾斜角 θ の變化に對し、復原挺 GZ の變化は次式にて表はされる。

$$GZ = GM \left[1 + \frac{1}{2} \frac{BM}{GM} \cdot \tan^2 \theta \right] \sin \theta \quad \dots\dots\dots (11.1)$$

此の復原性曲線は第 15 圖に實線にて示した。

$$\text{今} \quad GZ = GM \cdot [\theta + k_1 \theta^3 + k_2 \theta^5] \quad \dots\dots\dots (11.2)$$

と置き、 θ が 20° と 35° の 2 箇所にて (11.1) と (11.2) との GZ が相等くなる様に k_1, k_2 を定むれば、次の値が得られる。

$$k_1 = 2.3068, \quad k_2 = 1.6934 \quad \dots\dots\dots (11.3)$$

(11.2) に (11.3) の k_1, k_2 を代入して曲線に畫けば第 15 圖に點線にて示すものが得られ、實線にて示された實際の復原性曲線に殆ど相一致してゐることが判る。

12. 水平運動に関する常數の決定

水平運動に関する常數 $m_1, \varphi_1, \varphi_2$ を決定するために次の様な實驗を行つた。

第 16 圖に示す様に、長さ l を有する絲 OT の上端 T を固定し、下端 O を模型船の中心線上水線下の或る 1 點に結附ける。斯くの如き絲を船の前後 2 箇所に取り附ける。次に絲に適當の張力を生ぜしむるため、小重量 w を船内に附加する。今船を少し横に押し固定點 T の周りに極小角度だけ廻轉せしめて後離せば、絲の張力のために復原力が作用し、船は夫自身の重心の周りに動搖をし乍ら、 T を中心として振動する。此の時 T 點の周りの廻轉角度を極小とすれば、船の鉛直方向の運動は無視し得る程度となり、船の運動は夫自身の重心の周りに動搖をし乍ら、 T を通る鉛直方向を中心として水平振動をしてゐるものと考へることが出来る。茲で船の水平運動に對する水の抵抗 R の作用點の附近に O 點を置き、且つ、附加重量 w の上下の位置を加減して船全體の重心點を O 點に一致せしめて置けば、此の時の船の運動は殆ど動搖を含まず、純水平振動に近きものが得られる。

船が平衡の位置に來た時の重心點、換言すれば、 O 點を原點とし、水平に y 軸を採る。任意の時刻 t に於ける船の重心の水平移動距離を y とし、此の時の T の周りの廻轉角度を ρ とすれば、水平運動に對して次の運動方程式を書くことが出来る。

$$\frac{(W+w)}{g} \ddot{y} = -[\lambda A_w(1 - \cos \rho) + w] \tan \rho - R \quad \dots\dots\dots (12.1)$$

茲で R は水の抵抗を表はす。

$$\text{今 } R \text{ を次の様に置く。} \quad R = M_1 \ddot{y} + M_{10} \dot{y} \pm M_{20} \dot{y}^2 \quad \dots\dots\dots (12.2)$$

但し $\pm$ の符號は $\dot{y}$ の正負と同符號とす。

一方に於て ρ は極小と假定してあるから

$$\tan \rho \approx \frac{y}{l}, \quad \cos \rho \approx 1 \quad \dots\dots\dots (12.3)$$

と置くことが出来る。

(12.1) に (12.2), (12.3) を代入して整理すれば次式が得られる。

$$\left[\frac{(W+w)}{g} + M_1 \right] \ddot{y} + M_{10} \dot{y} \pm M_{20} \dot{y} + \frac{w}{l} \cdot y = 0 \quad \dots\dots\dots (12.4)$$

茲で次の記號を使用する。

$$\frac{M_{10}}{\left[\frac{(W+w)}{g} + M_1 \right]} = 2\zeta_{10}, \quad \frac{M_{20}}{\left[\frac{(W+w)}{g} + M_1 \right]} = \nu, \quad \frac{\frac{w}{l}}{\left[\frac{(W+w)}{g} + M_1 \right]} = \psi_1^2 \quad \dots\dots\dots (12.5)$$

$$(12.1) \text{ に } (12.5) \text{ を代入すれば } \ddot{y} + 2\zeta_{10} \dot{y} \pm \nu \dot{y} + \psi_1^2 y = 0 \quad \dots\dots\dots (12.6)$$

(12.6) は (10.5) に於て k_1 及び k_2 を零と置いたものと全く同じ形の微分方程式であるから、

$$\text{今若し } y = y_0 \sec \tau e^{-\nu t} \cos(\psi t - \tau) \quad \dots\dots\dots (12.7)$$

と置けば第 10 節の場合と全く同様にして次の結果を得。

$$\psi = \sqrt{\psi_1^2 - \zeta^2} \quad \dots\dots\dots (12.8)$$

$$\zeta = \zeta_{10} + \zeta_3 \nu y_0 \quad \text{但し} \quad \zeta_3 = \frac{4\zeta \psi_1^2 + \zeta^2}{3(\psi_1^2 + 9\zeta^2)} \coth\left(\frac{3\zeta\pi}{2\psi}\right) = \frac{8\psi}{9\pi} \quad \dots\dots\dots (12.9)$$

實驗を行ふ場合には、先づ船の重心を横に押して、最初の振幅 y_0 を與へ、然る後之を離して振動せしめ、最初の半週期 T_ψ と第 2 の振幅 y_1 とを計測する。然るときは

$$\psi = \frac{\pi}{T_\psi} \quad \dots\dots\dots (12.10)$$

となり、 ψ は容易に判る。

$$\text{又} \quad \Delta y = y_0 - y_1, \quad 2y_m = y_0 + y_1 \quad \dots\dots\dots (12.11)$$

と置き、(12.10) を (12.7) に代入して y_1 を計算し、之を (12.11) に代入すれば

$$\Delta y = y_0 \left(1 - e^{-\frac{\zeta\pi}{\psi}}\right), \quad 2y_m = y_0 \left(1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\psi}}\right) \quad \dots\dots\dots (12.12)$$

となる。(12.12) より

$$\frac{\Delta y}{2y_m} = \frac{(1 - e^{-\frac{\zeta\pi}{\psi}})}{(1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\psi}})} = \tanh\left(\frac{\pi\zeta}{2\psi}\right) \quad \dots\dots\dots (12.13)$$

$$\left(\frac{\pi\zeta}{2\psi}\right)^2 \text{ 以上を無視すれば } \tanh\left(\frac{\pi\zeta}{2\psi}\right) \doteq \frac{\pi\zeta}{2\psi}$$

故に近似的に

$$\frac{\Delta y}{2y_m} \doteq \frac{\pi\zeta}{2\psi} \quad \dots\dots\dots (12.14)$$

と置くことが出来る。従つて

$$\zeta \doteq \frac{2\psi}{\pi} \left(\frac{\Delta y}{2y_m}\right) \quad \dots\dots\dots (12.15)$$

實驗に依り y_0, y_1 を計測し得るから、之を (12.11) に代入して $\Delta y, 2y_m$ を求め、斯くして得た $\Delta y, 2y_m$ 及び同じく前に實驗に依り得た ψ の値を (12.15) に代入して ζ を出すことが出来る。此の ψ, ζ を (12.9) に代入すれば ζ_3 を計算することが出来る。多くの y_0 に就て實驗を行ひ、以上の様な方法にて各 y_0 毎に ψ, ζ, ζ_3 を求め、 $\zeta_3 y_0$ を横軸に ζ を縦軸として實驗値を記入し、其の平均曲線を畫き、之に直線方程式 (12.9) を當嵌めれば ζ_{10}, ν を決定することが出来る。又實驗結果の ψ, ζ を (12.8) に代入すれば ψ_1^2 は次式にて求め得られる。

$$\psi_1^2 = \psi^2 + \zeta^2 \dots\dots\dots (12.16)$$

此の $\psi_1^2, \zeta_{10}, \nu$ を (12.5) に代入すれば M_1, M_{10}, M_{20} は次の様にして求め得られる。

先づ (12.5) の第 3 式より

$$\left[\frac{(W+w)}{g} + M_1 \right] = \left[\frac{w}{\psi_1^2} \right] \dots\dots\dots (12.17)$$

$$\therefore M_1 = \left[\frac{w}{\psi_1^2} \right] - \frac{(W+w)}{g} \dots\dots\dots (12.18)$$

$$(12.5) \text{ の第 1 式に (12.17) を代入して } M_{10} = 2\zeta_{10} \left[\frac{w}{\psi_1^2} \right] \dots\dots\dots (12.19)$$

$$(12.5) \text{ の第 2 式に (12.17) を代入して } M_{20} = \nu \left[\frac{w}{\psi_1^2} \right] \dots\dots\dots (12.20)$$

(12.18), (12.19), (12.20) にて計算して得た M_1, M_{10}, M_{20} を (3.9) に代入すれば、水平運動に関する常數 $m_1, \varphi_1, \varphi_2$ を決定することが出来る。

只今の實驗に於ては懸垂絲として piano wire を用ひ、 $w=24.805$ 匁 $l=62$ 匁に採つた。 O 點を水面下に吃水の 0.45 位の所に置いて實驗して見たが、船夫自身の重心の周りの動搖は認められず、船は純水平横振動をしてゐるものと見做すことが出来た。

y_0 を横軸に半週期 T_ψ を縦軸に採り、實驗値を記入して見ると、第 17 圖の如く T_ψ は殆ど一定である。今其の平均値を採れば $T_\psi=1.94$ 秒

$$(12.10) \text{ より } \psi = \frac{\pi}{T_\psi} = 1.62 \text{ 秒}^{-1}$$

となる。

又 $\zeta_3 y_0$ を横軸に ζ を縦軸に取つて實驗値を記入すれば、第 18 圖に示す如く、其の平均曲線は直線となり、次式にて表はされる。

$$\zeta = 0.03 + 0.00735 \zeta_3 y_0 \text{ 秒}^{-1}$$

上式と (12.9) とを比較して $\zeta_{10}=0.03 \text{ 秒}^{-1}$ $\nu=0.00735 \text{ 匁}^{-1}$ が得られる。

扱て、一方に於て、實際に本模型船の自由横動搖實驗結果を見ると、半週期間に於ける重心の横移動距離は高々 2 糎であり、其の間の週期 T は 1 秒内外であるから、重心の水平運動の速度は高々 3 糎毎秒以下なりと考へられる。第 18 圖を見ると ζ の實驗値は相當程度に散逸してゐるから、速度 $\zeta_0 y_0$ が 3 糎毎秒以下の低速度に於ては、 ζ は速度に無關係にして一定なりと考へて差支へない。即ち、船の自由横動搖に依り誘起せらるる水平運動に對する水の抵抗を考へる際には、速度の自乗に比例する項を考慮する必要はなく、速度の 1 乗に比例する項のみを採れば良いと云ふことが出来る。従つて今第 18 圖に於て、速度 $\zeta_0 y_0$ が 3 糎毎秒以下の範圍内に於ける實驗値の平均を取つて見ると、 ζ_{10} の値として次のものが得られる。

$$\zeta_{10} = 0.0412 \text{ 秒}^{-1}$$

$$(12.16) \text{ より } \psi_1^2 = \psi^2 + \zeta^2 \approx \psi^2 = 1.62^2 \text{ 秒}^{-2}, M = \frac{W}{g} = 0.06355 \text{ 廷} \cdot \text{糎}^{-1} \cdot \text{秒}^2$$

$$\psi_1^2 \text{ を (12.18) に代入して } M_1 = 0.06383 \text{ 廷} \cdot \text{糎}^{-1} \cdot \text{秒}^2$$

$$\zeta_{10} \psi_1^2 \text{ を (12.19) に代入して } M_{10} = 0.01258 \text{ 廷} \cdot \text{糎}^{-1} \cdot \text{秒}$$

を得。

M, M_1, M_{10} を (3.9) に代入すれば $m_1, \varphi_1, \varphi_2$ の値として次のものが得られる。

$$m_1 = \frac{M_1}{M + M_1} = 0.5011, \varphi_1 = \frac{M_{10}}{M + M_1} = 0.0988 \text{ 秒}^{-1}, \varphi_2 = \frac{M_{10}}{M_1} = 0.1971 \text{ 秒}^{-1}$$

13. 自由横動搖實驗結果

自由横動搖實驗は重心の運動を完全に自由に放置した場合と、重心の水平運動を拘束し重心の上下運動及び重心の周りの廻轉運動のみを許した場合との 2 種類に就て行つた。以下之等の實驗結果に就て述べ、更に其の實驗結果より推論して自由横動搖に及ぼす水平運動及び廻轉運動の影響に及言及することとする。但し實驗結果の數值的な解析の詳細は附録 II に示した。

(a) 完全なる自由横動搖の實驗結果

完全なる自由横動搖實驗は最初の傾斜角 θ_0 が 0° から 33° までの間の範圍内に於ける各傾斜角に就て行はれ、最初の 1 振れの間に於て其の反對舷へ傾斜した角 θ_1 と半週期 T とを通常の方法に依り計測した。

週期の實驗値を第 19 圖に示した。曲線 T は實驗値の平均曲線である。此の平均曲線の T を $\omega = \pi/T$ に代入して ω を計算すれば、 ω は第 22 圖の様な曲線にて示される。

又 θ_1 の實驗値を使用して $\Delta\theta = \theta_0 - \theta_1, 2\theta_m = \theta_0 + \theta_1$ を求め、之等を使用して $\frac{\Delta\theta}{2\theta_m}$ を計算し、其の値を第 23 圖に記入した。第 23 圖に於て $\Delta\theta/2\theta_m$ の平均曲線を畫き、其の値を $\alpha = \frac{2\omega}{\pi} \tanh^{-1} \left(\frac{\Delta\theta}{2\theta_m} \right)$ に代入し、 α を計算して畫けば第 25 圖の曲線 α となる。

(b) 重心の水平運動を拘束せる場合の自由横動揺実験結果

重心の水平運動を拘束せる場合の自由横動揺実験は次の様な方法にて行つた。第 20 圖に示す如く、模型船の重心 G を通る縦軸に沿ひ船の前後に 2 箇のピンを取附ける。一方に於て固定臺に垂直に取附けられた 2 箇の支持金具に刻まれた溝の中に前述のピンを挿入し、而して船に自由横動揺を行はしめれば、船の重心の水平運動は此の支持金具のために完全に拘束せられ、只上下運動と重心軸の周りの廻轉運動のみが許されることになる。茲に重心軸ピンの径は 0.265 糎であり、支持金具に刻まれた溝の内幅は 0.29 糎であるから、差引き 0.025 糎の clearance があり、之だけの水平運動を許してゐる譯である。

斯くの如き方法にて実験して得た半週期 T_0 を第 21 圖に記入し、其の平均曲線を求め、之を第 19 圖に點線にて表はした。又此の実験結果より求めた $\frac{\Delta\theta}{2\theta_m}$ を第 24 圖に記入し、其の平均曲線より計算して得た α_0 を第 25 圖に點線にて示した。

(c) 自由横動揺に及ぼす水平運動の影響

第 19 圖に示した T と T_0 (點線) との兩曲線の差及び第 25 圖の α と α_0 (點線) との差は何れも自由横動揺の週期及び減衰係數に及ぼす水平運動の影響を表はすものであるが、其の値は純粹の実験のみより求めたものである。然るに T と T_0 と、及び α と α_0 とは其の値が非常に接近し、従つて其の差も非常に僅少にして、實驗誤差の影響が大きく利いて來る。其處で次に T 及び α を基礎として純理論的に T_0 及び α_0 を求めて其の差を取り、之を前記實驗値と比較して、理論より求めた自由横動揺に及ぼす水平運動の影響が如何なる程度まで實驗結果に近い値を示すかを調べて見ようと思ふ。

(a) の實驗に依つて得た α , ω 、即ち第 25 圖の α 、第 22 圖の ω を基礎とし、附録 II に示した様な順序に依り、自由横動揺の水平運動が減衰係數に及ぼす影響 C_α 及び振動數に及ぼす影響 C_ω を計算し、其の値を夫々第 43 圖及び第 44 圖に示した。更に此の C_α , C_ω を (8.20), (8.21) に代入して α_0 , ω_0 を計算し、其の値を夫々第 25 圖、第 22 圖に、又 $T_0 = \frac{\pi}{\omega_0}$ を第 19 圖に示した。

第 19 圖に於て T_0 曲線の實驗値と計算値とを比較して見ると、 θ_0 の大なる所に於ては互に良く一致してゐるが、 θ_0 の小なる所に於ては實驗値の方が計算値よりも少しく小さい。併し極概略的に云へば實驗値と計算値とは其の大さの程度に於て殆ど一致してゐると云ふことが出来る。又第 25 圖を見ると α_0 曲線は其の實驗値と計算値とが殆ど相一致してゐることが判る。此の事は以上の計算に依つて得た C_α , C_ω の値が略正しい値を與へてゐることを示し、従つて又只今までの自由横動揺理論の正確なることを證明してゐることとなる。

今 $\frac{C_\alpha}{\alpha}$, $\frac{C_\omega}{\omega^2}$, $\frac{(T_0 - T)}{T}$ を計算して percentage にて表はし、之を第 45 圖に曲線にて示した。

第 45 圖を見ると $\frac{C_\alpha}{\alpha}$ は $\theta_0 = 0^\circ$ 附近にて約 7% であるが、 θ_0 の増加と共に漸次減少し、 $\theta_0 = 35^\circ$

附近にて約 4% となつてゐる。 $\frac{C_\omega}{\omega^2}$ は θ_0 の大小に無關係に大約 4% であり、 $\frac{(T_0-T)}{T}$ は非常に小さく、且つ θ_0 の大小に無關係に約 2% となつてゐる。

従つて結論として自由横動搖の減衰係數及び週期に及ぼす水平運動の影響は非常に小さく、大體に於て其の影響を無視しても差支へない程度のものであると云ふことが出来る。

(d) 自由横動搖に及ぼす廻轉運動の影響

(e) に於て述べた如く自由横動搖に及ぼす水平運動の影響が非常に小さく、其の影響を無視し得るものとすれば、(8.20), (8.21) に於て C_ω , C_ω の項を省略して近似的に

$$\alpha \doteq \alpha_0 \dots\dots\dots (13.1)$$

$$\omega \doteq \omega_0 \dots\dots\dots (13.2)$$

と置くことが出来る。

(13.1), (13.2) の關係は自由横動搖の減衰係數及び振動數が主として船の重心の周りの廻轉運動に依つて左右せられるものであることを意味してゐる。其處で次に自由横動搖の性質に及ぼす廻轉運動の影響に就て述べることにする。

(13.1), (13.2) の右邊に夫々 (10.20), (10.19) を代入すれば

$$\alpha \doteq (\alpha_{10} + \alpha_3 \beta \theta_0) \cdot K_2 \dots\dots\dots (13.3)$$

$$\omega \doteq \sqrt{\omega_{10}^2 K_1 - \alpha_0^2} \dots\dots\dots (13.4)$$

(13.3) の K_2 及び (13.4) の K_1 は何れも船型の影響を表はすものであつて、夫々 (10.21), (10.18) に示す如く、初期傾斜角 θ_0 及び船型に關する恒數 k_1 , k_2 の函數であるが、實驗結果に依れば第 26 圖に示す如く、

$$K_2 \doteq 1 \dots\dots\dots (13.5)$$

$$K_1 \doteq G_3 \dots\dots\dots (13.6)$$

と置くことが出来る。

今 (13.3) の右邊第 2 項を省略し、 K_2 の値として (13.5) を、又 α_{10} には (10.4) を代入すれば

$$\alpha \doteq \frac{I_{10} h_1}{2(I + I_1 h_1)} \dots\dots\dots (13.7)$$

次に (13.4) の右邊に於て抵抗の影響 α_0^2 を無視し、 K_1 の値として (13.6) を、又 ω_{10}^2 には (10.4) を代入して ω を計算し、此の ω を用ひて週期 T を求めれば次の様になる。

$$T^2 \doteq \pi^2 \cdot \frac{(I + I_1 h_1)}{W h \cdot G_3} \dots\dots\dots (13.8)$$

但し G_3 は (10.15) に依つて與へられ、

$$G_3 = 1 + \frac{1}{2} k_1 \theta_0^2 + \frac{1}{3} k_2 \theta_0^4 \dots\dots\dots (13.9)$$

(13.7) を見ると α は抵抗偶力 $I_{10} h_1$ に正比例し、見掛けの慣性力率 $(I + I_1 h_1)$ に逆比例し、船型の影響を直接には殆ど蒙つてゐないことが判る。

(13.8) より判断すれば、 T^2 は見掛けの慣性力率に 正比例し、船の重量 W , metacentric height h 及び G_s に逆比例してゐる。茲に G_s は船型の影響を表はすもので、(13.9) に示す如く、 k_1, k_2, θ_0 の函数である。斯くの如く週期は船型の影響を直接 G_s に依つて與へられてゐる。茲に G_s は復原性曲線の形及び θ_0 に依つて變る無次元數で次の性質がある。

- (イ) 復原性曲線が原点に於ける切線よりも上にある場合、例へば側壁船及び船側外曲船の場合には $G_s > 1$
- (ロ) 復原性曲線が原点に於ける切線よりも下にある場合、例へば tumble home の多い船、圓形横截面を有する船及び潜水艦の如く復原性曲線が正弦曲線なる場合には $G_s < 1$

14. 結 論

上述の船舶自由横動搖に関する理論及び實驗結果を要約すれば次の結論が得られる。

(1) 船舶自由横動搖は、今若し之を純然たる二次元的の問題として取扱ふならば、船の重心を通る縦軸の周りの廻轉運動と船の重心の水平横振動との聯成振動より成立する。而して廻轉運動は單一なる減衰動搖であるに對し、水平運動は減衰水平横振動と減衰水平横移動との 2 運動より成る。即ち船の重心は減衰水平振動を續け乍ら、船の初めの傾斜角に對し逆の方向に減衰水平横移動をなす譯である。而して水平横振動の減衰係數及び振動數は廻轉運動の夫に全く相等しく、且つ ε の位相の遅れを有してゐる。又實驗結果に依れば水平横移動の減衰係數は水平横振動の夫よりも一般には少しく小さい。

(2) 船が自由横動搖を行ふ場合に船體中心線上の任意の點の水平運動は、重心の運動と同様に、減衰水平横振動と減衰水平横移動との和に依つて表はされ、今船體中心線上の任意の點の内で水平振動の振幅最小なる點を C_0 とし、 C_0 を自由横動搖の見掛けの中心と名付けるならば、 C_0 は船の重心 G には一致せず、 C_0 は G より下に距離 Y_0 の所にある。今 C_0 の水平振動の全振幅を $2|\xi|_{m0}$ とし、 Y_0 及び $2|\xi|_{m0}$ の船の吃水 d に對する比を箱型模型船に就て計算して見ると、 $\frac{Y_0}{d}$ は大略 0.03 の値を示し、 $\frac{2|\xi|_{m0}}{d}$ は初期傾斜角 θ_0 と共に増加し、 $\theta_0 = 35^\circ$ で約 0.03 となる。又 $Y_0, 2|\xi|_{m0}$ の大きさを $\theta_0 = 33^\circ$ の場合に就て實驗に依つて求めて見ると、計算値に殆ど一致することが判つた。

(3) 船が自由横動搖を行ふ場合に船體中心線上の任意の點の時間と共に變化する水平運動の有様を曲線に畫いて見ると、實驗から求めた曲線は計算から求めた曲線に比較して一般に水平振動の振幅大きく且つ振動の有様は非常に不規則ではあるが、水平移動の方向並びに其の大きさは殆ど相一致し、殊に最初 1 振れの間に於て兩曲線は全く一致してゐる。

又自由横動搖の運動開始より靜止迄の間に船の重心が横方向に移動する距離 D の計算値は實驗値と完全に一致するのを認めることが出來た。又 D の吃水 d に對する比を取つて見ると、 $\frac{D}{d}$ は θ_0 と共に増加し、本模型船に於ては $\theta_0 = 35^\circ$ にて約 0.9 なる値を得た。

(4) 自由横動搖の減衰係数 α 及び振動数 ω は次式にて表はされる。

$$\alpha = \alpha_0 - C_\alpha, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 + C_\omega}$$

但し α_0, ω_0 は重心の横移動を拘束せる状態に於て自由横動搖を行ふ場合の減衰係数及び振動数である。従つて C_α 及び C_ω は夫々 α, ω に對する重心の水平運動の影響を表はしてゐる。而して箱形模型船に關する C_α 及び C_ω の計算値は實驗結果に良く一致することを認めることが出来た。又 $\frac{C_\alpha}{\alpha}, \frac{C_\omega}{\omega^2}, \frac{(T_0 - T)}{T}$ の percentage を取つて見ると、減衰係数に及ぼす水平運動の影響 $\frac{C_\alpha}{\alpha}$ は $\theta_0 = 0^\circ$ 附近にて約 7% であるが、 θ_0 の増加と共に漸次減少し、 $\theta_0 = 35^\circ$ 附近にて約 4% となつてゐる。振動数に及ぼす影響 $\frac{C_\omega}{\omega^2}$ は θ_0 の大小に無關係に大約 4% であり、従つて週期に及ぼす影響 $\frac{(T_0 - T)}{T}$ は非常に小さく、且つ θ_0 の大小に無關係に約 2% となつてゐる。斯くの如く自由横動搖に及ぼす水平運動の影響は非常に小さく、大體に於て其の影響を無視しても差支へない程度の大さである。

(5) 自由横動搖に及ぼす水平運動の影響を小なるものとして之を無視するならば、減衰係数 α 及び週期 T は夫々近似的に次式にて表はされ、廻轉運動の影響が大きく利いて来る。

$$\alpha \approx \frac{I_{10}h_1}{2(I + I_1h_1)}, \quad T^2 \approx \pi^2 \frac{(I + I_1h_1)}{Wh \cdot G_3}$$

即ち α は抵抗偶力 $I_{10}h_1$ に正比例し、見掛けの慣性力率 $(I + I_1h_1)$ に逆比例し、船型の影響を直接には蒙つてゐない。 T^2 は見掛けの慣性力率に正比例し、船の重量 W , metacentric height h 及び船型の影響 G_3 に逆比例してゐる。斯くの如く週期は船型の影響を直接 G_3 に依つて與へられてゐる。茲に G_3 は復原性曲線の形及び θ_0 に依つて變る無次元数である。

(6) 前述の如く、 $Y_0, 2|\xi|_{m0}, D, C_\alpha, C_\omega$ の計算値が實驗結果に完全に一致すると云ふ事實は、上記のものゝ計算式が何れも適切妥當なることを意味し、従つて只今迄述べて來た自由横動搖理論が正確なることを證明してゐることとなる。

終りに臨み、終始御懇篤なる御指導を賜りたる河東先生、渡邊先生及び海軍技術研究所の御好意に對し深く感謝の意を表すると共に、親しく實驗、計算に携りたる助手池田茂君を始め水槽實驗室職員各位の勞を多とし、茲に厚く御禮を申上ぐる次第である。

(九州帝國大學工學部造船學教室に於て)

附 録 I.

X の 極 小 と 極 大

今 X を t に就て微分して零と置く。

$$\frac{dX}{dt} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

(1) の X に (6.4) を代入して計算を行へば次式を得。

$$e^{-\varphi t} \cdot \sin \varepsilon + e^{-\sigma t} g \cdot \sin (\omega t - q) = 0 \dots \dots (2)$$

(2) が X に極小、極大を生ぜしむる條件である。 X に

極小、極大を生ぜしむる時刻 t 即ち (2) を満足する t は第 14 圖の如くにして圖式的に求めることが出来る。即ち横軸に t を取り、縦軸に $e^{-(\sigma-\varphi)t} \sin \varepsilon$ を下向きに正に取りて曲線に表はし、 $g \sin (\omega t - q)$ を上向きに正に取りて畫けば、其の兩曲線の交點に相當する t が (2) を満足することとなる。

(2) を満足するためには

$$\sin (\omega t - q) < 0$$

でなければならぬ。従つて t は次の關係を満足する範

図内になければならない。

$$(2n-1)\pi < (\omega t - q) < 2n\pi \dots\dots\dots(3)$$

但し $n=0, 1, 2, \dots$

即ち第 14 圖に於て $g \sin(\omega t - q)$ 曲線と $e^{(\alpha-\varphi)t} \sin \varepsilon$ 曲線との交點は $g \sin(\omega t - q)$ 曲線の谷に於て起る。

次に d^2X/dt^2 を計算し、之に (2) の關係を代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2X}{dt^2} &= -\theta_0 R_2 \sec \sigma \cdot \mu' \cdot g e^{-\alpha t} \cos(\alpha t - q + \sigma') \\ \text{但し} \quad \mu' &= \sqrt{\omega^2 + (\alpha - \varphi)^2}, \quad \tan \sigma' = \frac{(\alpha - \varphi)}{\omega} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

$$\text{故て} \quad \frac{d^2X}{dt^2} = 0 \dots\dots\dots(5)$$

と置けば、(5) を満足せしむる條件は

$$t = \infty \text{ を除けば} \quad \cos(\omega t - q + \sigma') = 0 \dots\dots\dots(6)$$

でなければならない。然るに (3) の關係あることを考へて (6) を満足するためには

$$(\omega t - q + \sigma') = (4n-1) \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots(7)$$

でなければならない。

第 14 圖の $g \sin(\omega t - q)$ 曲線の 1 つの谷の 2 交點の内、左側の交點即ち原點に近い方の交點に於ては

$$(\omega t - q + \sigma') < (4n-1) \frac{\pi}{2}$$

を満足する。此の條件を (4) に代入すれば $\frac{d^2X}{dt^2} > 0$ となり、從つて此の交點では極小を與へる。

又右側の交點即ち原點に遠い方の交點に於ては

$$(\omega t - q + \sigma') > (4n-1) \frac{\pi}{2}$$

となる。此の條件を (4) に代入すると $\frac{d^2X}{dt^2} < 0$ となり、從つて極大を與へる。

即ち谷の左側の交點は極小を與へ、右側の交點は極大を與へることが判る。

扱て第 14 圖に於て $g \sin(\omega t - q)$ 曲線の多くの谷の内、原點より數へて第 1 の谷が $e^{(\alpha-\varphi)t} \sin \varepsilon$ 曲線と交はる時に極小、極大の 1 對を生じ、第 1 及び第 2 の谷が交はる時に 2 對を生じ、交はる谷の数の増加と共に極小、極大の数も増加し、且つ其の数は互に一致してゐる。尙 1 つの谷の 2 交點の内、左側の交點は極小を與へ、右側の交點は極大を與へることは前に述べた。從つて第 14 圖を見れば判る様に C_0'' よりも上の點例

へば C_0' , C_1 , G 等の曲線は何れも原點に於て谷の右側の點に於て交つてゐる故 $t=0$ に於て極大を與へ、 C_0'' よりも下の點例へば C_1' では原點に於て谷の左側の點に於て交つてゐる故 $t=0$ に於て極小を生じ、 C_0'' では原點に於て 2 曲線が接してゐる故 $t=0$ に於て變曲點となるのである。

C_0' の $g \sin(\omega t - q)$ 曲線は其の最大振幅は $\sin \varepsilon$ にして第 14 圖に點線にて示す様な曲線となる。又 $e^{(\alpha-\varphi)t} \sin \varepsilon$ 曲線は原點に於て $\sin \varepsilon$ となりて $g \sin(\omega t - q)$ 曲線と一致し、夫れより t が増大すれば $(\alpha - \varphi)$ は普通正であるから $e^{(\alpha-\varphi)t} \sin \varepsilon$ は次第に其の値を増して曲線は下に降り、兩曲線は次第に離れて行き、再び交はることはない。從つて C_0' は $t=0$ に於てのみ極大の 1 つを有するに過ぎない。

C が C_0' よりも上に向ふに連れて Y は小となり、(6.5) より判る如く振幅 g は増大し、位相の遅れ q は減少する。從つて $g \sin(\omega t - q)$ 曲線の振幅は増大して谷は漸次下に降り、且つ次第に原點に向つて接近し、遂に原點より數へて第 1 番目の谷が $e^{(\alpha-\varphi)t} \sin \varepsilon$ 曲線に接する點に至る。此の點の Y が即ち Y_1 にして、 C は C_1 となり、 C_1 の cross curve は此の接點に相當する時刻に於て變曲點となる。 C が C_1 よりも更に上方に向ふに連れて谷は更に下に降り、第 1 の谷が $e^{(\alpha-\varphi)t} \sin \varepsilon$ 曲線と 2 點に於て相交り、極小、極大の 1 對を與へる。斯くの如く C の上昇と共に谷が、下に降り、且つ原點に接近し、第 2 の谷の接する點が C_2 であり、第 3 の谷の接する點が C_3 となり、 C が無限大の點まで上昇すると g は無限大、 q は零となる。

C が C_0' よりも下に向ふ場合は Y は大となり、 g は増大し、 $\tan q$ は負となり、 q は $\frac{\pi}{2}$ よりも大となる。從つて C が C_0' よりも下に遠ざかるに連れて谷は下に降り、且つ原點よりも遠ざかつて行く。 C が C_0' より少しく下の C_0'' に至る間は $g \sin(\omega t - q)$ 曲線は $e^{(\alpha-\varphi)t} \sin \varepsilon$ 曲線と原點に於て谷の右側の交點に於て交はり、只 1 つの極大を與へるのみであるが、 C が C_0'' に至つて始めて兩線は互に相接し、 $t=0$ に於て變曲點を與へ、 C が C_0'' を越えて更に下に行けば $g \sin(\omega t - q)$ 曲線の第 1 の谷は $e^{(\alpha-\varphi)t} \sin \varepsilon$ 曲線と 2 點に於て交はり、極小、極大の 1 對を與へる。且つ 2 交點の内、左側の交點は原點であるから、 $t=0$ に於て極小を與へるのである。 C が C_0'' より遠ざかるに連れて第 2、

第3の谷が順次 $e^{(a-\varphi)t} \sin \varepsilon$ 曲線に接して行く。而して之等の點に相當する C が $C_1', C_2', \dots$ となり、 C が C_0'' より下方無限大の點に於て遂に g は無限大、 q は π となる。

斯くの如く C_n 點に於ては $g \sin(\omega t - q)$ 曲線の原點より數へて第 n 番目の谷が $e^{(a-\varphi)t} \sin \varepsilon$ 曲線に接し、其の接點に相當する時刻 t_n に於て C_n の cross curve が變曲點を與へるのであるから、 t_n, Y_n は當然 (2), (7) の2條件を満足しなければならぬ。従つて2式 (2), (7) より2箇の未知數 t_n, Y_n を求めることが出来る。(7) を (2) に代入して少しく變形すれば

$$\operatorname{cosec} q_n = e^{\left[(4n-1)\frac{\pi}{2} + q_n - \sigma'\right] \tan \sigma'} \cdot \sec \sigma' \quad (8)$$

茲に q_n は Y_n に對する q の値である。

(7) より

$$t_n = \frac{1}{\omega} \left[(4n-1)\frac{\pi}{2} + q_n - \sigma' \right] \quad (9)$$

q_n を (6.5) に代入して

$$Y_n = R_2 \cos \varepsilon [1 - \tan \varepsilon \cdot \cot q_n] \quad (10)$$

(8) より逐次近似法に依り q_n を求め、此の q_n を (9) に代入すれば t_n が得られ、(10) に代入して Y_n が得られる。

C_0'' に對する q_n, t_n, Y_n を夫々 q_0'', t_0'', Y_0'' とし、之等の値を求めれば次の様になる。 C_0'' に於ては

$$t_0'' = 0 \quad (11)$$

であるから、(11) に (9) を代入し、且つ $n=0$ と置けば

$$q_0'' = \frac{\pi}{2} + \sigma' \quad (12)$$

(12) は明らかに (8) を満足してゐる。(12) を (10) に代入して

$$Y_0'' = R_2 \cos \varepsilon [1 + \tan \varepsilon \cdot \tan \sigma'] \quad (13)$$

を得。

附 録 II

自由横動揺實驗結果の解析

重心の運動を完全に自由に放置せる場合の自由横動揺實驗結果を基礎とし、之を解析して、自由横動揺に及ぼす水平運動の影響其他自由横動揺に關する諸性質を數值的に求めるため次の様な計算を行つた。以下に其の計算の順序に従ひ計算方法を示すこととする。

(a) K_1, K_2, G_1, G_2, G_3 の値

(10.10) の G_1 及び (10.11) の G_2 中の ω_0 及び α_0 は近似的には ω 及び α に等しいから、先づ ω_0 及び α_0 の第1近似値として第22圖の ω 及び第25圖の α を (10.10) 及び (10.11) の ω_0 及び α_0 の中に代入して G_1, G_2 を求め、更に以下の諸計算を續行し、最後に得た ω_0 及び α_0 を再び (10.10) 及び (10.11) に代入して逐次近似値を求めて行くこととする。 G_1, G_2 は斯くの如く逐次近似法に依りて求め、(10.15) の k_1, k_2 に (11.3) の値を使用すれば、 G_3 も亦容易に計算することが出来る。斯くして得た G_1, G_2, G_3 を (10.18) 及び (10.21) に代入すれば K_1, K_2 が得られる。

以上の計算にて求めて得た K_1, K_2, G_1, G_2, G_3 を第26圖に示した。第26圖を見ると、 $\theta_0 = 0^\circ \sim 35^\circ$ の範圍内に於て G_1 は 0.1~0.24 の範圍内にあり、又 G_2 は 0.03 以下である。従つて若し 1 に對し G_1, G_2 を無視すれば

$$K_1 \approx 1 + \frac{1}{2} k_1 \theta_0^2 + \frac{1}{3} k_2 \theta_0^3 = G_3$$

$$K_2 \approx 1$$

と置き得ることが判る。

(b) $I_1 h_1, i_1, \alpha_2, \omega_1^2$ の値

(10.4) の第3式と (10.19) とを結合して、自由横動揺に於ける見掛けの慣性力率を次式にて表はすことが出来る。

$$I + I_1 h_1 = \frac{WhK_1}{(\omega_0^2 + \alpha_0^2)} \quad (1)$$

上式中の ω_0, α_0 及び以下の諸計算に出て来る ω, α には先づ第1近似値として ω, α を用ひ逐次近似法を採用して計算を續行することは前述の通りである。従つて ω, α 及び (a) にて求めた K_1 を (1) に代入して見掛けの慣性力率 $(I + I_1 h_1)$ を求め、之より船體の慣性力率 I を差引いて、慣性力率の増加 $I_1 h_1$ を出す。即ち

$$I_1 h_1 = \frac{WhK_1}{(\omega_0^2 + \alpha_0^2)} - 1 \quad (2)$$

斯くして求め得た $I_1 h_1$ を第27圖に示した。第27圖を見ると $I_1 h_1$ は θ_0 と共に増加してゐるが、大體に於て $\theta_0 = 10^\circ$ 附近以下の角度に於ては其の増加量少く、殆ど θ_0 に對して一定と見做し得る。併し θ_0 が 10 附近を超して大きくなると $I_1 h_1$ の増加量が急激に大となり、 θ_0 に對して殆ど直線的に増加してゐる。(2) を (1) にて除して i_1 を得。

$$i_1 = \frac{I_1 h_1}{I + I_1 h_1} \quad (3)$$

i_1 の θ_0 に対する変化を第 28 圖に示した。第 28 圖を見ると i_1 の θ_0 に対する変化は $I_1 h_1$ の夫に準じ、 $\theta_0 = 10^\circ$ 以下では殆ど一定であるが、 $\theta_0 = 10^\circ$ を超すと殆ど直線的に其の値を増し、 $\theta_0 = 0^\circ$ で約 0.43 の値を示し、 $\theta_0 = 35^\circ$ で約 0.51 となり、平均 0.47 附近の値を示してゐる。

(8.18) より

$$\alpha_1 = \alpha_0 \dots \dots \dots (4)$$

i_1, α_1 を (3.8) に代入して

$$\alpha_2 = \frac{2\alpha_1}{i_1} \dots \dots \dots (5)$$

(8.19) と (10.19) とを照合して

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + \alpha_0^2 \dots \dots \dots (6)$$

(5), (6) より α_2, ω_1^2 を計算して夫々第 29 圖及び第 30 圖に示した。

以上の data を使用して更に次の諸計算を行ふことが出来る。

(c) E_1, E_2, E_3, F_4, E_5 の値

(4.15) の γ の値として後述の (e) に於て得たものを用ひ、前の計算に依つて得た $i_1, \alpha_1, \omega_1^2$ 及び第 12 節の實驗に依つて得た m_1, φ_1 を (4.15) に代入して E_1 を計算し、之を第 31 圖に示した。

又 $\alpha_2, \alpha, \omega, \varphi_1$ を (5.9), (5.10) に代入して E_2, E_3 を計算し、 $\alpha, \omega, \varphi_2$ を (8.6), (8.7) に代入し、更に上記 E_2 をも使用して E_4, E_5 を計算し、斯くして得た E_2, E_3, E_4, E_5 を何れも第 31 圖に示した。

第 31 圖を見ると E の値は θ_0 の増加と共に其の値を増し、 $\theta_0 = 0^\circ \sim 35^\circ$ の範囲内に於て E_1 は 1.08~1.24 の値を示すが、他は概して其の値小さく、 E_2, E_4 は 1.02~1.07 を示すに對し、 E_3 は凡ての θ_0 に對して殆ど 1 に近く、 E_5 は略々其の中間の 1~1.04 の値である。即ち E_1 を除けば、他は θ_0 に依る増加量少く、且つ其の値 1 に近く、 θ_0 の變化に對して近似的には恒数と見做して差支へない。

(d) $\varepsilon, \delta, \eta, \sigma, \sigma'$ の値

(5.10) の $E_2, 8.7$ の E_3 に (c) にて得た値を代入して、 $\varepsilon, \delta, \eta$ を計算し、之を第 32 圖に示した。

又 (5.21) 及び (7.2) より σ, σ' を計算して同じく第 32 圖中に記入した。

第 32 圖を見ると各値は θ_0 と共に増加し、 $\theta_0 = 0^\circ \sim 35^\circ$ の間に於て ε は $10^\circ \sim 30^\circ$ の變化をなし、殆ど直線的に増加してゐる。 η は其の變化緩慢にして $9^\circ \sim 17^\circ$ と

なり、平均 13° 附近の値を示し、 δ は $1^\circ \sim 13^\circ$ の變化をなす。 σ は $3^\circ \sim 8^\circ$ 、 σ' は $1^\circ \sim 6^\circ$ の變化をなし、 σ は σ' に殆ど平行し、且つ其の値が σ の方が σ' より少しく大きい。

(e) I_1, h_1, γ の値

第 7 節に於て述べた様に、又第 12 圖よりも明らかに、重心 G の水平移動曲線は實際運動と計算に依つて求めた曲線とは最初の一振れの間に於て完全に一致してゐる。今 G の水平座標 x の極大を生ずる時刻 $t=0$ の次に極小を生ずる時刻を t' とするならば、G は恰も $t=0$ より $t=t'$ までの間に半週期に相當する水平振動をなすかの如き運動をする。

今 D_0 = 時刻 $t=0$ より $t=t'$ までの間に G の水平に移動する距離

とするならば、 D_0 は實驗に依り容易に計測することが出来る。茲に用ひし實驗方法は次の如きものである。第 33 圖に示す様に同一の長さを有する木製の極輕き棒 AB を 2 箇用意し、模型船の前後に夫々 1 箇宛 AB の中點 C を同一水準に置いて固定する。C 點は pivot joint にして、AB は C 點の周りに自由に迴轉し得るものとする。又 AB の一端 A には指針あり、他端 B に於ては上下方向の溝が棒に刻まれ、第 20 圖に示す如き模型船の前後に附屬せる重心軸ピンが、此の溝の中に挿入せられ且つ自由に溝の中を上下し得る様になつてゐる。棒 AB の重心は支點 C にあり、従つて棒の重量は C 點の周りに完全に平衡を保つものとする。船が自由横動搖を行へば、重心 G は水平に移動し、夫れに連れて AB の一端 B も水平に移動する。此の時 AB は C 點の周りに迴轉する故 B 點の移動の大きさは A 點の移動に依つて表はされる。従つて今若し圖の如く A 端に目盛板を置き、A 端の指針の移動距離を測定し、模型船の前後兩端に於ける測定値を平均すれば、其の平均値は重心の水平移動の大きさを示すこととなる。斯くの如き方法に依り測定して得た D_0 を第 34 圖に示した。

又一方に於て D_0 を (5.31) より計算すれば次の様な形にて表はすことが出来る。

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= x_0 - x_1 = \theta_0 R_2 \sec \sigma \cdot L \\ \text{但し } L &= L_1 + L_2 \\ L_1 &= [1 - e^{-\varphi''}] \frac{\mu}{\varphi} \sin \varepsilon \\ L_2 &= [\cos(\varepsilon + \sigma) - e^{-\alpha'} \cos(\omega t' - \varepsilon - \sigma)] \end{aligned} \right\} (7)$$

上式の L の中の L_1 は $t=0$ より $t=t'$ までの間の水平移動の項を表はし、 L_2 は水平振動の振幅の項を表はす。

t' は附録 I 及び第 14 圖の様に於て圖式的に求めることが出来るし、又次の様に於て計算に依り求めることも出来る。

$$\text{今 } \omega t' = \pi + \varepsilon + \sigma'' \dots\dots\dots (8)$$

と置いて附録 I の (2) に代入して少しく變形すれば

$$\sigma'' = \sin^{-1} [e^{(\pi + \varepsilon + \sigma'')} \tan \sigma' \cdot \sin \varepsilon] \dots\dots\dots (9)$$

(9) より逐次近似法に依り σ'' を求め、之を (8) に代入すれば t' が得られる。斯くして得た t' を曲線に畫けば第 35 圖の様になる。第 35 圖の t' と第 19 圖の T とを比較して見ると、 t' は動揺の半週期 T に較べて其の値少しく大きく、且つ θ_0 の増加と共に其の値を増してゐることが判る。此の t' を (7) に代入すれば L_1, L_2 及び L の大きさを計算することが出来る。 L_1, L_2 及び L の θ_0 に依る變化を第 36 圖に示した。第 36 圖を見ると、水平移動の項 L_1 は θ_0 と共に急激に増加し、振幅の項 L_2 は θ_0 と共に徐々に減じ、結局其の和 L は θ_0 と共に徐々に増加してゐる。

次に (5.9) に (3.7), (3.11) を代入して

$$R_2 = \frac{i_1 k^2 E_2}{h_1} = \frac{I_1}{(M + M_1)} \cdot E_2 \dots\dots\dots (10)$$

(7), (10) より I_1 の値として次のものが得られる。

$$I_1 = \frac{D_0}{\left[\frac{\theta_0 L E_2 \sec \sigma}{M + M_1} \right]} \dots\dots\dots (11)$$

(11) の分母は主として θ_0 に依り變化し、之を計算して曲線に畫けば第 37 圖の様になる。(11) の分子 D_0 の値としては第 34 圖に示した實驗値を代入し、分母には第 37 圖の値を代入して I_1 を計算し、之を曲線に畫けば第 38 圖の様になる。

第 38 圖を見ると I_1 は θ_0 の増加と共に漸次其の値を増し、 $\theta_0 = 25^\circ$ 附近より以上に於て値が殆ど一定となつてゐる。

I_1 に於て第 27 圖の慣性力率の増加 $I_1 h_1$ を除すれば h_1 が得られる。此の h_1 を第 39 圖に示した。 h_1 は船體中心線上に於て、船の重心から自由横動揺に對する水の抵抗の水圧合力の作用點までの距離を示し、第 39 圖を見ると $\theta_0 = 0^\circ$ 附近に於ては大體一定であるが、 θ_0 の増加と共に次第に小となり、 $\theta_0 = 25^\circ$ を最小とし、之を

超すと再び増加し始める。併し極概略的に言へば $\theta_0 = 0. \sim 35^\circ$ の範圍内に於ては h_1 の變化少く、殆ど一定と見做し得る。

吃水 d に對する比を求め、 h_1/d を計算して其の値を第 40 圖に示した。第 40 圖を見ると h_1/d は平均 2.6 の値を示してゐる。

又 h_2 = 船の重心より船の水平運動に對する水の抵抗の作用線迄の垂直距離

とすれば、本模型船が、bilge keel を有する箱形船なることを考慮して、近似的に

$$h_2 \doteq 0.5 d \dots\dots\dots (12)$$

と置くことが出来る。今

$$\gamma = \frac{h_2}{h_1}$$

の分子に (12) を代入し、分母には第 39 圖の h_1 を代入して γ を計算し、曲線に畫けば第 28 圖の様になる。第 28 圖を見ると γ は θ_0 の變化に對し殆ど一定にして、約 0.2 の値を示してゐる。

(f) C_φ, C_a, C_ω の値

(8.2) の C_φ の中の φ の近似値として φ_1 を代入して C_φ を計算し、之を第 41 圖に示した。第 41 圖を見ると C_φ は θ_0 が $0^\circ \sim 35^\circ$ の範圍内に於て 0.7×10^{-4} 秒⁻¹ 以下の値を示し、從つて $\varphi_1 \times 10^{-3}$ 以下の程度の大きさであるから、之を φ_1 に對して無視し得て

$$\varphi \doteq \varphi_1 \dots\dots\dots (13)$$

と置いて差支へなきことが判る。

次に (8.6) より Q を計算し、其の値を (8.14) に代入して C_a を求め、更に Q, C_a を (8.15) に代入して C_ω を計算することが出来る。斯くして得た Q, C_a, C_ω を夫々第 42 圖、第 43 圖、第 44 圖に示した。

C_φ, C_a, C_ω の θ_0 に對する曲線を見ると、何れも第 38 圖の I_1 の曲線に非常に類似してゐるのを認めることが出来る。從つて C_φ, C_a, C_ω の値は主として I_1 に依つて左右せられてゐることが之で判る。

C_a, C_ω は船の自由横動揺の減衰係數 α 及び振動數 ω に及ぼす水平運動の影響である。

(8.20), (8.21) より夫々次式を得。

$$\alpha_0 = \alpha + C_a \dots\dots\dots (14)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_2^2 - C_\omega} \dots\dots\dots (15)$$

故に C_a, C_ω を夫々 (14), (15) に代入して α_0 及び ω_0 が得られる。斯くして得た α_0, ω_0 を再び (1) に代入して前同様の順序に依り計算を繰り返し、逐次近似値を求めて行くのである。

以上の諸曲線圖に示したものは何れも第3近似値であるが、第2近似値と第3近似値とは著しく接近し、曲線が殆ど相重なる故普通は第2近似値に止めて差支へない。殊に α_2 は第1近似値と第2近似値とが非常に近く、第1近似値のみにて充分なりと考へられる。従つて α_2 に左右せられる $E_2, E_2', e, \eta, \eta', L$ 及び I_1 等の値は何れも第1近似値にて充分近似し得られることとなる。

以上の方法にて計算して得た α_0, ω_0 を夫々第25圖、第22圖に、又 $T_0 = \pi/\omega_0$ を計算して第19圖に示した。

又 $C_0/\alpha, C_0/\omega^2, (T_0 - T)/T$ を計算して percentage に表はし、之等の値を第45圖に示した。

(g) $R_2, Y_0, Y_0', Y_0'', 2|\xi|_{m_0}, a, b$ の値

第38圖の I_1 を (10) に代入して R_2 を計算し、之を第46圖に示した。

此の R_2 を (6.14), (6.22), (7.6), (6.16), (6.27), (6.28) に代入して $Y_0, Y_0', Y_0'', 2|\xi|_{m_0}, a, b$ を計算し、何れも第46圖に示した。

第46圖の R_2, Y_0, Y_0', Y_0'' の曲線は何れも第38圖の I_1 の曲線に類似し、 R_2, Y_0, Y_0', Y_0'' の値は何れも I_1 に依つて左右せられるものであることが判る。

又特に $Y_0, 2|\xi|_{m_0}$ の吃水 d に對する比を計算し、 $Y_0/d, 2|\xi|_{m_0}/d$ を何れも第47圖に示した。

第47圖を見ると、 Y_0/d は $\theta_0 = 0^\circ$ にて約 0.06 であるが θ_0 の増加と共に漸次其の値が大となり、 $\theta_0 = 25^\circ$ 附近より殆ど一定となり、0.09 の値を示し、平均約 0.08 となつてゐる。又 $2|\xi|_{m_0}/d$ は θ_0 と共に増加し、 $\theta_0 = 35^\circ$ にて約 0.03 の値を示してゐる。

(h) D の値

R_2 を (5.32) に代入して D を計算し、其の値を第48圖に曲線として畫いた。

D は自由横動搖の運動開始より静止に至る迄の間に船の重心の横に移動する距離を表はし、 D の大きさは實驗に依り容易に計測し得られるものにして、其の實驗値を同

じく第48圖中に記入した。

其の實驗方法は第13圖に示す如く、模型船の中央部に上下の方向に目盛を附せる橋を樹て、縦横に目盛を施せる板の前面に於て自由横動搖を行はしめ、其の運動開始時及び静止時に於ける橋の位置を測定し、之より重心の横移動距離 D を換算して求めたのである。第48圖を見ると計算に依り求めた D の曲線は實驗値の殆んど平均曲線となり、計算と實驗とが非常に良く合致し、只今迄述べ來つた理論の正確なるを證明してゐる。

次に D の吃水 d に對する比 D/d を計算し、之を第47圖に示した。第47圖を見ると D/d は θ_0 と共に増加し、 $\theta_0 = 35^\circ$ にて約 0.9 となつてゐる。

(i) $\frac{R_2}{R_1}$ の値

(5.9) を (5.7) にて除し、 R_2/R_1 の値として次のものが得られる。

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{m_1 i_1 \gamma (-\varphi + \varphi_2) \cdot \varphi \cdot E_2}{(\varphi^2 - 2\alpha_1 \varphi + \omega_1^2)} \dots \dots \dots (16)$$

(16) にて計算して得た R_2/R_1 の値を第49圖に示した。第49圖を見ると R_2/R_1 は 0.6×10^{-4} 以下の小さい數であることが判る。

(j) $b_2, c_2, b_2 c_2, (d_3^2 + c_3^2)$ の値

(3.20) より b_1, c_1, d_1 を求め、之等を (3.21) に代入して b_2, c_2 を計算し、更に $b_2 \cdot c_2$ を求め、 $b_2, c_2, b_2 c_2$ の値を曲線に畫けば第50圖の様になる。此の b_2, c_2 を再び (3.21) に代入して c_3, d_3 を求め、更に $(d_3^2 + c_3^2)$ を計算して第50圖中に曲線として畫いて置いた。

(k) $\alpha_2 E_1, \frac{\varphi_1 \gamma (1 - m_1)}{(1 - m_1 \gamma)}$ の値

$\alpha_2 E_1$ 及び $\frac{\varphi_1 \gamma (1 - m_1)}{(1 - m_1 \gamma)}$ の値を計算して第51圖に示した。

第51圖を見ると $\frac{\varphi_1 \gamma (1 - m_1)}{(1 - m_1 \gamma)}$ の値は $\alpha_2 E_1 \times 10^{-2}$ 程度の大きなることが判る。

第 3 圖

第 4 圖

第 5 圖

第 6 圖

第 7 圖

第 8 回

第 9 圖

第 10 圖

第 11 圖

第 12 圖

第 13 圖

第 14 圖

第 15 圖

第 16 圖

第 17 圖

第 18 圖

第 19 圖

第 20 圖

第 21 圖

第 22 圖

第 23 圖

第 24 圖

第 25 圖

第 26 圖

第 27 圖

第 28 圖

第 29 圖

第 30 圖

第 31 圖

第 32 圖

第 35 圖

第 36 圖

第 37 圖

第 38 圖

第 39 圖

第 40 圖

第 41 圖

第 42 圖

第 43 圖

第 44 圖

第 45 圖

第 46 圖

第 47 圖

第 48 圖

第 49 圖

第 50 圖

第 51 圖

討 論

○座長(元良信太郎君) 只今の御講演に就て御意見又は御質問があれば、御發言願ひます。

○加藤 弘君 船が横揺をする時に他の諸種の運動が誘起され、夫等が二次的に横揺に影響を及ぼす事は周知の事實でありますが、この論文では特に水平運動の影響を考慮して研究され、之がどの程度に横揺に影響を及ぼすかを明かにされたことは誠に結構なことに存じます。然しこの論文では自由横揺を全く二次的に取扱ひ、従つて縦揺や yawing の影響を無視して居る譯でありまして、この實驗に用ひた箱型船の様なものでは勿論差支ありませんが、一般の船では縦揺や yawing を生じ、その影響は水平運動の影響と同程度と思はれ、或場合には之を減殺する様な影響を與へるのではないかと思はれます。例へば末廣先生が嘗て行はれた模型實驗に於きましては、重心の水平運動は殆ど認められませんでした、yawing は明かに現れて居ました。それ故一般の船に對しては水平運動以外の他の運動の影響も同時に考慮せねばならないと思はれますから、進んで其場合を御研究になられん事を希望致します。次に横揺を二次的に考へるとしますと横揺に依つて誘起される運動は水平及鉛垂の2種がありますが、22 頁を見ますと、鉛直運動は甚だ小さいから之を無視して水平運動だけを考慮して居ますが、佛人 Duhil de Benazé 及 Risbec が行つた排水量約 100t の Elorn 號の實驗に於ては、動揺中心點の水平移動は横揺角が 9° 位の時に約 $\frac{1}{2}$ 吋で、鉛直運動と略同程度に出て居ます。又末廣先生の模型試験では、横揺角 20° 位の時に重心の水平移動は殆ど認められず、唯鉛直移動が少し認められたと言ひますから、一般の船では鉛直運動の影響は水平運動と同程度又は夫れ以上であつて従つて鉛直運動を無視することは出来ないものと思はれます。

22 頁の (2.5) 及 (2.6) の方程式を解くのに (3.1) なる假定が適用されて居ますが、此の中の $h_0 = l\theta$ は復原力曲線が直線の範囲内にある事を示すもので、従つて θ は小さいことを意味します。實驗に用ひた箱型船に於ては第 15 圖によりますと、横揺角が 10° 位迄は差支へないと思はれます。然るに 31 頁の (5.32) 式で横移動の距離 D を計算する時も、32 頁の (6.4) 式で X の値を計算する時も、振幅が $30^\circ \sim 35^\circ$ の大角度を用ひて居ますから、之では始めの假定と一致せぬ譯であります、何か correction を行はれたので御座いませうか。此點に就き御伺ひ致します。

34 頁 3 行目の自由横動揺の見掛けの中心 C_0 の重心 G からの距離 Y_0 は略 (6.18) 式により與へられますから、 Y_0 は正であつて、従つて C_0 は常に G の下に来る筈であります、Elorn 號の 3 種の狀態に於ける實驗では凡て C_0 が G より上にありました。故に C_0 が G の上に來るか下に來るかは、 G の位置や、船の形によつて決ることであつて、船の水平以外の諸運動の影響をも併せ考へれば、理論的にも C_0 が G の上に來たり下に來たりするのではあるまいかと思はれます。

○座長(元良信太郎君) 他に誰方が御質問御座いせんか。御質問がなければ著者に御禮申し上げます。船の横揺れの問題は昔から色々な人によつて取扱はれてあり、之に関する論文も無數にありま

すが、上野君は根本的理論的に扱はれ、更に横移動を考へられ、又箱型船に就て實驗を行はれて此の理論の正確な事を確められ誠に有益な御研究と存じます。然し未だ簡単な船の研究でありまして、實際の船とは趣を異にした點も多い様であります。更に實際の船に近いものを研究し、發表されん事を御願ひ致します。茲に皆様と拍手を以て同君に御禮申上げたいと思ひます。(拍手)

(加藤弘君の討論に對し著者は答辯として下記の文書を寄せられた。)

著 者 追 記

拙文に對して加藤弘氏より非常に御鄭重な討論を載き、種々御教示を賜り、有難く、厚く御禮を申し上げます。先日加藤氏より討論の原稿を載きましたので、御質問の意義を良く吟味の上、次に著者の愚見を述べて御答へ致し度いと存じます。

一般に船が自由横搖を行ふ場合には同時に他の諸運動が誘起せられ、夫等が自由横搖に對して二次的或は三次的な影響を與へるものであります。本論文は冒頭に於て述べた様に自由横搖を純然たる二次元的の問題として取扱い、從つて縦搖及び艀搖の影響を考慮外に置き、更に船の鉛直運動をも無視し、水平運動のみを考慮して問題を解いたのであります。又模型實驗も此の二次元的に解いた理論の正確さを知るために特に筒形の模型船に就て實驗を行つたのであります。從つて水平運動以外の他の諸運動の自由横搖に及ぼす影響に就ては今後の研究に俟たねばなりません、今假りに其の影響の程度に就て考へて見るならば次の様なものではないかと思はれます。

先づ自由横搖に及ぼす艀搖の影響に就て言へば、艀搖は元來船の前後方向の船形及び重量配置の不對稱に起因するものでありますから、其の自由横搖に及ぼす影響は水平運動の影響に比して更に二次的のものではないかと思はれます。

又末廣教授の模型實驗では重心の水平運動は殆ど認められず、唯僅かに上下運動が認められたとの事ですが、當教室に於て曩に渡邊教授の行はれた巡洋艦模型に關する實驗では、重心は水平方向に可なりの運動をするが、上下方向には殆ど動いてゐないのであります。

水平運動にしても上下運動にしても横搖に對しては二次的又は三次的のものでありまして、模型が小さいと可なり精密な計測方法を用ひねば正確な値を得難いのであります。殊に水槽内に於ける模型實驗に於きましては、水槽側壁及び槽底の存在のために模型船周圍の水圧に變化を生じ、從つて水は常に流動して暫時も靜止致しません。此の爲めに模型船も亦安定せず、絶えず動いて居ります。其處で模型船に外部から偶力を加へて初期傾斜角を與へ、次に此の偶力を取除いて自由横搖を行はしめる場合に、初期傾斜角の狀態に於て模型船及び周圍の水が完全に靜止してゐなければ自由横搖の初期條件が異つて來ることゝなります。初期條件が異れば實驗結果に差異の出るのは當然でありまして、若し初めに模型船或は水が何れかの方向に動いてゐるか、或は又外から加へた偶力を取除く瞬間に於て模型船に對して或る方向の初速度を與へる様な原因が若し有るとすれば、重心の水平運動及び上下運動の様な delicate な二次的な運動に對して非常な影響を與へ、其の計測結果に大なる誤差を生ぜし

むることゝなり、豫期以上の上下運動を起したり、或は水平移動の方向が一時的に逆になつたりすることが有り得る譯であります。殊に初期傾斜角を船に與へるのに以前に良く行はれた様な方法例へば舷側に圧力を加へるとか、或は舷側を吊上げる様な方法を取る場合には、船に對して偶力と同時に鉛直力をも作用せしむることゝなり、従つて此の圧力又は揚力を取除いた場合には偶力と共に鉛直力も無くなり、船は自由横揺を行ふと同時に上下運動も行ふのであります。即ち、此の鉛直力は上下運動を生ぜしむる有力な原因となるものであります。末廣教授の實驗と渡邊教授の實驗とが全く逆の結果を與へて居りますのも、此の様な delicate な二次的な運動に對して以上述べ來つた様な初期條件の相異が原因してゐるのではないかと思はれます。

著者の概算に従へば、船の上下運動の振幅 y_0 は $2|\xi|_{m_0} \times \theta_0 \times 10^{-1}$ の程度の大きさであり、又自由横揺の振動数の自乗 ω^2 に及ぼす上下運動の影響 $C_{\omega'}$ は $C_{\omega} \times \frac{y'}{h_2} \times \theta_0^2 \sin^2 \epsilon$ の程度の大きさを示して居ります。茲に $2|\xi|_{m_0}$ は水平運動の全振幅であり、 C_{ω} は ω^2 に及ぼす水平運動の影響を表はし、又 y' 及び h_2 は夫々第 1 圖に示す様に重心 G の水面からの距離及び水平運動に對する水の抵抗 R の重心 G からの距離を示して居ります。従つて y_0 及び $C_{\omega'}$ は何れも夫々 $2|\xi|_{m_0}$ 及び C_{ω} に對して二次的の値を示すものと言ふことが出來ます。

以上を綜合すれば、純粹の偶力のみを與へて自由横揺を行へば上下運動は殆ど認められず、水平運動のみが残り、又振動数に及ぼす影響も上下運動に依るものは殆ど考慮の必要のない程小なるもので、唯水平運動の影響だけを考へれば良いのではあるまいかと思はれます。

次に D 及び X の計算に對する修正に就て述べます。(2.5), (2.6) の微分方程式を解くに際し、先づ廻轉運動と水平運動との概括的な聯成振動の有様を知るために、此の 2 式を (3.12), (3.13) の様な線形微分方程式に簡單化して其の exact solution を求めたのであります。従つて復原性曲線の直線でない場合、例へば一般に復原挺 GZ が $GZ = h(\theta + k_1\theta^3 + k_2\theta^5)$ にて表はされる様な場合には (3.12) の $\omega_1^2 \cdot \theta$ の代りに $\omega_1^2 \cdot (\theta + k_1\theta^3 + k_2\theta^5)$ が這入り、微分方程式は線形とはならず、其の exact solution を得ること困難となります。従つて θ_0 の大なる場合に線形微分方程式を解いて得た (5.32), (6.4) の 2 式を用ひて D 及び X を計算する際には何等かの修正を施さねばならないのであります。此の時には微分方程式の近似解法として第 9 節の方法を用ひたのでありますが、其の計算の結果、第二次的の修正を無視すれば、第一次的の修正として ω_1^2 の代りに $\omega_1^2 \cdot K_1$ を用ふれば充分近似し得られることが判つたのであります。但し K_1 は (10.18) にて示された無次元数でありまして、茲に再録すれば次の様になります。

$$K_1 = 1 + \frac{1}{2}k_1\theta_0^2 \cdot \left[1 - G_1\right] + \frac{1}{3}k_2\theta_0^4 \cdot \left[1 - G_2\right]$$

$$\doteq 1 + \frac{1}{2}k_1\theta_0^2 + \frac{1}{3}k_2\theta_0^4 \quad \equiv G_3$$

(5.32), (6.4) 式にて夫々 D , X を求める際には附録 II の順序に依り計算を行つたのでありますが、 K_1 に依る修正を附録 II, (b) の (1) 式に於て行つてゐるのであります。

次に自由横揺の見掛けの中心 C_0 の重心 G に對する相對的上下の位置に就て述べれば、 C_0 は G よりも下に来ることもあれば又上に来ることもあり得るのであります。自由横揺の慣性力率の増加 $I_1 h_1$ は正なること明らかでありますから、若し h_1 負ならば I_1 も亦負であらねばなりません。第 1 圖に示す様に、 h_1 は船體中心線上に於て重心 G から船の運動に對する水の抵抗の水圧の合力 F の作用點 P までの距離を示し、且つ h_1 は G より下向きに測つて正に取つて居ります。従つて h_1 及び I_1 の負なる場合は P が G よりも上にあることを意味し、且つ F の方向が第 1 圖とは逆になります。今 I_1 の負の値を (6.17) に代入すれば Y_0 が負となりますから、此の場合には C_0 が G よりも上に来ることになります。附録 II, (e) の (10) 式に負の I_1 を代入すれば R_2 負となり、負の R_2 を (6.4) に代入すれば X も亦負となります。 X が負と云ふことは船が初期傾斜角の側に向つて水平移動をすることになります。即ち、 F の作用點 P が重心 G よりも下にあれば C_0 も G より下であり、且つ船は初期傾斜角とは逆の方向に向つて水平移動をなし、又 P が G よりも上にあれば C_0 も亦 G より上にあり、且つ船は初期傾斜角の側に向つて水平移動をすることになります。而して P が G より上にあるか、或は下に来るか、換言すれば、 C_0 が G の上に来るか、或は下に来るか云ふことは船形及び重心の位置に依つて定まるべきものであります。