(昭和 19 年 4 月造船協会誌上講演会於て講演)

階段式可變斷面を持つ梁及柱の一解法

正員 工學士 渡 邊 正 紀*

Abstract

One Method to the Problems of Beams and Columns with Variable Cross-sections of Stair Types

By Masaki Watanabe, *Kogakusi, Member.*

Generally speaking, it is impossible to express, by the equations, the area and moment of inertia curves of the variable cross sections. This is the reason why such problems of beams and columns cannot be solved except only a few special cases and they are treated approximately by graphical or by other methods.

But if the curves of area and moment of inertia of the sections are replaced by the “Stufenkurve”, they are able to be expressed by Fourier's series.

From this point of view, the author made an attempt to the solutions of beams and columns with variable cross sections of stair types and the satisfactory results were obtained.

1. 緒 言

一般に可変断面を有する梁及柱の問題は、或は各部均一強さを有する梁の問題として、或は塔状構造物の自重安定の問題として、古くより多数の著者に依り論ぜられているが、或特殊な場合を除きその厳密解を得る事は困難とせられ図式解法其他の種々の近似解法が行われている¹⁾。

著者は或函数 $f(x)$ が $(-l, l)$ 域に於て有限にして且有限個の不連続点及極大極小を有するのみならば (Dirichlet の条件)、その函数は所謂 Fourier の級数に展開し得る事より先ず階段的に断面変化をなすものの断

* 大阪高等工業学校教授

1) 例えば梁の撓みに関しては

沢田正雄：切口の漸変する片持梁の弾性曲線式の解に就て，機械学会誌，第 35 卷，第 18 号（昭和 7 年 5 月），432 頁。

栖原豊太郎：断面が漸変せる梁の撓みと応力との研究，第 4 回工学会大会，昭和 15 年第 2 部会講演。

長元亀久男：断面が変化せる梁に於ける弾性曲線式に就て，機械学会論文集，第 9 卷，第 36 号，第 1 部（昭和 18 年 8 月）；図解に依る不規則断面，不規則荷重を持つ梁の撓み計算式に就て，機械学会誌，第 46 卷，第 315 号（昭和 18 年 6 月）

等々。

又柱の安定の問題に関しては，断面，軸推力が或特定の函数（指数函数又は累級数）を以てて表し得る場合に就て小野博士，Dinik，中川教授等の研究がある。又高橋氏は断面，推力が任意の連続函数なる場合を Sturm-Liouville 型固有値問題として論じた。

小野鑑正：材料力学，150～158 頁；断面一樣ならざる長柱の公式，機械学会誌，第 23 卷，第 61 号（大正 9 年 11 月），1～8 頁。

A. N. Dinik：Theory of Elastic Stability by S. Timoshenko P. 134.

中川 元：指数函数の漸変断面を有する長柱の挫屈，第 1. 2. 3 報，機械学会論文集，第 8 卷，第 31 号，第 1 部（昭和 17 年 5 月）及第 8 卷，第 32 号，第 1 部（昭和 17 年 8 月）；其外同著者にはこれに関連せる数篇の論文あり。機械学会論文集，第 2 卷，第 8 号（昭和 11 年 8 月）；第 3 卷，第 11 号（昭和 12 年 5 月）及第 4 卷，第 14 号（昭和 13 年 2 月）。

高橋利衛：弾性論に現われる Sturm-Liouville 型固有値問題の固有値を決定する一般式，機械学会誌，第 45 卷，第 301 号，（昭和 17 年 4 月）；漸変断面の長柱の挫屈に関する一寄与，機械学会誌，第 45 卷，第 309 号，（昭和 17 年 12 月）。

尚近似計算法としては E. Elwitz に依る階段式可変断面柱に対するエネルギー法を用いた計算があり，図式解法に就ては S. Timoshenko の前掲著書中にあり。

面積及慣性モーメントを Fourier の級数を以て表示し、これよりかかる断面変化を有する梁の撓み並に柱としての撓屈荷重の近似計算を試みてみた。

その結果実用上十分信頼し得べき結果が得られたので、かかる方法を一般に任意の可変断面を有するものに対して拡張を試みた。即ち任意の可変断面をもつものの断面面積及慣性モーメントの変化曲線を n 等分せる各分点に於ける値を有する階段曲線 (Stufenkurve) を以て置換えを行う事に依り、Fourier の級数を以て表示し得る事を明にして置いた。これより任意の可変断面を持つ梁及柱の問題も同様に取扱う事が出来る訳である。

2. 可変断面の面積並に慣性モーメントの Fourier 級数に依る表式

2.1. 階段式可変断面を有する場合

或る基準となるべき断面面積並に慣性モーメントを仮定し、これらを夫々 A_0 及 I_0 とす。次に座標原点より始めて各区間を $a_1, a_2, \dots, a_n$ とし、夫々の区間に於ける断面面積 A 及慣性モーメント I を夫々 $\mu_1 A_0, \mu_2 A_0, \dots, \mu_n A_0$; $\lambda_1 I_0, \lambda_2 I_0, \dots, \lambda_n I_0$ を以て表わす事にする。尚各階段位置を座標原点より近き所より始めて夫々 $l_1, l_2, \dots, l_{n-1}$ を以て表わす事にする。

$\frac{A}{A_0} \cdot \frac{I}{I_0}$ 及 $\frac{I_0}{I}$ の変化状態は第 1 図に示せる如く $0 \leq x \leq l$ に於て階段的に変化し、 $-l \leq x \leq 0$ に於ては一樣に零なりとせば、各々の変化曲線は夫々次式に示すが如き正弦及余弦を含む Fourier の級数を以て表わす事が出来る²⁾。

$$\frac{A}{A_0} = F_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ F_m \cos \frac{m\pi}{l} x + G_m \sin \frac{m\pi}{l} x \right\} \dots\dots\dots (2.1.1)$$

$$\frac{I}{I_0} = H_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ H_m \cos \frac{m\pi}{l} x + K_m \sin \frac{m\pi}{l} x \right\} \dots\dots\dots (2.1.2)$$

$$\frac{I_0}{I} = M_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ M_m \cos \frac{m\pi}{l} x + N_m \sin \frac{m\pi}{l} x \right\} \dots\dots\dots (2.1.3)$$

但し各係数 F_0, F_m, G_m ; H_0, H_m, K_m ; M_0, M_m, N_m は夫々次の諸式に依り決定せらるべきものとす。

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{2l} \int_0^l \frac{A}{A_0} dt = \frac{1}{2l} \left[a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \dots + a_{n-1} \mu_{n-1} + a_n \mu_n \right] \\ F_m &= \frac{1}{l} \int_0^l \frac{A}{A_0} \cos \frac{m\pi t}{l} dt \\ &= \frac{1}{m\pi} \left[(\mu_1 - \mu_2) \sin m \frac{l_1}{l} \pi + (\mu_2 - \mu_3) \sin m \frac{l_2}{l} \pi \right. \\ &\quad \left. + \dots + (\mu_{n-1} - \mu_n) \sin m \frac{l_{n-1}}{l} \pi \right] \\ G_m &= \frac{1}{l} \int_0^l \frac{A}{A_0} \sin \frac{m\pi t}{l} dt \\ &= \frac{-1}{m\pi} \left[(\mu_1 - \mu_2) \cos m \frac{l_1}{l} \pi + (\mu_2 - \mu_3) \cos m \frac{l_2}{l} \pi \right. \\ &\quad \left. + \dots + (\mu_{n-1} - \mu_n) \cos m \frac{l_{n-1}}{l} \pi + \mu_n (-1)^m - \mu_1 \right] \\ H_0 &= \frac{1}{2l} \int_0^l \frac{I}{I_0} dt = \frac{1}{2l} \left[a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \dots + a_{n-1} \lambda_{n-1} + a_n \lambda_n \right] \\ H_m &= \frac{1}{l} \int_0^l \frac{I}{I_0} \cos \frac{m\pi t}{l} dt \\ &= \frac{1}{m\pi} \left[(\lambda_1 - \lambda_2) \sin m \frac{l_1}{l} \pi + (\lambda_2 - \lambda_3) \sin m \frac{l_2}{l} \pi \right. \\ &\quad \left. + \dots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n) \sin m \frac{l_{n-1}}{l} \pi \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.1.4)$$

2) $\frac{A}{A_0} \cdot \frac{I}{I_0}$ は $(-l \leq x \leq l)$ に就て Dirichlet の条件を満足する事明なり。

$$\left. \begin{aligned}
 K_m &= \frac{1}{l} \int_0^l \frac{I}{I_0} \sin \frac{m\pi t}{l} \cdot dt \\
 &= \frac{-1}{m\pi} \left[(\lambda_1 - \lambda_2) \cos m \frac{l_1}{l} \pi + (\lambda_2 - \lambda_3) \cos m \frac{l_2}{l} \pi \right. \\
 &\quad \left. + \dots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n) \cos m \frac{l_{n-1}}{l} \pi + \lambda_n (-1)^m - \lambda_1 \right] \\
 M_0 &= \frac{1}{2l} \int_0^l \frac{I_0}{I} \cdot dt = \frac{1}{2l} \left[\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{\lambda_{n-1}} + \frac{a_n}{\lambda_n} \right] \\
 M_m &= \frac{1}{l} \int_0^l \frac{I_0}{I} \cdot \cos \frac{m\pi t}{l} \cdot dt \\
 &= \frac{1}{m\pi} \left[\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \sin m \frac{l_1}{l} \pi + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3} \right) \sin m \frac{l_2}{l} \pi \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{\lambda_{n-1}} - \frac{1}{\lambda_n} \right) \sin m \frac{l_{n-1}}{l} \pi \right] \\
 N_m &= \frac{1}{l} \int_0^l \frac{I_0}{I} \cdot \sin \frac{m\pi t}{l} \cdot dt \\
 &= \frac{-1}{m\pi} \left[\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \cos m \frac{l_1}{l} \pi + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3} \right) \cos m \frac{l_2}{l} \pi \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{\lambda_{n-1}} - \frac{1}{\lambda_n} \right) \cos m \frac{l_{n-1}}{l} \pi + \frac{1}{\lambda_n} (-1)^m - \frac{1}{\lambda_1} \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.1.6)$$

又特別な場合として可変断面棒が中央に於て対称なるものに対しては原点を中央にとる事に依り次の如く余弦のみを含む Fourier 級数を以て表わす事が出来る。但し此の場合 l は棒の半長を表わすものとす。(第2図)

$$\frac{A}{A_0} = B_0 + \sum_1^{\infty} B_m \cos \frac{m\pi}{l} x \quad \dots\dots\dots (2.1.7)$$

$$\frac{I}{I_0} = C_0 + \sum_1^{\infty} C_m \cos \frac{m\pi}{l} x \quad \dots\dots\dots (2.1.8)$$

$$\frac{I_0}{I} = D_0 + \sum_1^{\infty} D_m \cos \frac{m\pi}{l} x \quad \dots\dots\dots (2.1.9)$$

但し茲に各係数 $B_0, B_m; C_0, C_m; D_0, D_m$ と (2.1.4)~(2.1.6) に示す各係数との間には次の如き関係あり。

$$B_0 = 2F_0, \quad B_m = 2F_m \quad \dots\dots\dots (2.1.10)$$

$$C_0 = 2H_0, \quad C_m = 2H_m \quad \dots\dots\dots (2.1.11)$$

$$D_0 = 2M_0, \quad D_m = 2M_m \quad \dots\dots\dots (2.1.12)$$

2.2. 任意の可変断面を有する場合

任意の可変断面を有するものの $\frac{A}{A_0}, \frac{I}{I_0}, \frac{I_0}{I}$ の変化曲線を第3図に示す如く、以後の説明の便宜の爲一括して $y=f(x)$ を以て表わす事にする。今変域 ($0 \leq x \leq l$) を n 個に等分し、その各分点 $x_i = i \frac{l}{n}$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$) とするならば曲線 $y=f(x)$ は近似的に各分点に於て夫々 $y_i=f(x_i)$ なる値を有する所謂階段曲線を以て置換える事が出来る。勿論図示の如く曲線 $y=f(x)$ の外側にとるも内側にとるも大差ない。

依つて今曲線 $y=f(x)$ の近似函数を

$$\varphi(x) = b_0 + \sum_1^{\infty} \left\{ b_m \cos \frac{m\pi}{l} x + C_m \sin \frac{m\pi}{l} x \right\} \quad \dots\dots\dots (2.2.1)$$

と置けば n の数如何に関らず、 b_0, b_m, C_m は (2.1.4)~(2.1.6) 式と同様な式に依り決定せられる。而して n の数が多ければ多い程 $\varphi(x)$ は $f(x)$ に近づく事当然である。

茲で注意すべき事は各分点は n 個に等分せる点である事である。即ち四つの象限に於ける正弦及余弦の値は同じ絶対値を有し符号のみを異にするものが出で互に消し合う事になり、計算は非常に簡単化せられる。

次に $n=10$ なる場合に於ける b_0, b_m, C_m ($m=1 \dots 10$ 迄) を求むれば次の如くなる。

$$b_0 = \frac{1}{20} \sum_1^{10} y_i \quad \dots\dots\dots (2.2.2)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 b_1 \right\} &= \frac{1}{\pi} \\
 b_9 \right\} &= \frac{1}{9\pi}
 \end{aligned} \right\} \times [(u_1 \sin 18^\circ + u_3 \sin 54^\circ) \pm (u_2 \sin 36^\circ + u_4 \sin 72^\circ) + u_5] \\
 \left. \begin{aligned}
 b_3 \right\} &= \frac{1}{3\pi} \\
 b_7 \right\} &= \frac{1}{7\pi}
 \end{aligned} \right\} \times [(u_1 \sin 54^\circ + u_3 \sin 18^\circ) \pm (u_2 \sin 72^\circ - u_4 \sin 36^\circ) - u_5] \\
 b_5 &= \frac{1}{5\pi} [u_1 - u_3 + u_5] \\
 \left. \begin{aligned}
 b_2 \right\} &= \frac{1}{2\pi} \\
 b_8 \right\} &= \frac{1}{6\pi}
 \end{aligned} \right\} \times \left[U_1 \times \begin{Bmatrix} \sin 36^\circ \\ \sin 72^\circ \end{Bmatrix} \pm U_2 \times \begin{Bmatrix} \sin 72^\circ \\ \sin 36^\circ \end{Bmatrix} \right] \\
 \left. \begin{aligned}
 b_4 \right\} &= \frac{1}{4\pi} \\
 b_6 \right\} &= \frac{1}{8\pi}
 \end{aligned} \right\} \times \left[V_1 \times \begin{Bmatrix} \sin 72^\circ \\ \sin 36^\circ \end{Bmatrix} \pm V_2 \times \begin{Bmatrix} \sin 36^\circ \\ \sin 72^\circ \end{Bmatrix} \right] \\
 b_{10} &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.2.3)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 C_1 \right\} &= \frac{-1}{\pi} \\
 C_9 \right\} &= \frac{-1}{9\pi}
 \end{aligned} \right\} \times [\pm (w_1 \cos 18^\circ + w_3 \cos 54^\circ) + (w_2 \cos 36^\circ + w_4 \cos 72^\circ) - (y_1 + y_{10})] \\
 \left. \begin{aligned}
 C_3 \right\} &= \frac{-1}{3\pi} \\
 C_7 \right\} &= \frac{-1}{5\pi}
 \end{aligned} \right\} \times [\pm (w_1 \cos 54^\circ - w_3 \cos 18^\circ) - (w_2 \cos 72^\circ + w_4 \cos 36^\circ) - (y_1 + y_{10})] \\
 C_5 &= \frac{-1}{5\pi} [-w_2 + w_4 - (y_1 + y_{10})] \\
 \left. \begin{aligned}
 C_2 \right\} &= \frac{-1}{2\pi} \\
 C_6 \right\} &= \frac{-1}{6\pi}
 \end{aligned} \right\} \times \left[\pm T_1 \times \begin{Bmatrix} \cos 36^\circ \\ \cos 72^\circ \end{Bmatrix} \pm T_2 \times \begin{Bmatrix} \cos 72^\circ \\ \cos 36^\circ \end{Bmatrix} - u_5 \right] \\
 \left. \begin{aligned}
 C_4 \right\} &= \frac{-1}{4\pi} \\
 C_8 \right\} &= \frac{-1}{8\pi}
 \end{aligned} \right\} \times \left[\pm S_1 \times \begin{Bmatrix} \cos 72^\circ \\ \cos 36^\circ \end{Bmatrix} \mp S_2 \times \begin{Bmatrix} \cos 36^\circ \\ \cos 72^\circ \end{Bmatrix} + u_5 \right] \\
 C_{10} &= \frac{-1}{10\pi} [-T_1 + T_2 - u_5]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.2.4)$$

但し茲に $u_1, \dots; w_1, \dots; U_1, \dots; V_1, \dots; S_1, \dots; T_1, \dots$ は夫々第1表に依り示されるものとす。³⁾
 斯くの如く b_m, C_m を定めると $\varphi(x)$ は $x_i = i \frac{l}{10}$ なる10個の点に於て $f(x)$ の与えられたる値 y_i を有する階段曲線の近似函数となる訳である。而して原点に於て左右対称なる場合には $C_m = 0$ となり、 b_0, b_m の値は夫々(2.2.2)及(2.2.3)の値の2倍となる事は云う迄もない。

3) 任意の曲線を有限個の正絃及余絃の級数 ($2n$ 項迄) $\varphi(x)$ を以て表すに、 $\varphi(x)$ を所謂補間公式と考え各項の係数を $2n$ 分点に於ける夫々の値を知つて求める事は一般に行われている。例えば小平吉男：計算法及計算機械、128~143頁、Horst von Sanden：Praktische Analysis, Leipzig und Berlin、小倉近藤共訳ザンデン実用解析学、199~218頁又は Den Hartog：Mechanical Vibrations, P. 24~30等。本稿に於てはこれと異り曲線を階段曲線と考える事に依り、Fourier 級数の係数の一般式から出発した。尚第1表の方式は Runge の計算方式に倣つた。

第 1 表

y の 値	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	y ₆	y ₇	y ₈	y ₉
	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	y ₆	y ₇	y ₈	y ₉	y ₁₀
v (差)	v ₁	v ₂	v ₃	v ₄	v ₅	v ₆	v ₇	v ₈	v ₉

v の 値	v ₁	v ₂	v ₃	v ₄	v ₅
	v ₉	v ₈	v ₇	v ₆	v ₅
u (和)	u ₁	u ₂	u ₃	u ₄	u ₅
w (差)	w ₁	w ₂	w ₃	w ₄	

u の 値	u ₁	u ₂	w の 値	w ₁	w ₂
	u ₄	u ₃		w ₄	w ₃
S (和)	S ₁	S ₂	U (和)	U ₁	U ₂
T (差)	T ₁	T ₂	V (差)	V ₁	V ₂

3. 階段式可変断面梁の撓み式

弾性線の方程式は (2・1・3) 式に依り

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_x}{EI_0} \left[M_0 + \sum_1^{\infty} \left\{ M_m \cos \frac{m\pi}{l} x + N_m \sin \frac{m\pi}{l} x \right\} \right] \quad (3.1)$$

となる。

然るに片持梁の撓みに関しては固定端の反対側に像を仮定する事が出来る故、(2・1・3) の代りに (2・1・9) 式を採用するならば弾性線の方程式は次の如くなる。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_x}{EI_0} \left(D_0 + \sum_1^{\infty} D_m \cos \frac{m\pi}{l} x \right) \quad (3.2)$$

但し茲に M_x は 任意の x 断面に於ける曲げモーメントを表わす。依つて梁の撓み式は (3.1) 又は (3.2) 式を 2 回積分する事に依り決定せられる訳である。

次に代表例として自由端に集中荷重を受ける片持梁及階段式可変断面を有する軸の撓み式を求めてみる。

3・1. 自由端に集中荷重を受ける階段式可変断面を持つ片持梁 (第 4 圖)

$$M_x = W(l-x)$$

$$\therefore \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{W(l-x)}{EI_0} \left(D_0 + \sum_1^{\infty} D_m \cos \frac{m\pi}{l} x \right) \quad (3.1.1)$$

上式を 2 回積分し $y=0$ に於て $\frac{dy}{dx}=0$ 、且 $y=0$ なる端部条件を代入すれば次式を得る。

$$y = \frac{W}{EI_0} \left[D_0 \frac{x^2}{2} \left(l - \frac{x}{3} \right) + \sum_1^{\infty} D_m \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 \left\{ (x-l) \cos \frac{m\pi}{l} x - 2 \frac{l}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{l} x + (x-l) \right\} \right] \quad (3.1.2)$$

依つて自由端に於ける撓みは

$$(y)_{x=l} = \frac{Wl^3}{EI_0} \left(\frac{D_0}{3} + \frac{2}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{D_m}{m^2} \right) \quad (3.1.3)$$

となる。

次に (3.1.3) 式に依り二段変化する場合の自由端の撓量の数値計算を行い、この結果を普通の方法のに依り梁を a_1 部と a_2 部 (第 4 図参照) の二つに別け、 $x=a_1$ に於ける両者の撓み並びに傾角相等しき条件を入れて求めた自由端の撓み式

$$(y)_{x=l} = \frac{Wl^3}{EI_0} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{1}{3} + (\lambda_2 - 1) \left\{ \frac{a_1}{l} - \left(\frac{a_1}{l} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{a_1}{l} \right)^3 \right\} \right] \quad (3.1.4)$$

と比較してみる事にする。

此の時の D_0 , D_m は (2.1.12) 式より

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{l} \left(\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{\lambda_2} \right) \\ D_m &= \frac{2}{m\pi} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \sin m \frac{a_1}{l} \pi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.1.5)$$

となる。

a_1 部の慣性モーメントを基準慣性モーメント I_0 にとれば $\lambda_1=1$ となる。而して計算は $\lambda_2=0.01, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$; $\frac{a_1}{l}=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ なる場合に就て行われた。附表1は夫々の場合に対する D_0 , D_m の値を表示して置いた⁴⁾。

附表 1. 二段変化する各種断面変化梁に対する D_0 及 D_m の数値

D_0 の 値					
$\lambda_2 \backslash a_1/l$	0.2	0.4	0.6	0.8	
0.01	80.200	60.400	40.600	20.800	
0.1	8.200	6.400	4.600	2.800	
0.2	4.200	3.400	2.600	1.800	
0.4	2.200	1.900	1.600	1.300	
0.6	1.533	1.400	1.267	1.133	
0.8	1.200	1.150	1.100	1.050	

D_m の 値					
$\lambda_2 \backslash m$	1	2	3	4	5
$a_1/l=0.2$ なる場合					
0.01	- 37.0462	- 30.2868	- 19.9810	- 7.4092	0
0.1	- 3.3678	- 2.7534	- 1.8164	- 0.6736	0
0.2	- 1.4968	- 1.2236	- 0.8072	- 0.2994	0
0.4	- 0.5614	- 0.4590	- 0.3028	- 0.1122	0
0.6	- 0.2496	- 0.2042	- 0.1346	- 0.0500	0
0.8	- 0.0936	- 0.0766	- 0.0504	- 0.0186	0
$a_1/l=0.4$ なる場合					
0.01	- 59.9432	- 18.5232	12.3488	14.9860	0
0.1	- 5.4494	- 1.6838	1.1226	1.3624	0
0.2	- 2.4218	- 0.7484	0.4990	0.6054	0
0.4	- 0.9084	- 0.2808	0.1872	0.2272	0
0.6	- 0.4038	- 0.1248	0.0832	0.1010	0
0.8	- 0.1514	- 0.0468	0.0312	0.0378	0
$a_1/l=0.6$ なる場合					
0.01	- 59.9432	18.5232	12.3488	- 14.9860	0
0.1	- 5.4494	1.6838	1.1226	- 1.3624	0
0.2	- 2.4218	0.7484	0.4990	- 0.6054	0
0.4	- 0.9084	0.2808	0.4872	- 0.2272	0
0.6	- 0.4038	0.1248	0.0832	- 0.1010	0
0.8	- 0.1514	0.0468	0.0312	- 0.0378	0

4) 階段式可変断面柱の捩屈に関する数値計算も同じく $\lambda_2=0.01, 0.1, \dots$; $a_1/l=0.2, 0.4, \dots$ に就て行つた。この $\lambda_2, a_1/l$ の各値は Timoshenko が捩屈計算に使用した値で比較の為に同様な値を採用した。

$a_1/l=0.8$ なる場合

$\lambda_2 \backslash m$	1	2	3	4	5
--------------------------	---	---	---	---	---

 $a_1/l=0.8$ なる場合

0.01	- 37.0462	30.2868	- 19.9810	7.4092	0
0.1	- 3.3678	2.7534	- 1.8164	0.6736	0
0.2	- 1.4968	1.2236	- 0.8072	0.2994	0
0.4	- 0.5614	0.4590	- 0.3028	0.1122	0
0.6	- 0.2496	0.2042	- 0.1346	0.0500	0
0.8	- 0.0936	0.0766	- 0.0504	0.0186	0

此等の値を(3.1.3)式に代入すれば夫々の場合に於ける自由端の撓量が決定出来る訳である。

(3.1.3) 及 (3.1.4) 式を一般に

$$(y)_{x=l} = k \frac{Wl^3}{EI_0} \dots\dots\dots (3.1.6)$$

と置き k の値を両式に依り求めた結果を一括して第2表に一括して示して置いた。但し括弧内の数字は(3.1.4)式に依るものである。

此の結果を一覧すると明なる如く、 $m=5$ 迄に止めたに拘らず両者の値は非常に良く合っていると云えよう。

第 2 表
 k の 値 $(y_{x=l} = k \frac{Wl^3}{EI_0})$

$\lambda_2 \backslash a_1/l$	0.2	0.4	0.6	0.8
0.01	17.1481 (17.2280)	7.5184 [*] (7.4616)	2.3482 (2.4533)	0.6051 (0.5983)
0.1	1.8619 (1.8693)	0.9865 (0.9814)	0.5225 (0.5253)	0.3581 (0.3574)
0.2	1.0128 (1.0160)	0.6236 (0.6213)	0.4174 (0.4187)	0.3443 (0.3440)
0.4	0.5881 (0.5893)	0.4421 (0.4413)	0.3648 (0.3653)	0.3374 (0.3368)
0.6	0.4464 (0.4471)	0.3816 (0.3813)	0.3474 (0.3476)	0.3351 (0.3351)
0.8	0.3758 (0.3760)	0.3516 (0.3513)	0.3385 (0.3387)	0.3340 (0.3340)

(括弧内の数字は厳密解に依る。)

これより多数の階段を有する梁又は任意の可変断面梁に対しても、本法に依り夫等の撓量を十分なる精度を以つて計算し得る事が想像せられる訳である。

3.2. 両端支持の階段式可変断面梁が1個の集中荷重を受ける場合 (第5図)

座標原点を A にとる時弾性線の方程式は(3.1)式に依り A より荷重 P の働く位置迄に於ては

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{R_A x}{EI_0} \left[M_0 + \sum_1^{\infty} \left\{ M_m \cos \frac{m\pi}{l} x + N_m \sin \frac{m\pi}{l} x \right\} \right] \dots\dots\dots (3.2.1)$$

となり P の働く位置より B 迄は

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = \frac{-R_B x + Pd}{EI_0} \left[M_0 + \sum_1^{\infty} \left\{ M_m \cos \frac{m\pi}{l} x + N_m \sin \frac{m\pi}{l} x \right\} \right] \dots\dots\dots (3.2.2)$$

となる。但し茲に R_A , R_B は夫々 A , B に於ける反力にして d は A 及 P 間の距離を示す。

次に(3.2.1), (3.2.2)の両式を解けば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \frac{R_A}{EI_0} \phi_1(x) + C_1 \\ y_1 &= \frac{R_A}{EI_0} \phi_2(x) + C_1 x + C_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_2}{dx} &= -\frac{R_B}{EI_0} \phi_1(x) + \frac{Pd}{EI_0} \phi_1(x) + C_3 \\ y_2 &= -\frac{R_B}{EI_0} \phi_2(x) + \frac{Pd}{EI_0} \phi_2(x) + C_3 x + C_4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.2.4)$$

但し茲に

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(x) &= \frac{M_0}{2} x^2 + \sum_1^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 \left\{ M_m \left(\cos \frac{m\pi}{l} x + \frac{m\pi}{l} x \cdot \sin \frac{m\pi}{l} x \right) \right. \\ &\quad \left. + N_m \left(\sin \frac{m\pi}{l} x - \frac{m\pi}{l} x \cdot \cos \frac{m\pi}{l} x \right) \right\} \\ \phi_2(x) &= \frac{M_0}{6} x^3 + \sum_1^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi} \right)^3 \left\{ M_m \left(2 \sin \frac{m\pi}{l} x - \frac{m\pi}{l} x \cdot \cos \frac{m\pi}{l} x \right) \right. \\ &\quad \left. - N_m \left(2 \cos \frac{m\pi}{l} x + \frac{m\pi}{l} x \cdot \sin \frac{m\pi}{l} x \right) \right\} \\ \phi_1(x) &= M_0 x + \sum_1^{\infty} \frac{l}{m\pi} \left(M_m \sin \frac{m\pi}{l} x - N_m \cos \frac{m\pi}{l} x \right) \\ \phi_2(x) &= \frac{M_0 x^2}{2} - \sum_1^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 \left(M_m \cos \frac{m\pi}{l} x + N_m \sin \frac{m\pi}{l} x \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.2.5)$$

依て積分常数 C_1, C_2, C_3, C_4 は $x=0, l$ に於て $y=0, x=d$ に於て $y_1=y_2, \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx}$ なる事より次の如く決定せられる。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= C_3 - \frac{P}{EI_0} \{ \phi_1(d) - d \phi_1'(d) \} \\ C_2 &= -\frac{R_A}{EI_0} \phi_2(0) \\ C_3 &= \frac{1}{l} \left\{ \frac{R_B}{EI_0} \phi_2(l) - \frac{Pd}{EI_0} \phi_2(l) - C_4 \right\} \\ C_4 &= \frac{P}{EI_0} [\phi_2(d) - d \{ \phi_2'(d) + \phi_1(d) \} + d^2 \phi_1'(d)] + C_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.2.6)$$

茲に

$$\left. \begin{aligned} \phi_2(0) &= -2 \left(\frac{l}{\pi} \right)^3 \sum_1^{\infty} \frac{N_m}{m^3} \\ \phi_2(l) &= l^3 \left[\frac{M_0}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} M_m - \frac{2}{\pi^3} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^3} N_m \right] \\ \phi_2(l) &= l^2 \left[\frac{M_0}{2} - \frac{1}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} M_m \right] \\ \phi_1(d) &= l \left[\frac{d}{l} M_0 + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{T_m}{m} \right] \\ \phi_2(d) &= l^2 \left[\left(\frac{d}{l} \right)^2 \frac{M_0}{2} - \frac{1}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{t_m}{m^2} \right] \\ \phi_1(d) &= l^2 \left[\left(\frac{d}{l} \right) \frac{M_0}{2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{t_m}{m^2} + \frac{1}{\pi} \frac{d}{l} \sum_1^{\infty} \frac{T_m}{m} \right] \\ \phi_2(d) &= l^3 \left[\left(\frac{d}{l} \right)^3 \frac{M_0}{6} + \frac{2}{\pi^3} \sum_1^{\infty} \frac{T_m}{m^3} - \frac{1}{\pi^2} \frac{d}{l} \sum_1^{\infty} \frac{t_m}{m^2} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.2.7)$$

但し

$$\begin{aligned} T_m &= M_m \sin \frac{m\pi}{l} d - N_m \cos \frac{m\pi}{l} d \\ t_m &= M_m \cos \frac{m\pi}{l} d + N_m \sin \frac{m\pi}{l} d \end{aligned}$$

これより撓量を計算する事が出来る訳である。

数 値 計 算 例

第5図に示すが如き軸が、一方の軸受より 0.5 m の点に 5,000 kg の集中荷重を受ける時の最大撓量を算出してみる。

慣性モーメント

径 100 φ $I=490.9 \text{ cm}^4$ 径 140 φ $I=1886 \text{ cm}^4$

" 120 φ $I=1018$ " " 160 φ $I=3217$ "

今径 100 φ の I を基準 I_0 とすれば

$$\frac{1}{\lambda_1}=1.0, \quad \frac{1}{\lambda_2}=0.26, \quad \frac{1}{\lambda_3}=0.1525, \quad \frac{1}{\lambda_4}=0.26, \quad \frac{1}{\lambda_5}=0.482, \quad \frac{1}{\lambda_6}=1.0$$

又 $\frac{a_1}{l}, \frac{a_2}{l}, \dots, \frac{l_1}{l}, \frac{l_2}{l}, \dots$ は第5図より

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a_1}{l} = \frac{1}{12} \\ \frac{a_2}{l} = \frac{5}{24} \\ \frac{a_3}{l} = \frac{7}{24} \\ \frac{a_4}{l} = \frac{1}{6} \\ \frac{a_5}{l} = \frac{1}{6} \\ \frac{a_6}{l} = \frac{1}{12} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (a) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{l_1}{l} = \frac{a_1}{l} = \frac{1}{12} \\ \frac{l_2}{l} = \frac{l_1}{l} + \frac{a_2}{l} = \frac{7}{24} \\ \frac{l_3}{l} = \frac{l_2}{l} + \frac{a_3}{l} = \frac{7}{12} \\ \frac{l_4}{l} = \frac{l_3}{l} + \frac{a_4}{l} = \frac{3}{4} \\ \frac{l_5}{l} = \frac{l_4}{l} + \frac{a_5}{l} = \frac{11}{12} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (b)$$

依つて慣性モーメントの逆数の係数 M_0, M_m, N_m は(2.1.6)式より次の如くなる。

$$\left. \begin{array}{l} M_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{12} + \frac{0.26 \times 5}{24} + \frac{0.1525 \times 7}{24} + \frac{0.26}{6} + \frac{0.482}{6} + \frac{1}{12} \right] = 0.1943 \\ M_m = \frac{1}{m} \left[0.2355 \sin \frac{m\pi}{12} + 0.0343 \sin \frac{7m\pi}{24} - 0.0343 \sin \frac{7m\pi}{12} - 0.0706 \sin \frac{3m\pi}{4} \right. \\ \quad \left. - 0.1648 \sin \frac{11m\pi}{12} \right] \\ N_m = \frac{-1}{m} \left[0.5355 \cos \frac{m\pi}{12} + 0.0343 \cos \frac{7m\pi}{24} - 0.0343 \cos \frac{7m\pi}{12} - 0.0706 \cos \frac{3m\pi}{4} \right. \\ \quad \left. - 0.1648 \cos \frac{11m\pi}{12} + 0.8180 \{(-1)^m - 1\} \right] \end{array} \right\} \dots\dots\dots (c)$$

故に $m=1, 2, \dots$ に対する M_m, N_m の値は第3表の如くなる。尙同表中に T_m, t_m の値も同時に求めて置いた。

第 3 表 M_m, N_m 及 T_m, t_m の値
 $m=5$ 迄求む

m	1	2	3	4	5
M_m	-0.03806	0.16060	0.01226	0.07500	0.01402
N_m	0.17677	-0.04397	0.15304	-0.01479	0.11702
T_m	-0.08255	0.04220	0.09934	-0.05760	-0.10940
t_m	0.16075	-0.16098	-0.11667	0.05030	0.04388

これより(3.2.7)式の各値は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_2(0) &= -0.0114 l^3 \\ \phi_2(l) &= 0.0111 l^3 \\ \phi_2(l)' &= 0.0890 l^2 \\ \phi_1(d) &= 0.0605 l \\ \phi_2(d) &= 0.0064 l^2 \\ \phi_1(d) &= 0.0359 l^2 \\ \phi_2(d) &= -0.0069 l^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (d)$$

故に積分常数 C_1, C_2, C_3, C_4 は

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -0.0868 \frac{Pl^2}{EI} \\ C_2 &= 0.0067 \frac{Pl^3}{EI} \\ C_3 &= -0.0763 \frac{Pl^2}{EI} \\ C_4 &= -0.0081 \frac{Pl^3}{EI} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (e)$$

となる。

次に最大撓みの起る位置であるが、これは(3・2・4)の最初の式を零と置く事に依り決定せられる。然るにこの値は近似的に $x = \frac{l}{2}$ となる故、最大撓みの式は次の如くなる。

$$(y)_{\max} \doteq \frac{P}{EI_0} \frac{d}{l} \left\{ -\phi_2 \left(\frac{l}{2} \right) + l \phi_2 \left(\frac{l}{2} \right) \right\} + \frac{l}{2} \cdot C_3 + C_4 \dots\dots\dots (f)$$

然るに

$$\begin{aligned} \phi_2 \left(\frac{l}{2} \right) &= l^3 \left[\frac{M_0}{48} + \frac{2}{\pi^3} \sum_1^{\infty} \frac{M_m}{m^3} \sin \frac{m\pi}{2} - \frac{1}{2\pi^2} \sum \frac{N_m}{m^2} \sin \frac{m\pi}{2} \right] = -0.00182 l^3 \\ \phi_2 \left(\frac{l}{2} \right)' &= l^2 \left[\frac{M_0}{2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{N_m}{m} \sin \frac{m\pi}{2} \right] = 0.0086 l^2 \end{aligned}$$

なり。依つて (f) 式より

$$(y)_{\max} = -0.0419 \frac{Pl^3}{EI_0} \dots\dots\dots (g)$$

を得る。

今 $P=5,000 \text{ kg}$, $l=120 \text{ cm}$, $E=2,200,000 \text{ kg/cm}^2$, $I_0=490.9 \text{ cm}^4$
とすれば

$$(y)_{\max} = -\frac{0.0419 \times 5,000 \times 120^3}{2,200,000 \times 490.9} = -0.0336 \text{ cm}$$

を得る。

この値を図式解法で求めた値 $0.034 \text{ cm}^{5)}$ と比較すれば非常によく合っている。

4. 階段式可変断面柱の挫屈荷重の計算

可変断面柱の挫屈に就ては、前述の如く多くの研究がなされているが、本論文に於ては慣性モーメントの変化を Fourier の級数で表し所謂 Successive Approximation Method に依つた場合、均一断面棒の撓曲線を第1近似式として第2近似式を求めれば、十分実用に供し得べき挫屈荷重を算定出来る事を示した。

4・1. 下端固定、上端自由なる場合 (第6図)

上端の撓量を δ とせば、この時の撓曲線の微分方程式は次の如くなる。

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = P(\delta - y)$$

又は (2・1・9) 式より

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = k^2 \left(D_0 + \sum_1^\infty D_m \cos \frac{m\pi}{l} x \right) (\delta - y) \dots\dots\dots (4.1.1)$$

となる。茲に $k^2 = \frac{P}{EI_0}$

(4.1.1) 式の厳密解を得る事は困難なる故 successive approximation method に依る事とし、第1近似式として断面一樣なる柱の撓曲線

$$y_1 = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) \dots\dots\dots (4.1.2)$$

を用いる事にする。

(4.1.2) を (4.1.1) 式の y に代入し 2 回積分を行い、 $x=0$ に於ける条件を加味すれば次式を得る。

$$y_2 = \delta k^2 \left[D_0 \left(\frac{2l}{\pi} \right)^2 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) + \sum_1^\infty D_m \left\{ \frac{1 - \cos \alpha_m x}{\alpha_m^2} + \frac{1 - \cos \beta_m x}{\beta_m^2} \right\} \right]$$

$$\alpha_m = \frac{\pi}{l} \left(\frac{1}{2} - m \right), \quad \beta_m = \frac{\pi}{l} \left(\frac{1}{2} + m \right) \dots\dots\dots (4.1.3)$$

即ち y_2 は第2の近似式なり。尙同様な方法を繰返す事に依り第3, 第4, …… の近似式が得られる訳である。而してこれらに対する捩屈荷重 P_{cr} は $x=l$ に於て $y=\delta$ なる条件を入れる事に依り求められる訳である。

(4.1.3) 式よりこれを求むれば次の如くなる。

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{4l^2} \frac{1}{D_0 + \sum_1^\infty D_m \frac{1+4m^2}{(1-4m^2)^2}} \dots\dots\dots (4.1.4)$$

即ち上式は I_0 なる慣性モーメントを有する一樣断面柱の捩屈荷重に或補正係数を乗じたるものである事を示している。依つて (4.1.4) 式を

$$P_{cr} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\pi^2 EI_0}{4l^2} \dots\dots\dots (4.1.5)$$

と置き (4.1.4) 式より求めた補正係数 η の値を Timoshenko の示した厳密解と比較する目的を以つて二段変化柱に就て数値計算を試みてる。但し二段変化梁の撓みの数値計算を行つた場合と同様に $I_1=I_0$ と置き、 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0.01, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ とし、 $\frac{a_1}{l}=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ の場合に就て計算を行つた。

各々の場合に於ける D_0, D_m の値は附表 1 に示すが如くであり、又夫々の場合に対する補正係数の値は第 4 表の如くなる。

第 4 表 η の 値 $\left(P_{cr} = \frac{1}{\eta} \frac{\pi^2 EI_0}{4l^2} \right)$

$\lambda_2 \backslash a_1/l$	0.2	0.4	0.6	0.8
0.01	56.6025 (65.7977)	26.3139 (36.5543)	8.8231 (16.6161)	2.0249 (4.3671)
0.1	6.0548 (6.7141)	3.3021 (4.1124)	1.7112 (2.1933)	1.0932 (1.1490)
0.2	3.2466 (3.5249)	2.0228 (2.3388)	1.3162 (1.4753)	1.0414 (1.0578)
0.4	1.8425 (1.9390)	1.3835 (1.4775)	1.1185 (1.1598)	1.0155 (1.0206)
0.6	1.3740 (1.4140)	1.1704 (1.2051)	1.0528 (1.0681)	1.0064 (1.0092)
0.8	1.1404 (1.1543)	1.0639 (1.0751)	1.0197 (1.0249)	1.0026 (1.0030)

括弧内の数字は S. Timoshenko の計算に依る。(S. Timoshenko; Theory of Elastic Stability P. 130)

尚同表中括弧内に示した数字は Timoshenko の著書中に示された結果⁶⁾より η の値を計算したものである。

これに依つてみるに η の値は全般的に厳密解に依るものより小さく P_{cr} は大き目に出てくる嫌はあるが、

$\lambda_2 = \frac{I_2}{I_1}$ の値が極度に小さい場合を除けば可成よく合つていとみる事が出来よう。

4.2. 両端支持の場合 (第7図)

第1近似式として断面一様なる柱の撓式

$$y = \delta \sin \frac{\pi}{l} x \quad \dots\dots\dots (4.2.1)$$

δ : 中央部の撓量

を採れば第2近似式は次式より求められる。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -k^2 \delta \left(M_0 + \sum_1 M_m \cos \frac{m\pi}{l} x + \sum_1 N_m \sin \frac{m\pi}{l} x \right) \sin \frac{\pi}{l} x \quad \dots\dots\dots (4.2.2)$$

上式を2回積分し $x=0$ 及 l に於て $y=0$, $x=\frac{l}{2}$ に於て $y=\delta$ なる条件を代入すれば P_{cr} は次の如くなる。

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_0}{l^2} \frac{1}{M_0 + \frac{N_1}{8} \left(\frac{\pi^2}{2} + 2 \right) + \sum_2 M_m \frac{1+m^2}{(1-m^2)^2} \sin^2 \frac{\pi}{2} (1+m) - \sum_2 \frac{N_m}{(1-m^2)^2} \left\{ m((-1)^{m+1} + 1) + (1+m^2) \cos \frac{\pi}{2} (1+m) \right\}} \quad \dots\dots\dots (4.2.3)$$

柱の断面変化の状態が中央部に対して対称なる場合には上式に於て $M_0 = D_0$, $M_m = D_m$, $N_1 = N_m = 0$ と置き且 $m=2m$ ($\because \sin \frac{\pi}{2} (1+m)$ は m の奇数なる時は零となる) とすれば (4.1.4) 式の補正係数と一致する。

次に本計算法を Mannesmann boom の挫屈荷重の算定に応用してみる。即ち boom を上部取付 band 及下部の goose neck の所にて自由に支持せられたる所謂両端支持の柱と考えるならば M_0 , N_1 , M_m , N_m の値を求め、(4.2.2) 式に代入すればよい。又 Mannesmann boom を中央に於て対称なる断面変化をなすものと仮定すれば (4.1.4) 式に依つてもよい訳である。次に数値計算例として第8図に示すが如き boom の挫屈荷重を (4.2.2) 式に依り計算してみる。第5表にこれが諸寸法を示す。これより M_0 , M_m , N_m の値を求めた結果を第6表に示す。

第5表 Mannesmann Boom の数値計算例

(第8図参照) $l=14,500$, 管の厚さ=11 耗

n	外径 d (耗) (厚さ)	慣性モーメント I (耗 ⁴)	$\frac{1}{\lambda_n}$	a_n (耗)	$\frac{a_n}{l}$	$\frac{l_n}{l}$
1	240	952.81	1.0	800	0.0552	0.0552
2	270	1,525.30	0.625	700	0.0483	0.1035
3	300	2,148.49	0.443	1,000	0.0690	0.1725
4	325	2,781.81	0.343	1,300	0.0897	0.2622
5	345	3,369.82	0.28	1,600	0.1100	0.3722
6	365	4,035.36	0.236	4,400	0.3030	0.6752
7	345	3,369.82	0.28	1,600	0.1100	0.7852
8	325	2,781.81	0.343	1,300	0.0897	0.8749
9	300	2,148.49	0.443	1,000	0.0690	0.9449
10	270	1,525.30	0.625	800	0.0552	1.0

注意: 本数値は日本鋼管株式会社, 型録第140号, 符号 145-12 (P.15-16) に依つた。尚計算の便宜上 a_1 , a_{10} 中に取付金具迄の寸法を含めた。

第6表 M_0 , M_m 及 N_m の値 ($m=1, 2, \dots, 5$ 迄)

$M_0=0.18783$

m	1	2	3	4	5
M_m	0.03410	0.10310	0.02422	0.05088	0.01723
N_m	0.18990	0.01612	0.11890	0.01913	0.09120

6) S. Timoshenko: Theory of Elastic Stability, P. 130.

本数値計算に於ては外径 240 φ の所の慣性モーメントを I_0 としたのであるが、これを中央部の 365 φ の所のものを基準にとり、 M_0, N_m, M_m の各値を (4.2.2) 式に代入すれば

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_0}{l^2} \frac{0.236}{0.18783 + 0.16460 + 0.32738 - 0.29471} = 0.613 \frac{\pi^2 EI_0}{l^2}$$

となる。

これを日本鋼管の型録に示された

$$P_{cr} = 7.82 \frac{EI_0}{l^2} = 0.7923 \frac{\pi^2 EI_0^{(7)}}{l^2}$$

と比較すれば約 23% 少くなっている。

5. 結 言

階段式可変断面を有する梁又は柱の問題を取扱う場合、先ず第一に遭遇する困難は断面積又はその慣性モーメントの ($0 \leq x \leq l$) に於ける変化を一樣の数式に依り表し得ないという事である。従つてこれらを厳密に取扱うには各階段位置に於て変域を分ち、夫々の分域に於ける関係式を階段位置の各条件に依り連ぎ合せて行ふ必要がある。然し、かかる方法は階段の数が多数に亘る時は到底その煩に堪えざる為、従来から種々の近似計算法が研究せられている。而して、これらの研究の多くは図式解法を適用して行かんとするものか (計算と混用せるものもある)、又はこれらの変化状態が或特定の函数で表される場合に就き、その解を求め (多くの場合その数学的操作は困難である) て置き対称とするものの断面積又は慣性モーメントの変化がこれに近きものと仮定して、その結果を適用せんとするものかの何れかの様である (任意の可変断面を有するものに対しても同様の事が云える)。

著者は階段的に断面変化するものの断面積及び慣性モーメントは Fourier の級数を以て表示し得る事を明にし、次で任意の可変断面を有するものに対しても、これらの変化曲線を多数の階段を有する階段曲線を以て置換えるならば、同様な立場よりこれを取扱う事が出来る事を提示して置いた (階段曲線を以て置換えなくとも既述の如く $2n$ 個の点を通る $2n$ 項の有限級数を以て表わす事も可能である。本論文に於ては最初に階段的に変化するものを取扱つたのでこの立場から論じた)。

而して、これらの表式を梁の撓み計算並に柱の捩屈荷重の計算に適用してみた結果、実用上十分差支のない程度の結果が得られた。即ち前者に対して自由端に集中荷重をうける二段変化の片持梁の自由端に於ける撓量を計算した結果、第 2 表にみられる如く厳密解との誤差は断面変化の最も極端なる場合に於てすら約 ±5% に過ぎなかつた。この誤差は全く $\frac{I_0}{I}$ の変化を Fourier の級数で表わした為のみに依つて起るものであつて、以つて階段式変化の状態を Fourier の級数で表わす事の不当ならざる証査とみる事が出来よう。尚両端支持梁の例として軸の撓みを計算した所、図式解法で求めたものと殆ど大差なき結果が得られた。

後者の場合には微分方程式の厳密なる取扱をなす事は困難なる故、successive approximation method を適用し均一断面柱の撓式より出発し第 2 近似式迄求める事に依り P_{cr} を求めた。その結果一端固定、他端自由なる柱に就て第 4 表に見られる如く断面変化の極端なる場合には相当厳密解と相異なるも前者の場合の事より考えてこの誤差は最初に仮定した撓み曲線の不適当なりし事を意味するに外ならないものと考えられる。然しこの程度の近似計算に依るも断面変化の状態が極端ならざる場合には、厳密解に依る値より幾分大きく目に出る嫌はありとするも十分実用に供し得る程度の誤差範囲にありと云えよう。次で本計算法を Mannesmann Boom に適用し両端支持の柱として計算を試みてみた。その結果一例ではあるが、慣性モーメントが $\left(\frac{x}{l}\right)^{1/2}$ の割で変化すると仮定した場合より 23% 少い値が出た。

以上要するに階段式可変断面を持つもの、ひいては任意の可変断面を有するものに対しても断面積及慣性モー

- 7) 本式は boom が中央に於て対称なる断面を有するものと仮定し (厳密には対称になつてはいないが近似的に如斯考えられる)、且断面の慣性モーメントは $I = I_0 \left(\frac{x}{l}\right)^{1/2}$ なる拋物線をなすものと考えて小野博士の n 乗根について解かれた結果に $n=1/2$ とおいて導かれている。但し I_0 は中央部に於ける慣性モーメントを表わす。(附図参照)

日本鋼管型録、第 140 号、継目無鋼管製デリックブーム、27~28 頁及小野鑑正：材料力学、158 頁。

メントを Fourier の級数を以て表示するならば、割合に簡單なる數値計算を以て十分その目的を達し得るものと思われる。

撰筆するに當り常々多大の御指導と御鞭撻を賜る寺沢博士並に吉識先生に満腔の謝意を表すると共に研究上種々御配慮に預る河合校長に此の機会に厚く御礼申上げる次第である。

第 1 圖

第 2 圖

第 3 圖

第 4 圖

第 5 圖

第 6 圖

第 7 圖

第 8 圖