(昭和 23 年 4 月 11 日造船協會春期講演會に於て講演)

衝撃軸荷重を受ける柱の過渡振動に就て

正員 工學士 熊 井 豊 二*

Abstract

On the Transient Vibration of the Strut due to Axial Impact Load

By Toyoji Kumai, *Kogakushi, Member*

The investigations on the transient phenomena of vibration of a strut due to axial impact load are scarcely known so far as the author is aware, and only the case of the strut under constant impact load is mathematically investigated¹⁾.

In the previous papers^{2), 3)} the author explained influence of the initial condition of vibrating strut upon the transient vibration and the case of buckling of the straight bar due to axial impact load.

The present writer deals with, as the third report, the case of transient vibration of the strut having initial deformation same as fundamental mode of vibration under axial impact load.

In the results of the present investigation, the author has been proposed a convenient solid curve to find the amplitude of the transient vibration in connection with the given magnitude of impact load and the duration of impact.

The model experiments which already explained in the previous first paper were carried out and compared with results of theoretical calculations.

緒 言

構造物の要素としての柱に軸方向の衝撃力が作用する場合の柱の過渡振動を調べるに當り先ず最初に、與えられる衝撃力の形即ち衝撃力の時間函數を假定しなければならない。筆者は過去の多くの實驗的研究者によつて實驗的に求められた衝撃力の代表的な形として、時間に比例して増減する如き衝撃力⁴⁾を選び、斯様な衝撃力が柱の軸方向に作用する場合に生ずる柱の過渡振動に就て研究した。本論はその柱に初期撓みがある場合の過渡振動に就ての理論計算を述べ數値計算例及び實驗例を示せるものである。

1. 理 論 計 算

柱の軸方向に x , これに直角の方向に y にをとり、柱の斷面積を A , 單位長さの質量を ρA , 曲げ剛性を EI 材料の固體粘性による減衰係數を ξ , 空氣の粘性による減衰係數を ζ とし、初期撓みを y_0 とすれば、軸方向に壓縮力 P を受けるときの柱の振動方程式は次の如く表わされる⁵⁾。但し t は時間を表わす。又壓縮力 P は一般に時間 t の函數である。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \xi I \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} + \zeta \frac{\partial y}{\partial t} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + P \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} \right) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$(1) \text{ 式の解は, } y = F(x, t) \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{である。本論では, } y = f(x) \cdot \varphi(t) \dots \dots \dots (3)$$

* 九州大學助教授 (九大彈性工學研究所)

1) Koning und Taub: Lufs. Bd. 10 Nr. 2 55-64 (1933).

2) T. Kumai: Jour. aero. Sci. Jap. rep. No. 1, No. 107 Vol. 11 (1944).

3) do. rep. No. 2 (1945).

4) 例えば, S. Watanabe: Resistance of Impact on Water Surface. part I Sci. Pap. I.P.C.R. No. 226 Vol. 12 (1930).

5) 前掲文獻 1)。

の如く考える。

柱の下端を原點ととり長さを l とすれば、柱の兩端が支持されている場合には次の條件が成立しなければならない。

$$x=0, l \text{ に於て } y=0, \frac{\partial y}{\partial x}=0 \dots\dots\dots (4)$$

この條件を満たす $f(x)$ の一般解は次式で與えられる。

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \delta_m \sin m\lambda x \dots\dots\dots (5)$$

$$\left(\text{但し } \lambda = \frac{\pi}{l}, m=1, 2, 3, \dots \right)$$

茲に δ_m は柱の撓みに關する量である。初期撓み y_0 は一般に次式の如く假定する事が出来る。

$$y_0 = \sum_1^{\infty} \delta_n \sin n\lambda x \dots\dots\dots (6)$$

$$(n=1, 2, 3, \dots\dots\dots)$$

本論に於ては、方程式の解の時間函数 $\varphi(t)$ に就て詳細に調べたい關係上 $f(x)$ 及び y_0 の形を先ず次の如く假定する。

$$f(x) = \delta \sin m\lambda x \dots\dots\dots (7)$$

$$y_0 = \delta_0 \sin m\lambda x \dots\dots\dots (8)$$

以下次の如き記號を用うる。

J : 衝撃作用時間,

$z = \frac{t}{\tau}$: 衝撃力の最大値の起る時刻を原點とする時間軸,

$p = \lambda^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$: 柱の固有基本振動數,

$T = 2\pi/p$: 柱の固有基本振動週期,

$\alpha = \tau \left| \frac{T}{2} \right|$: 衝撃作用時間と柱の固有半週期との比,

$P_E = \lambda^2 EI$: Euler 荷重,

$P = P_0 \phi(z)$: P_0 は衝撃力の最大値 $\phi(z)$ は衝撃力の時間函数,

$a = P_0/P_E$: 衝撃力の最大値と Euler 荷重との比,

$2\mu = \frac{p(m^4 \lambda^4 \xi I + \zeta)}{m \rho A}$: 減衰係數

$\epsilon = \frac{\delta_0}{\delta}$: 柱の初期撓みの割合。

上記の記號を用い、(7)、(8) を (1) に代入して整理すれば次式が得られる。

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + 2m\mu\alpha\pi \frac{d\varphi}{dz} + m^2\alpha^2\pi^2 \{m^2 - a\phi(z)\} \varphi = \epsilon am^2\alpha^2\pi^2 \phi(z) \dots\dots\dots (9)$$

(9) 式を與えられる衝撃力の時間函数 $\phi(z)$ の形に應じて解けば柱の過渡振動の状態を知る事が出来る。

本論に於ては初期撓みを有する柱の過渡振動を調べる關係上、簡單のために (9) 式の左邊の第 1 項即ち減衰の項を省略して考える。又柱に作用する衝撃力の時間函数 $\phi(z)$ は時間の一次式にて表わされるものと假定する。即ち第 1 圖に示す如く衝撃は $z = -k$, ($k > 1$) に於て始まり時間に比例して増加し $z = 0$ に於て最大値 a に達し以後は時間に比例して減少し $z = 1-k$ に於て零となる。柱の振動の型は基本型に就てのみ議論を進める。上記の如き衝撃力が作用する場合の方程式は (9) 式より次の式が得られる。

第 1 圖

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \alpha^2\pi^2 \left\{ 1 - a \left(1 + \frac{z}{k} \right) \right\} \varphi &= \varepsilon a \alpha^2 \pi^2 \left(1 + \frac{z}{k} \right) & (-k \leq z \leq 0) \\ \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \alpha^2\pi^2 \left\{ 1 - a \left(1 - \frac{z}{1-k} \right) \right\} \varphi &= \varepsilon a \alpha^2 \pi^2 \left(1 - \frac{z}{1-k} \right) & (0 \leq z \leq (1-k)) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

(10) 式を簡単にするために次の如き記號を用うる。

$$\left. \begin{aligned} 1 - a \left(1 + \frac{z}{k} \right) &\equiv w_1 & \frac{2k\alpha\pi}{2a} &\equiv c_1 & (-k \leq z \leq 0) \\ 1 - a \left(1 - \frac{z}{1-k} \right) &\equiv w_2 & \frac{2(1-k)\alpha\pi}{3a} &\equiv c_2 & (0 \leq z \leq (1-k)) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

(11) の記號を用いて (10) 式を書き替へれば (10) の二つの式は夫々次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dw_1^2} + \left(\frac{3}{2} c_1 \right)^2 w_1 \varphi &= \varepsilon \left(\frac{3}{2} c_1 \right)^2 (1 - w_1) \\ \frac{d^2\varphi}{dw_2^2} + \left(\frac{3}{2} c_2 \right)^2 w_2 \varphi &= \varepsilon \left(\frac{3}{2} c_2 \right)^2 (1 - w_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

(12) 式の右邊を零とおいた式の解は既に文獻 2), 3) に於て計算した初期撓みを有する場合には右邊の ε は零にならない。従つて右邊は夫々 w_2 及び w_1 の函數である。この場合の解は常數變化の方法によつて求められる。(12) の解は夫々次の如き形となる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= A_1 w_1^{\frac{1}{3}} J_{\frac{1}{3}}(c_1 w_1^{\frac{3}{2}}) + B_1 w_1^{\frac{1}{3}} J_{-\frac{1}{3}}(c_1 w_1^{\frac{3}{2}}) \\ \varphi &= A_2 w_2^{\frac{1}{3}} J_{\frac{1}{3}}(c_2 w_2^{\frac{3}{2}}) + B_2 w_2^{\frac{1}{3}} J_{-\frac{1}{3}}(c_2 w_2^{\frac{3}{2}}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

然に

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\pi \varepsilon c_1^2}{2} \int w_1^{\frac{1}{2}} (1 - w_1) J_{-\frac{1}{3}}(c_1 w_1^{\frac{3}{2}}) dw_1 + A_1 \\ B_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\pi \varepsilon c_1^2}{2} \int w_1^{\frac{1}{2}} (1 - w_1) J_{\frac{1}{3}}(c_1 w_1^{\frac{3}{2}}) dw_1 + B_1 \\ A_2 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\pi \varepsilon c_2^2}{2} \int w_2^{\frac{1}{2}} (1 - w_2) J_{-\frac{1}{3}}(c_2 w_2^{\frac{3}{2}}) dw_2 + A_2 \\ B_2 &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\pi \varepsilon c_2^2}{2} \int w_2^{\frac{1}{2}} (1 - w_2) J_{\frac{1}{3}}(c_2 w_2^{\frac{3}{2}}) dw_2 + B_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

A_1, B_1, A_2, B_2 は積分常數であつて衝撃開始のときの初期條件及び衝撃力の最大値の起る時刻に於ける柱の變位及び速度の連續の條件によつて定まるものである。以下これらの條件に従つて計算を進める。

柱は初期撓みを有するのであるが靜止しているために衝撃開始時に於ける變位及び速度は零である。即ち、

$$w_1 = 1 \quad \text{に於て} \quad \varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dw_1} = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

(13) 式の二つの式より速度を求めれば夫々次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dw_1} &= \frac{3}{2} c_1 w_1 \left\{ A_1 J_{-\frac{2}{3}}(c_1 w_1^{\frac{3}{2}}) - B_1 J_{\frac{2}{3}}(c_1 w_1^{\frac{3}{2}}) \right\} \\ \frac{d\varphi}{dw_2} &= \frac{2}{3} c_2 w_2 \left\{ A_2 J_{-\frac{2}{3}}(c_2 w_2^{\frac{3}{2}}) - B_2 J_{\frac{2}{3}}(c_2 w_2^{\frac{3}{2}}) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

(13) 及び (16) 式の第 1 式より條件式 (15) を計算すれば次の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_1 J_{\frac{1}{3}}(c_1) + \dot{B}_1 J_{-\frac{1}{3}}(c_1) &= 0 \\ \dot{A}_1 J_{-\frac{2}{3}}(c_1) - \dot{B}_1 J_{\frac{2}{3}}(c_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

然に $\dot{A}_1, \dot{B}_1$ は夫々 $w = 1$ に於ける A_1, B_1 の値である。(17) が成立するためには、

$$\dot{A} = 0, \quad \dot{B} = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

(14) 式における $A_1 B_1$ を示す式の第 1 項の積分の下限は $w = 1$ である。従つて $\dot{A}\dot{B}$ は夫々 $A_1 B_1$ に等しい。従つて (18) 式より

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

次に A_2, B_2 は衝撃力が最大値に達する時の条件によつて定められる。このときの w_1 及び w_2 の値は $1-a$ となる。 $w_1 = w_2 = 1-a$ における A_1, B_1 を夫々 $\bar{A}_1, \bar{B}_1$, A_2, B_2 を夫々 $\bar{A}_2, \bar{B}_2$ にて表わせば,

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\pi \varepsilon c_1^2}{2} \int_1^{1-a} w_1^{\frac{1}{2}} (1-w_1) J_{-\frac{1}{3}}(c_1 w_1^{\frac{2}{3}}) dw_1 \\ \bar{B}_1 &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\pi \varepsilon c_1^2}{2} \int_1^{1-a} w_1^{\frac{1}{2}} (1-w_1) J_{\frac{1}{3}}(c_1 w_1^{\frac{2}{3}}) dw_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

今 $(c_1 w_1^{\frac{2}{3}})_{w_1=1-a} \equiv z_1$ において ϕ, ψ を次の如く表わす。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \bar{A}_1 J_{\frac{1}{3}}(z_1) + \bar{B}_1 J_{-\frac{1}{3}}(z_1) \\ \psi &= \bar{A}_1 J_{-\frac{2}{3}}(z_1) + \bar{B}_1 J_{\frac{2}{3}}(z_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

又 $(c_2 w_2^{\frac{2}{3}})_{w_2=1-a} \equiv z_2$ において衝撃力の最大値に於ける變位及び速度が何れも連続である條件を書けば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_2 J_{\frac{1}{3}}(z_2) + \bar{B}_2 J_{-\frac{1}{3}}(z_2) &= \phi \\ \bar{A}_2 J_{-\frac{2}{3}}(z_2) - \bar{B}_2 J_{\frac{2}{3}}(z_2) &= -\psi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

(19) の二つの式から $\bar{A}_2, \bar{B}_2$ 或は A_2, B_2 が夫々次の二式によつて計算される。

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_2 &= A_2 = \frac{z_2 \pi}{\sqrt{3}} \left\{ \phi J_{\frac{2}{3}}(z_2) - \psi J_{-\frac{1}{3}}(z_2) \right\} \\ \bar{B}_2 &= B_2 = \frac{z_2 \pi}{\sqrt{3}} \left\{ \phi J_{-\frac{2}{3}}(z_2) + \psi J_{\frac{1}{3}}(z_2) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

以上の如くし A_2, B_2 が求められる。従つて (13), (14) 式等によつて衝撃中の柱の振幅を計算する事が出来る。

衝撃終了後は、柱は調和振動をなすのであるから衝撃終了時の位相によつて柱の振動状態を計算する事が出来る。

以上の計算は $a < 1$ なる場合即ち衝撃力の最大値が Euler 荷重よりも小なる場合に就ての計算式であるが、 $a > 1$ なる場合には以上の諸式における Bessel 函数が Modified Bessel 函数に置きかえられる。即ち $J_{\frac{1}{3}}(c_1)$, $J_{-\frac{1}{3}}(c_1)$, $J_{\frac{2}{3}}(c_1)$, $J_{-\frac{2}{3}}(c_1)$ 等が夫々 $I_{\frac{1}{3}}(c_1)$, $-I_{-\frac{1}{3}}(c_1)$, $I_{\frac{2}{3}}(c_1)$, $-I_{-\frac{2}{3}}(c_1)$ 等に置きかえられる。本論に於てはその計算式を省略する。

§ 2. 数 値 計 算

§ 1 に於ける諸式の中の ε はこれを単位にとる事が出来る。 $\varepsilon = 1$ において計算すれば ϕ の値は初期撓みを單位とする値にて表わされる。衝撃作用中或は終了後の ϕ の時間的變化及び過渡振動の振幅を知る事が實際問題として必要である。これらの値に變化を與える因子は衝撃力の大きさ a と衝撃作用時間 α との二つである。そこで數値計算例として ε を単位にとり a に 0.5 乃至 0.8, α に 0.5 乃至 3 を採用して計算を實施した。尚衝撃力の形は簡單のために二等邊三角形とした。即ち $k=0.5$ とした。(14) 式の積分は式の上で簡單にする事が困難であるため本論に於ては梯形法による數値積分及び planimeter による圖式積分の兩者を用いて結果を求めた。

計算の結果を圖示すれば第 2 圖 a) 乃至 e) に示す如くなる。圖は何れも横軸に時間 α , 縦軸には初期撓みを單位とする柱の變位 ϕ を表わしてある。又同一時間軸に對する衝撃力を示してある。従つてこれらの圖によつて衝撃作用中並びに終了後の柱の振動の状態を吟味する事が出来る。

計算結果によれば大凡次の事項が述べられる。

- 1) 柱の振動は衝撃が始まつて暫次時間において後緩かに始まる。
- 2) 衝撃作用時間が比較的短い場合には最大變位の起る時刻は衝撃終了の後であるが衝撃作用時間が長くなるに従つて最大變位は衝撃作用中に起る。この時刻は本計算例の範圍では衝撃力の最大値 a には殆んど關係しない。

第 2 圖 (a)

第 2 圖 (b)

第 2 圖 (c)

第 2 圖 (d)

次に a 及び α の値が振幅の大きさ $\varphi_{\max}$ に及ぼす影響を知るために縦軸に $\varphi_{\max}$ を採り、二つの横軸に a 及び α を採つて立體曲線を描いてみた。その結果は第 3 圖に示してある。

圖に見る如く a の増加に対する $\varphi_{\max}$ の増加は急激であるが、 α の増加に対しては本計算例の範圍では $\alpha=1.5$ 附近に膨らみを生じ $a=2$ までは増加は緩慢である。然しこの場合に於ても a が大きくなるに従つて $\varphi_{\max}$ の増加は著しくなる。

§ 3. 計算と實驗との比較

實驗裝置及び測定方法は既に發表せる著者⁶⁾の論文に説明せる如くである。

柱の模型は $0.4 \times 10 \times 150$ mm のデユラルミン板より製作せるものである。模型が微弱であるため本實驗に於ては裝置の關係上柱に微小振動が誘發され完全に靜止の状態にはならない。又初期撓みの加工及びその測定が困難であるために初めから量的に初期撓みを興える事が出来なかつた。然し完全に眞直な柱ではなく微量の初期撓みは存在する。従つて本論の計算との比較には實際問題として差支えないであらう。そこで實驗によつて得られたオツシログラムより過渡振動の振幅を測定し較正曲線によつて實際の振幅を求め、初期撓みは正確な測定が出来なかつたのですべての實驗に對して模型柱の板厚に等しいと假定し $\varphi_{\max}$ を計算した。その結果は下表に示してある。表には $\alpha=1.5$ の場合の a に對する $\varphi_{\max}$ の計算値が併記してある。

第 4 圖は $\varphi_{\max}$ の値を對數目盛上に、 a の値を横軸にとり、 $\alpha=1.5$ 及び 2.0 の場合の計算結果と實驗値とを置點

第 2 圖 (e)

第 3 圖

實驗 番號	實 驗			計 算	
	a	α	$\varphi_{\max}$	α	$\varphi_{\max}$
1	0.60	1.70	3.6	1.5	1.49
2*	0.85	1.50	4.9	〃	3.42
3	1.00	1.50	10.5	〃	5.70
4	1.15	1.90	10.1	〃	9.50
5	1.10	1.68	12.1	〃	8.00
6	1.17	1.70	19.5	〃	10.10
7	1.20	1.55	14.6	〃	11.00
8*	1.32	1.70	15.3	〃	16.50
9	1.50	1.70	40.5	〃	30.20
10	1.51	1.55	62.1	〃	31.00

* オツシログラムを第 5 圖に示す。

せるものである。實驗に於ては $\alpha=1.5$ 乃至 1.9 である。圖に見る如く計算と實驗とは完全に一致していないのであるが兩者の傾向は大凡一致している事が認められる。

第 4 圖

第 5 圖

實驗模型番號 2 と 8 のオツシログラムを第 5 圖に例示してある。このオツシログラムを $\alpha=1.5$ の場合の計算結果 (第 2 圖 (c)) と比較して見れば衝撃力及び變位時間曲線はその傾向が大體一致している事が認められるであらう。

結 言

初期撓みを有する柱の軸方向に、時間比例して増減する如き衝撃荷重が作用するとき柱に生ずる振動の過渡現象を調べた。工學上必要な事は衝撃による過渡振動の振幅 ϕ_{max} であるが、これは作用する衝撃力の大きさ a と、衝撃作用時間と柱の固有週期との比 α (本論では半週期との比) とに關係する。計算の結果 a 及び α の増加に従つて ϕ_{max} が増加する状態が量的に求められた。 $\alpha=1.5 \sim 1.9$ に於ける a の變化に對する ϕ_{max} の變化を模型實驗によつて求め初期撓みを模型柱の板厚に等しいものと假定して計算と比較した。その結果兩者は大凡一致した。又過渡振動の生起する状態をオツシログラムに得られた結果と計算を比較した結果、兩者の大體の一致が見られた。本計算の結果が衝撃荷重による柱の振動乃至撓屈強度の問題に關連し何等かの資料になれば幸である。

本研究を遂行するに當り種々有益なる御注意並びに御激勵を賜つた恩師太田友彌先生に對し深甚の謝意を表する次第である。

討 論

- 金澤 武君 寫眞に依りますと衝撃力が負の方にも表われていますが如何ですか。
- 熊井 豊二君 實驗によつては小波形がもつと出るのがあります。渡邊俊平氏の論文にも出ていますが原因はつきり書いてない様でした。
- 金澤 武君 衝撃力は正のみにあるので負にはならない筈ですが、負になつてゐるのは何ですか。
- 熊井 豊二君 はつきり解りませんが、多分水晶片自身の振動ではないかと思ひます。
- 金澤 武君 増幅器は何んなものを使われましたか。
- 熊井 豊二君 真空管は 54, 12 A 171 A $\times 6$ の電池式直接増幅法です。戦前の横川式のものです。微小波形は尙研究の餘地があります。直線で表わしたのは振幅の平均値を取つたものです。
- 金澤 武君 光電管を用いた圖の方で衝撃前に波の打つてゐるのは室の中の交流の波形が入つてゐるのではないのですか。
- 熊井 豊二君 交流ではありません。サイクルが違つてゐますから。
- 金澤 武君 一度私の室で實驗した時には交流が入つて困つた事があります。

- 熊井 豊二君 波形はデュラルミンの dipple 波形と一致しています。兎に角計器は十分信頼出来ると思います。
- 太田 友彌君 拜見しますと計算は複雑の様ですが、ベビーサイドオペレーターによつたらずつと計算が簡単になりませんか。
- 熊井 豊二君 澁谷氏のベビーサイド演算法を用いたやり方でも相当複雑です。未だ適当なやり方は今の所考え付きません。
-