全面的空洞現象を起した翼素に対する 側壁影響の計算

第一報 (平面翼素の場合)

正員 工学士 木 下 昌 雄

准員 工学士 篠 田 仁 吉

Abstract

Über den Wandeinfluss auf das Flügelprofil mit einer völlig ausgebildeter Kavitation.

Der erste Bericht.

By Masao Kinoshita, *Kogakushi, Member*

Jinkichi Shinoda, *Kogakusai, Associate Member*

Die Verfasser lösen das Problem über zweidimensionalen diskontinuierlichen Strom um eine ebene Platte nach Demtchenko Forschungsverfahren und ausserdem noch mittels des Villatschen Formels. Sie berechnen dann den Auftrieb sowie den Widerstand als die Funktionen von dem Abstand zwischen den zwei auseinander liegenden Wänden bei dem Anstellwinkel 0° , 5° , 10° und 90° beziehungsweise, und vergleichen die ausgerechneten Resultaten mit den bekannten Ergebnissen vom ähnlichen Problem über den kontinuierlichen Strom. Sie geben zuletzt die Berichtigungsfaktoren wegen des Druckes innerhalb der Kavitation und des Reibungswiderstandes an.

目 次

1. 緒 論

第一編 平行な壁の間に置かれた平板の 周りの二次元不連続流の問題

2. 解法の要点
3. $w = \Phi(t)$
4. $z = f(t)$. 混合調和問題
5. $\frac{dz}{du}$ の積分
6. 常数の決定, $\frac{l}{D}$ の計算
7. 揚力及び抗力の計算, 壁面の無い場合との比較
8. 数値計算
9. 連続流との比較, $\frac{l}{D}$ が小なる場合の近似式

第二編 全面的空洞発生状態への応用

10. 飽和蒸気圧に関する補正
 11. 摩擦抵抗に関する補正
 12. 結 論
- 附録 I 混合調和問題の解法の適用
附録 I' 別解 Villat の公式を応用した解法
附録 II 附録 III
附録 IV 附録 V
附録 VI 附録 VII
附録 VIII 附録 IX

1. 緒 論

推進器翼素の空洞現象を空洞水槽で実験する時, 翼素の大きさに比べて水槽の幅が小さい時には, 当然両側の壁の影響が入つて来る訳である。風洞に於ける如く流れが連続流と見做し得る場合に就ては, 既に佐々木教授, Rosenhead 及び友近教授等に依つて解かれて居るが, 水中の空洞現象の場合には流れの状態が上と全く異なる不連続流であつて, 此の場合に対しては僅にその一般解が佐々木教授〔参考文献 (4) 261 頁〕に依つて求られて居るのみで, その具体的な例に就ての数値計算等は未だ全く行われて居ない様である。著者等は, 先ず平行な壁の中

央に置かれた平面翼素の周りの不連続流を完全流体の二次元流として解き、細かい数値計算を行つて壁の距離に因つてその揚力及び抗力が如何に変化するかを調べた。平面翼が平行壁の丁度中央に位置しない場合に就ても同様の方法に拠つて解ける事は言う迄も無いが、今回は取敢えず實際問題と最も関連の多い上記の場合のみに就て論じた次第である。次に更に進んで、上記の完全流体の不連続流として得た結果に対して、実際の全面的空洞発生状態に近からしめる為に、空洞内部の圧力をその水温に対する水の飽和蒸気圧に等しからしめ、又翼素の接水面に作用する摩擦抵抗をも考慮に入れた補正法を考え、其の場合の側壁影響を明かにしたのである。本論文の結果に拠れば、壁の距離が翼弦長に比して相当に大きくても既に揚力及び抗力に影響があり、現在各所で使用せられて居る程度の翼素空洞水槽では、之が可成り大きく効いて来る事が判る。尙本論文の結果は、前述の如く平面翼素の全面的空洞発生の場合に対してのみ適用し得るものであるが、推進器空洞水槽の場合に対しても亦参考になるものと考えられる。

本解法前半の主要点は Basile Demtchenko: "Problèmes mixtes harmoniques en hydrodynamique des fluides parfaits" 1933 [参考文献 (2)] に拠り、所謂混合調和問題の解法を適用した。又別解として、Villat の公式を応用した解法をも添えて置いた。

第一編 平行な壁の間に置かれた平板の周りの二次元不連続流の問題

2. 解法の要点

第 1 図の如き完全流体の二次元不連続流を考える。 AB, CD は平行な壁で、 EF はその丁度中央に置かれた厚さの無い平板である。流体は AB, CD の間を左方から右方へ流れて居り、 P で上下に分れて E 及び F で平板から剥れて自由流線 λ_1 及び λ_2 となり無限遠迄続くものとする。第 1 図に示された流体の運動平面を z 平面とする。速度ポテンシャル及び流れの函数を夫々 ϕ 及び ψ とし、 $w = \phi + i\psi$ で表わされる複素速度ポテンシャルを考え、 w 平面を画けば第 2 図の如くなる。同図に於ては対応する点は第 1 図と同じ文字で表わしてある。

次に第 3 図の如く t 平面を考え $EBACDFE$ を実軸上に採る。各点が夫々対応する様に

$$t \text{ 平面を } z \text{ 平面に } z = f(t) \text{ で}$$

$$t \text{ 平面を } w \text{ 平面に } w = \phi(t) \text{ で}$$

夫々等角写像すれば、 z 平面と w 平面とが t をパラメーターとして結び付けられ、問題は解ける訳である。

3. $w = \phi(t)$

$\phi(t)$ は Schwarz-Christoffel の変換に依つて求められる。 t 平面上の相当する点の坐標を夫々

$$B; e_3, A, C; t_2, D; e_2, F; e_1, P; t_1, E; \pm \infty$$

とする。 w 平面に於て、 E から出発して $BACDFPE$ なる順序に廻ると、角は P で π だけ減じ、 B, A 及び D で夫々 π だけ増すから写像函数は次の形を採る。

$$w = \phi(t) = c \int \frac{t - t_1}{t - t_2} \frac{dt}{(t - e_2)(t - e_3)} \dots\dots\dots (1)$$

茲に c は常数である。

4. $z = f(t)$, 混合調和問題

この関係は直接には求められない。今 $i \log \frac{dw}{dz}$ が t の函数として

$$i \log \frac{dw}{dz} = F(t)$$

なる形で求めたとすれば

$$e^{iF(t)} = e^{-\log \frac{dw}{dz}} = e^{\log \frac{dz}{dw}} = \frac{dz}{dw} \dots\dots\dots (2)$$

であるから (1) 式を使つて

$$dz = e^{iF(t)} \phi'(t) dt \dots\dots\dots (3)$$

となつて z と t との対応関係が求まり、従つて (1) 式と組合せて z 平面と w 平面との対応関係が求まり問題は解けた事になる。

z 平面に於て、速度の絶対値を q , x 軸の正の方向となす角を θ とれば、(速度 q は後に ϑ 函数の計算の際に現れる $q = e^{\tau\pi i}$, $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$ で定義される q とは、混同される惧れはないと思われたので敢て同一文字を使用した)

$$\frac{dw}{dz} = qe^{-i\theta} \quad [\text{註(1)}] \quad \dots\dots\dots(4)$$

であるから

$$F(t) = i \log \frac{dw}{dz} = \theta + i \log q \quad \dots\dots\dots(5)$$

上式(5)は

EB, DF で $q = q_1$ (茲に q_1 は下流無限遠の速度とする)

AB, CD で $\theta = 0$

PE で $\theta = \pi - \alpha$ (茲に平板の迎角を α とする)

PF で $\theta = -\alpha$

と言う場合に、境界に於ける $F(t)$ の実数部又は虚数部の値が判つて居る。之を知つて解析函数 $F(t)$ を求める問題を混合調和問題と言い、Demtchenko 等が研究して居るものである。これは附録 I の様にして求まるのである。又別に Villat の公式を利用して解く事も出来るので、之を附録 I' に掲げて置いた。此の際 Weierstrass の楕円函数を使う必要がある。即ち

$$t = \wp(u)$$

と置き換え、 E, B, D 及び F を夫々 $0, -\omega_3, \omega_1 - \omega_3$ 及び ω_1 に対応せしめると第 4 図の様になる。茲に $2\omega_1$ 及び $2\omega_3$ は夫々 $\wp$ 函数の二つの週期で、前者は実数、後者は純虚数である様に選ぶ。(我々の場合は附録 I に於て述べる如く、更に $\omega_1 > 0, \omega_3/i > 0$ である)。 u 平面に於て P 及び A, C の対応する点を夫々 a 及び $b - \omega_3$ と置けば

$$w_1 > a > 0, \quad w_1 > b > 0$$

である。 $F(u)$ は附録 I 又は附録 I' に依つて次の様に求められる。

$$F(u) = i \left\{ \log q_1 + \log \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u+a)} + \frac{\alpha}{\pi} 2\eta_1 u + ai \right\} \quad \dots\dots\dots(6)$$

故に

$$\frac{dz}{dw} = e^{iF(u)} = \frac{1}{q_1} \frac{\sigma(u+a)}{\sigma(u-a)} e^{-\frac{2\alpha}{\pi} \eta_1 u - ai} \quad \dots\dots\dots(7)$$

次に w を計算すれば附録 II に依り

$$\frac{dw}{du} = c \frac{\sigma(u+a)\sigma(u-a)\sigma(2u)e^{2u\cdot 3\eta_3 - \eta_1}}{\sigma(u+b+\omega_3)\sigma(u-b+\omega_3)\sigma^2(u-\omega_1+\omega_3)\sigma^2(u+\omega_3)} \quad \dots\dots\dots(8)$$

上流無限遠に於ける流速 q_0 は与えられて居る。今の場合 $q_0 = 1$ とすれば、上流無限遠に於ては $\theta = 0$ であるから(7)式に於て

$$u = b - \omega_3 \text{ の時 } \frac{dz}{dw} = \frac{1}{q} e^{i\theta} = 1$$

でなければならない。之から q_1 を求めれば附録 III に依つて

$$q_1 = \frac{\sigma_3(a+b)}{\sigma_3(-a+b)} e^{-\frac{2\alpha}{\pi} b\eta_1} \quad \dots\dots\dots(9)$$

(7), (8) 両式の両辺を掛合せて之に(9)式を代入すれば

註(1) 速度 x, y の方向の成分を夫々 u, v とすれば

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy = (u - iv)(dx + i dy) = (u - iv) dz$$

$$\therefore \frac{dw}{dz} = u - iv = qe^{-i\theta}$$

Demtchenko は $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ と Lamb の著書等とは符号を変えて居るが本論文では前者の符号に従つた。即ち

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

とする。

$$\begin{aligned}\frac{dz}{du} &= c \frac{1}{q_1} \frac{\sigma^2(u+a)\sigma(2u)e^{2u(3\eta_3-\eta_1)-\frac{2u}{\pi}\eta_1\alpha-\alpha i}}{\sigma(u+b+\omega_3)\sigma(u-b+\omega_3)\sigma^2(u-\omega_1+\omega_3)\sigma^2(u+\omega_3)} \\ &= c \frac{\sigma_3(-a+b)\sigma^2(u+a)\sigma(2u)e^{2u(3\eta_3-\eta_1)-\frac{\alpha}{\pi}\eta_1-\alpha i+\frac{2\alpha}{\pi}b\eta_1}}{\sigma_3(a+b)\sigma(u+b+\omega_3)\sigma(u-b+\omega_3)\sigma^2(u-\omega_1+\omega_3)\sigma^2(u+\omega_3)}\end{aligned}$$

常数を総て c の中に含ましめると

$$\frac{dz}{du} = c \cdot \frac{\sigma^2(u+a)\sigma(2u)e^{2u(3\eta_3-\eta_1)-\frac{\alpha}{\pi}\eta_1}}{\sigma(u+b+\omega_3)\sigma(u-b+\omega_3)\sigma^2(u+\omega_3)\sigma^2(u-\omega_1+\omega_3)} \dots\dots\dots(10)$$

5. $\frac{dz}{du}$ の積分

(10) 式を積分する為に先ずその右辺を因数に分解する。

$$A(u) = \frac{\sigma(u+2a)}{\sigma(u)\sigma(2a)} e^{-\frac{2a}{\omega_1}\eta_1 u}$$

と置けば、附録 IV の様に計算して

$$\frac{dz}{du} = c\{c_1 A(u+b+\omega_3) + c_2 A(u-b+\omega_3) + c_3 A(u+\omega_3) + c_4 A(u-\omega_1+\omega_3)\} \dots\dots\dots(11)$$

となる。但し c_1, c_2, c_3 及び c_4 は

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \vartheta_0^2 \left(\frac{a-b}{2\omega_1} \right) \vartheta_2^2 & c_2 &= \vartheta_0^2 \left(\frac{a+b}{2\omega_1} \right) \vartheta_2^2 \\ c_3 &= -2\vartheta_0^2 \left(\frac{a}{2\omega_1} \right) \vartheta_2^2 \left(\frac{b}{2\omega_1} \right) & c_4 &= -2\vartheta_3^2 \left(\frac{a}{2\omega_1} \right) \vartheta_1^2 \left(\frac{b}{2\omega_1} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

で与えられ、又 (11) 式の c は (10) 式の c とは異つたものであり、実数になつて居る。〔註 (2)〕

$A(u)$ を ϑ 函数で表わすと級数に展開が可能で項別に積分が出来る (附録 V 参照)。即ち

$$u = 2\omega_1 v$$

と置けば

$$\begin{aligned}\int A(u) du &= \int A(v) 2\omega_1 dv & \text{〔註 (3)〕} \\ &= \log \sin \pi v + \pi \cot \alpha \cdot v - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n} \frac{q^{2n} \cos(2\pi n v + 2\alpha) - q^{4n} \cos 2\pi n v}{1 - 2q^{2n} \cos 2\alpha + q^{4n}} \dots\dots\dots(13)\end{aligned}$$

となり、更に $= B(v)$ と置けば (11) 式より

$$\frac{Z(v)}{c} = c_1 B\left(v + \frac{b+\omega_3}{2\omega_1}\right) + c_2 B\left(v + \frac{-b+\omega_3}{2\omega_1}\right) + c_3 B\left(v + \frac{\omega_3}{2\omega_1}\right) + c_4 B\left(v + \frac{-\omega_1+\omega_3}{2\omega_1}\right) \dots\dots\dots(14)$$

となつて、 Z が v 従つて u の函数として求められた事になる。

6. 常数の決定、 $1/D$ の計算

次に我々は常数 a, b, c 及び q をを決定せねばならない。上記の 4 個の常数に対して、与えられる条件は

1. 平面翼素の迎角 α
2. 平面翼素の長さ l
3. 平行壁間の距離 D
4. 平面翼素が平行壁の丁度中央に在る条件

の 4 個で同数である。

註 (2) 第 4 図の u 平面に於て、 u が AB, CD 上の値を採る時は $u = u' - \omega_2$ と置けば、 u' は実数である。 AB, CD は壁であるから対応する dz は矢張り実数で、 $du = du'$ から du も亦実数である。故に dz/du は実数である。次に a, b 及び ω_1 は実数であるから之等から成る ϑ 函数は実数であり、更に之等の ϑ 函数から成る c_1, c_2, c_3 及び c_4 は実数である。又 $A(u+b+\omega_3), A(u-b+\omega_3), A(u+\omega_3)$ 及び $A(u-\omega_1+\omega_3)$ の中の σ 函数は $u = u' - \omega_3$ であるから変数が総て実数となる故に実数であり、更に e の冪指数も η_1 及び u の値が実数である事から実数である事が判る。従つて (11) 式の両辺を比べて c が実数である事が判る。

註 (3) q は附録 IV に於て述べる如く、 ϑ 函数を計算する時に使用せられる数で $q = e^{2\pi i}$ 、 $\tau = \omega_3/\omega_1$ で定義せられる。問題に応じて ω_1 及び ω_3 は定まるから、 q は夫に依じて定まる。附録 I に述べる如く我々の場合は $\omega_1 > 0, \omega_3/i > 0$ であるから $\tau\pi i$ は負の実数で従つて q は 1 より小さい正の実数である。

常数 a は附録 I に於て述べる Demtchenko の所謂正則の条件

$$a\pi = \alpha\omega_1 \quad \dots\dots\dots (1\cdot13)$$

に依つて迎角 α に従つて決定せられる。

平面翼素の端 E 及び F は夫々 $u=0$ 及び ω_1 で表わされ、又両側の平行壁の位置を表わす点として AB の中点及び CD の中点を採れば、是等の点は夫々 $u = \frac{b}{2} - \omega_3$ 及び $\frac{b+\omega_1}{2} - \omega_3$ で表わされる故に

$$l e^{i(\pi-\alpha)} = Z(0) - Z(\omega_1) \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$D = \Im \left\{ Z\left(\frac{b}{2} - \omega_3\right) - Z\left(\frac{b+\omega_1}{2} - \omega_3\right) \right\} \quad \text{〔註 (4)]} \quad \dots\dots\dots (16)$$

平面翼素が平行壁の丁度中央に在る条件は

$$\Im \left\{ Z\left(\frac{b}{2} - \omega_3\right) + Z\left(\frac{b+\omega_1}{2} - \omega_3\right) - Z(0) - Z(\omega_1) \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

我々の場合は l と D とはその比が与えられさえすれば宜いのであるから、 c は定めないで置く。(14) 式の v に $\frac{0}{2\omega_1}$, $\frac{\omega_1}{2\omega_1}$ を代入して (15) 式に入れると

$$\begin{aligned} \frac{l e^{i(\pi-\alpha)}}{c} = & c_1 \left\{ B\left(\frac{b+\omega_3}{2\omega_1}\right) - B\left(\frac{b+\omega_1+\omega_3}{2\omega_1}\right) \right\} + c_2 \left\{ \left(B\left(\frac{-b+\omega_3}{2\omega_1}\right) - B\left(\frac{-b+\omega_1+\omega_3}{2\omega_1}\right) \right) \right. \\ & \left. + c_3 \left\{ B\left(\frac{-\omega_3}{2\omega_1}\right) - B\left(\frac{\omega_1+\omega_3}{2\omega_1}\right) \right\} + c_4 \left\{ B\left(\frac{-\omega_1+\omega_3}{2\omega_1}\right) - B\left(\frac{\omega_3}{2\omega_1}\right) \right\} \right\} \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\text{茲で } b\pi = \theta\omega_1 \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{it}{\pi} \quad \dots\dots\dots (20)$$

と置く。(20) 式から直ちに $t > 0$, 且つ

$$q = e^{i\pi\tau} = e^{\frac{i\pi\omega_3}{\omega_1}} = e^{-t}$$

を得。是等を使つて (18) 式を計算すれば (附録 VI 参照)

$$\begin{aligned} \frac{l}{c} e^{-i\alpha} = & \frac{1}{2} (c_1 + c_2) \log \frac{1+2q \cos \theta + q^2}{1-2q \cos \theta + q^2} + (c_3 - c_4) \log \frac{1+q}{1-q} \\ & + \frac{\pi}{2} (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) \cot \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} q^{2n+1} (1+q^{4n+2}) M_{2n+1} \\ & - i \left\{ \frac{\pi}{2} (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) + (c_2 - c_1) \delta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} q^{2n+1} (1-q^{4n+2}) N_{2n+1} \right\} \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

両辺の実数部及び虚数部を夫々等しいと置けば

$$\begin{aligned} \frac{l}{c} \cos \alpha = & \frac{1}{2} (c_1 + c_2) \log \frac{1+2q \cos \theta + q^2}{1-2q \cos \theta + q^2} + (c_3 - c_4) \log \frac{1+q}{1-q} \\ & + \frac{\pi}{2} (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) \cot \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} q^{2n+1} (1+q^{4n+2}) M_{2n+1} \quad \dots\dots\dots (21') \end{aligned}$$

$$\frac{l}{c} \sin \alpha = \frac{\pi}{2} (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) + (c_2 - c_1) \delta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} q^{2n+1} (1-q^{4n+2}) N_{2n+1} \quad \dots\dots\dots (21'')$$

茲に

$$\tan \delta = \frac{2q}{1-q^2} \sin \theta \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$M_{2n+1} = \frac{c_1 \cos(2n+1)\theta + 2\alpha + c_2 \cos(-2n+1)\theta + 2\alpha + (c_3 - c_4) \cos 2\alpha - q^{4n+2} \{ (c_1 + c_2) \cos(2n+1)\theta + (c_3 - c_4) \}}{1 - 2q^{4n+2} \cos 2\alpha + q^{8n+4}} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$N_{2n+1} = \frac{c_1 \sin(2n+1)\theta + 2\alpha + c_2 \sin(-2n+1)\theta + 2\alpha + (c_3 - c_4) \sin 2\alpha - q^{4n+2} (c_1 - c_2) \sin(2n+1)\theta}{1 - 2q^{4n+2} \cos 2\alpha + q^{8n+4}} \quad \dots\dots\dots (24)$$

次に D を計算すると附録 VII の様にして

$$D = c c_2 \pi \quad \dots\dots\dots (25)$$

註 (4) $\frac{b}{2} - \omega_3$ 及び $\frac{b+\omega_1}{2} - \omega_3$ は夫々 AB 及び CD 上の一点を表わすから $Z\left(\frac{b}{2} - \omega_3\right) - Z\left(\frac{b+\omega_1}{2} - \omega_3\right)$ の実数部は如何なる数になるか判らないが、その虚数部は平行壁間の距離を表わすのである。

更に平面翼素が平行壁の丁度中央に在る条件 (17) 式から附録 VIII の様に計算して次式を得る。

$$(c_1 - c_2)\gamma + \frac{\pi}{2}(c_3 - c_4) + \log \frac{1}{q} \cot \alpha (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} q^{2n} (1 - q^{4n}) L_{2n} = 0 \quad (26)$$

但し茲に

$$L_{2n} = \frac{c_1 \sin(2n\theta + 2\alpha) + c_2 \sin(-2n\theta + 2\alpha) + (c_3 + c_4) \sin 2\alpha - q^{4n} (c_1 - c_2) \sin 2n\theta}{1 - 2q^{4n} \cos 2\alpha + q^{8n}} \quad (27)$$

$$\tan \gamma = \frac{1 - q^2}{1 + q^2} \frac{1}{\tan \theta} \quad (28)$$

とする。

以上で l/D の計算が可能になったわけである。即ち迎角 α が与えられた時、先ず q に 1 よりも小さい任意の一定正值を与えて (26) 式を満足する様な θ を求め、この q と θ とを (21') 式若しくは (21'') 式に代入して l/c を計算する。更に此の l/c と (25) 式とを組合せると結局その q に対する l/D の値が求まるのである。

7. 揚力及び抗力の計算、壁面の無い場合との比較

第 4 章に於て定めた如く、平面翼素が静止して居るとし、上流及び下流無限遠に於ける流速を夫々 q_0 及び q_1 とする。下流無限遠の Z 平面を描けば第 5 図の様になる。 AB 側及び CD 側の流体部分の幅を夫々 d_1 及び d_2 とし、 $d = d_1 + d_2$ と置けば空洞部分の幅は $D - d$ である。今全体に $-q_0$ なる速度を附加して考えると、平面翼素は $-q_0$ で移動し、流体は上流無限遠では静止し、下流無限遠では $q_1 - q_0$ で右方に流れ出る。その量は単位時間に $q_0 D$ である。これ丈の量の流体が $q_1 - q_0$ の速度を得る訳である。故に平面翼素の受ける抵抗力を R と置けば、単位時間に Rq_0 だけの仕事をすれば $q_0 D$ の流体が $q_1 - q_0$ だけの速度を得る事になる。故に ρ を流体の密度とすれば

$$Rq_0 = \frac{\rho}{2} q_0 D (q_1 - q_0)^2$$

抗力係数を c_w とすれば

$$c_w = \frac{R}{\frac{\rho}{2} q_0^2 l} = \frac{(q_1 - q_0)^2}{q_0^2 \frac{l}{D}} = \frac{\left(\frac{q_1}{q_0} - 1\right)^2}{\frac{l}{D}} \quad (29)$$

第 4 章に於けると同様 $q_0 = 1$ と置き (9) 式から q_1 を計算すれば

$$\frac{q_1}{q_0} = q_1 = e^{-\frac{2\alpha}{\pi} \eta_1} \frac{\sigma_3(a+b)}{\sigma_3(-a+b)} = \frac{\vartheta_0 \left(\frac{\theta+\alpha}{2\pi}\right)}{\vartheta_0 \left(\frac{\theta-\alpha}{2\pi}\right)} \quad [\text{註(5)}] \quad (30)$$

註 (5) σ_3 函数を ϑ 函数に依つて表わす関係式は

$$\sigma_3(u) = \frac{\vartheta_0 \left(\frac{u}{2\omega_1}\right)}{\vartheta_0} e^{2\eta_1 \omega_1 \left(\frac{u}{2\omega_1}\right)^2}$$

であるから

$$\frac{\sigma_3(a+b)}{\sigma_3(-a+b)} = \frac{\vartheta_0 \left(\frac{a+b}{2\omega_1}\right)}{\vartheta_0 \left(\frac{-a+b}{2\omega_1}\right)} e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1} \{(a+b)^2 - (-a+b)^2\}} = \frac{\vartheta_0 \left(\frac{a+b}{2\omega_1}\right)}{\vartheta_0 \left(\frac{-a+b}{2\omega_1}\right)} e^{\frac{2ab}{\omega_1} \eta_1}$$

(1.13), (19) 両式から $\frac{a}{\omega_1} = \frac{\alpha}{\pi}$, $\frac{b}{\omega_1} = \frac{\theta}{\pi}$ を使つて

$$\frac{\sigma_3(a+b)}{\sigma_3(-a+b)} = \frac{\vartheta_0 \left(\frac{\theta+\alpha}{2\pi}\right)}{\vartheta_0 \left(\frac{\theta-\alpha}{2\pi}\right)} e^{\frac{2\alpha}{\pi} \eta_1}$$

故に

$$e^{-\frac{2\alpha}{\pi} \eta_1} \frac{\sigma_3(a+b)}{\sigma_3(-a+b)} = \frac{\vartheta_0 \left(\frac{\theta+\alpha}{2\pi}\right)}{\vartheta_0 \left(\frac{\theta-\alpha}{2\pi}\right)} \quad (30)$$

次に平行壁が無い場合の抵抗及び抗力係数を夫々 R_0 及び c_{w0} とすれば Helmholtz-Kirchhoff の式に依つて

$$c_{w0} = \frac{R_0}{\frac{\rho}{2} q_0^2 l} = \frac{2\pi \sin^2 \alpha}{4 + \pi \sin^2 \alpha} \dots\dots\dots (31)$$

(29) 式及び (31) 式から $\frac{c_w}{c_{w0}}$ 即ち $\frac{R}{R_0}$ を求め之を m と置けば (30) 式を利用して

$$m = \frac{c_w}{c_{w0}} = \frac{R}{R_0} = \frac{4 + \pi \sin^2 \alpha}{2\pi \sin^2 \alpha} \frac{\left\{ \vartheta_0 \left(\frac{\theta + \alpha}{2\pi} \right) - 1 \right\}^2}{\frac{l}{D}} \dots\dots\dots (32)$$

更に我々の場合は安全流体の全面的空洞発生状態を考えて居るから、平行壁のある場合と無い場合との揚力及び揚力係数を夫々 L , L_0 及び c_a , c_{a0} とすれば、

$$\left. \begin{aligned} L &= R \cot \alpha \\ L_0 &= R_0 \cot \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

従つて

$$\frac{c_a}{c_{a0}} = \frac{L}{L_0} = \frac{c_w}{c_{w0}} = \frac{R}{R_0} = m \dots\dots\dots (34)$$

以上で $\frac{c_w}{c_{w0}}$ 又は $\frac{c_a}{c_{a0}}$ の計算が可能になつたわけである。即ち前章で l/D を計算した時と同じ q 及び θ の値を (32) 式に入れて計算すれば、その l/D に対する側壁影響係数 m 即ち c_w/c_{w0} 又は c_a/c_{a0} の値が求まるのである。

8. 数 値 計 算

数値計算は迎角 $\alpha = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ$ 及び 90° に対して行つた。

(i) $\alpha = 5^\circ, 10^\circ$

計算過程並びにその結果は第1表及び第2表に掲げてある通りである。即ち先ず q に 1 よりも小さい任意の正值を与え、 θ を適当に仮定して (26) 式に入れてその左辺を計算する。 θ の微小変化に対しては (26) 式の左辺の値は全く直線的に変化するから、内挿法或は外挿法に依つて、丁度 (26) 式を満足する θ の値が求められる。その際 c_1, c_2, c_3 及び c_4 は (12) 式の ϑ 函数を級数に展開して求める。即ち (12) 式の a, b の代りに α, θ を使つて書直せば

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \vartheta_0^2 \left(\frac{\theta - \alpha}{2\pi} \right) \vartheta_2^2 \\ c_2 &= \vartheta_0^2 \left(\frac{\theta + \alpha}{2\pi} \right) \vartheta_2^2 \\ c_3 &= -2\vartheta_0^2 \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) \vartheta_2^2 \left(\frac{\theta}{2\pi} \right) \\ c_4 &= -2\vartheta_3^2 \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) \vartheta_1^2 \left(\frac{\theta}{2\pi} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12')$$

所が ϑ 函数の所謂加法公式に依れば (参考文献 (3) 163 頁)

$$\vartheta_0^2 \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) \vartheta_2^2 \left(\frac{\theta}{2\pi} \right) + \vartheta_3^2 \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) \vartheta_1^2 \left(\frac{\theta}{2\pi} \right) = \vartheta_2^2 \vartheta_0 \left(\frac{\theta + \alpha}{2\pi} \right) \vartheta_0 \left(\frac{\theta - \alpha}{2\pi} \right)$$

であるから

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = \vartheta_2^2 \left\{ \vartheta_0 \left(\frac{\theta + \alpha}{2\pi} \right) - \vartheta_0 \left(\frac{\theta - \alpha}{2\pi} \right) \right\}^2 \dots\dots\dots (12'')$$

$c_1 + c_2 + c_3 + c_4$ は小さい値であり、之には $\frac{\pi}{2} \cot \alpha$ と言う α が小さい時には可成り大きくなる値が乗ぜられるので、(12') 式で求めたものを加へ合した値を使用せずに (12'') 式に依つて計算した値を用いる事にする。(12') 式及び (12'') 式中の ϑ 函数は次の級数で計算される。

$$\left. \begin{aligned}
 \vartheta_0\left(\frac{\theta-\alpha}{2\pi}\right) &= 1 - 2q \cos(\theta-\alpha) + 2q^4 \cos 2(\theta-\alpha) - 2q^9 \cos 3(\theta-\alpha) + 2q^{16} \cos 4(\theta-\alpha) - \dots \\
 \vartheta_0\left(\frac{\theta+\alpha}{2\pi}\right) &= 1 - 2q \cos(\theta+\alpha) + 2q^4 \cos 2(\theta+\alpha) - 2q^9 \cos 3(\theta+\alpha) + 2q^{16} \cos 4(\theta+\alpha) - \dots \\
 \vartheta_0\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) &= 1 - 2q \cos \alpha + 2q^4 \cos 2\alpha - 2q^9 \cos 3\alpha + 2q^{16} \cos 4\alpha - \dots \\
 \vartheta_1\left(\frac{\theta}{2\pi}\right) &= 2q^{\frac{1}{4}} \left(\sin \frac{\theta}{2} - q^2 \sin \frac{3}{2}\theta + q^6 \sin \frac{5}{2}\theta - q^{12} \sin \frac{7}{2}\theta + \dots \right) \\
 \vartheta_2 &= 2q^{\frac{1}{4}} (1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \dots) \\
 \vartheta_2\left(\frac{\theta}{2\pi}\right) &= 2q^{\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{\theta}{2} + q^2 \cos \frac{3}{2}\theta + q^6 \cos \frac{5}{2}\theta + q^{12} \cos \frac{7}{2}\theta + \dots \right) \\
 \vartheta_3\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) &= 1 + 2q \cos \alpha + 2q^4 \cos 2\alpha + 2q^9 \cos 3\alpha + 2q^{16} \cos 4\alpha + \dots
 \end{aligned} \right\} \dots (35)$$

但し数値計算の実施に当つては ϑ_1 函数及び ϑ_2 函数に共通な係数 $2q^{\frac{1}{4}}$ は総て c の中に含める事とし、之を除いた級数を以て計算を行つた。

(ii) $\alpha=0^\circ$

計算過程並びにその結果は第 3 表に掲げてある通りである。 $\alpha \rightarrow 0^\circ$ とする時には当然 $c_w \rightarrow 0$, $c_{w_0} \rightarrow 0$ となるのであるが c_w/c_{w_0} は有限でしかも 1 より大きい値になる。

$\alpha=0$ とすれば (12') 式及び (12'') 式より

$$c_1 = c_2, \quad c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

之を (26) 式に代入すれば

$$(c_1 - c_2)\gamma = 0, \quad \log \frac{1}{q} \cot \alpha (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) = 0, \quad L_{2n} = 0$$

故に (26) 式の残りの項 $-\frac{\pi}{2}(c_3 - c_4) = 0$

従つて $c_3 = c_4 (= -c_1)$ となる。此の c_3 及び c_4 に (12') 代入し、更に (35) 式を用うれば

$$\begin{aligned}
 &\cos \frac{\theta}{2} + q^2 \cos \frac{3}{2}\theta + q^6 \cos \frac{5}{2}\theta + \dots - \frac{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots} \\
 &\left(\sin \frac{\theta}{2} - q^2 \sin \frac{3}{2}\theta + q^6 \sin \frac{5}{2}\theta - \dots \right) = 0 \quad \dots (36)
 \end{aligned}$$

又 (23) 式若くは (6.12) 式に於て

$$M_{2n+1} = \frac{2c_1 \cos(2n+1)\theta}{1 - q^{4n+2}}$$

となるから

$$\begin{aligned}
 S = \log &\frac{1 + 2q \cos \theta + q^2}{1 - 2q \cos \theta + q^2} + 4q \cos \theta \frac{1 + q^2}{1 - q^2} + \frac{4}{3} q^3 \cos 3\theta \frac{1 + q^6}{1 - q^6} \\
 &+ \frac{4}{5} q^5 \cos 5\theta \frac{1 + q^{10}}{1 - q^{10}} + \frac{4}{7} q^7 \cos 7\theta \frac{1 + q^{14}}{1 - q^{14}} + \dots \quad \dots (37)
 \end{aligned}$$

と置けば (21') 式より $\frac{l}{c} = c_1 S$

更に (25) 式より

$$\frac{l}{D} = \frac{S}{\pi} \quad \dots (38)$$

故に附録 IX の様に計算して

$$m = \frac{c_w}{c_{w_0}} = \frac{c_a}{c_{a_0}} = \frac{32q^2 \sin^2 \theta}{S} \left\{ \frac{1 - 4q^3 \cos \theta + 3q^8(3 - 4 \sin^2 \theta) + \dots}{1 - 2q \cos \theta + 2q^4 \cos 2\theta - 2q^9 \cos 3\theta + \dots} \right\}^2 \quad \dots (39)$$

を得。

(iii) $\alpha=90^\circ$

計算過程並びに其の結果は第 4 表に掲げてある通である。

(26) 式に於て $\alpha = \frac{\pi}{2}$ と置けば

$$(c_1 - c_2)\gamma + \frac{\pi}{2}(c_3 - c_4) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} q^{2n} \frac{1 - q^{4n}}{1 + q^{4n}} (c_2 - c_1) \sin 2n\theta = 0$$

又 $c_3 - c_4$ を計算すれば

$$c_3 - c_4 = -8q^{\frac{1}{2}}(1 - 2q^4 + 2q^{16} - \dots)^2 \\ \left\{ \left(\cos \frac{\theta}{2} + q^2 \cos \frac{3}{2}\theta + q^6 \cos \frac{5}{2}\theta + \dots \right)^2 - \left(\sin \frac{\theta}{2} + q^2 \sin \frac{3}{2}\theta + q^6 \sin \frac{5}{2}\theta + \dots \right)^2 \right\}$$

故に $\theta = \frac{\pi}{2}$ とすれば (26) 式が満足せられる事が判る。従つて $\alpha = \theta = \frac{\pi}{2}$ を (12') 及び (12'') 式に代入して

c_1, c_2, c_3 及び c_4 等を計算すれば

$$c_1 = (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \dots)^2 (1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \dots)^2 \\ c_2 = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \dots)^2 (1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \dots)^2 \dots \dots \dots (40)$$

$$c_3 = c_4 = -(1 - 2q + 2q^4 - \dots)^2 (1 - q^2 - q^6 + q^{12} + \dots)^2 \\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 16q^2(1 + q^8 + \dots)^2 (1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \dots)^2 \dots \dots \dots (41)$$

を得る。従つて

$$c_2 - c_1 = 8q(1 + q^8 + \dots)(1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots)(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \dots) \dots \dots \dots (42)$$

又 (22) 式に $\theta = \frac{\pi}{2}$ を代入して

$$\tan \delta = \frac{2q}{1 - q^2} \dots \dots \dots (43)$$

之等を (21'') 式に代入すると

$$\frac{l}{c} = \frac{\pi}{2} (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) + (c_2 - c_1)\delta + (c_2 - c_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} q^{2n+1} \frac{1 - q^{4n+2}}{1 + q^{4n+2}} \sin (2n+1) \frac{\pi}{2} \\ = \frac{\pi}{2} (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) + (c_2 - c_1) \left\{ \delta + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{2n+1} q^{2n+1} \frac{1 - q^{4n+2}}{1 + q^{4n+2}} \right\} \\ = \frac{\pi}{2} (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) + (c_2 - c_1) \left(\delta + 2q \frac{1 - q^2}{1 + q^2} - \frac{2}{3} q^3 \frac{1 - q^6}{1 + q^6} + \frac{2}{5} q^5 \frac{1 - q^{10}}{1 + q^{10}} - \frac{2}{7} q^7 \frac{1 - q^{14}}{1 + q^{14}} + \dots \right) \dots \dots \dots (44)$$

又 (30) 式より

$$\frac{q_1}{q_0} - 1 = q_1 - q_0 = \frac{\vartheta_0 \left(\frac{1}{2} \right)}{\vartheta_0} - 1 = 4q \frac{1 + q^8 + \dots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots} \dots \dots \dots (45)$$

(31) 式より

$$c_{w0} = \frac{R_0}{\frac{\rho}{2} q_0^2 l} = \frac{2\pi}{4 + \pi} = 0.8798 \dots \dots \dots (46)$$

を得る。

第 1 表乃至第 5 表の結果を図示すれば第 6 図の様になる。

9. 連続流との比較, l/D が小なる場合の近似式

本論文に於て取扱つたのと同様に、平面翼素が二つの平行壁の丁度中間に在る場合で、唯流れが連続流である場合に就ての、平面翼素の揚力に対する側壁の干渉の模様に関しては、緒論に於て述べた通り既に友近教授等に依つて解かれて居り、詳しい数値計算が行われて居る。(連続流の場合には申す迄も無く抗力は恒に零である) 今その結果のみを友近教授の論文(参考文献(5)の201頁)から引用させて戴くと第 7 図の通りである。(図中の記号は、比較の便宜上本論文で使用のものと一致させてある) 第 6 図と比べて見て、流れが不連続流の場合は連続流の場合よりも側壁の干渉の影響が極めて著しい許りでなく、曲線の傾向が全く異つて居る事が判る。

(21') 式から直に判る様に、 l/D が極めて小さくなる時は q が従つて極めて小さくなる時である。 q に対して q^2 以上の累を省略し得る様な場合を考えると、(26) 式から容易に

$$c_3 = c_4 \dots \dots \dots (47)$$

を得る(12') 式の c_3 及び c_4 を (35) 式に依つて q の冪級数に展開すれば

$$\left. \begin{aligned} c_3 &= -(1+\cos\theta) + 4q \cos\alpha(1+\cos\theta) - 2q^2(1+\cos\theta)(1-2\cos\theta+2\cos^2\alpha) + 0(q^3) \\ c_4 &= -(1-\cos\theta) - 4q \cos\alpha(1-\cos\theta) + 2q^2(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta-2\cos^2\alpha) + 0(q^3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(48)$$

之等を (47) 式に代入すれば容易に

$$\cos\theta = 4q \cos\alpha - 2q^2 + 0(q^3) = 4q \cos\alpha + 0(q^3) \dots\dots\dots(49)$$

を得る。(12') 式の残り及び (13') 式を同様に (35) 式に依つて q の冪級数に展開し、之に (49) 式の関係を考慮すれば

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= 1 - 4q \sin\alpha + 2q^2(3-10\cos^2\alpha) + 0(q^3) \\ c_2 &= 1 + 4q \sin\alpha + 2q^2(3-10\cos^2\alpha) + 0(q^3) \\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= 16q^2 \sin^2\alpha + 0(q^4) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(50)$$

を得る。(49) 及び (50) 式を (21') 式の右边に代入すればその第 1 項は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(c_1+c_2) \log \frac{1+2q \cos\theta+q^2}{1-2q \cos\theta+q^2} &= \{1+2q^2(3-10\cos^2\alpha)\} \log \frac{1+q^2(1+8\cos\alpha)}{1+q^2(1-8\cos\alpha)} \\ &= \{1+2q^2(3-10\cos^2\alpha)\} \log(1+16q^2 \cos\alpha) \\ &= \{1+2q^2(3-10\cos^2\alpha)\} (16q^2 \cos\alpha - 128q^4 \cos^2\alpha + \dots\dots) \\ &= 16q^2 \cos\alpha + 0(q^4) \end{aligned}$$

第 2 項は零となり、第 3 項は

$$\frac{\pi}{2}(c_1+c_2+c_3+c_4) \cot\alpha = 8\pi q^2 \sin\alpha \cos\alpha + \dots + 0(q^4)$$

となる。 Σ の項では $n=0$ の場合のみが考慮せられ

$$\begin{aligned} 2qM_1 &= 2q[\{1-4q \sin\alpha + 2q^2(3-10\cos^2\alpha)\} \cos(\theta+2\alpha) \\ &\quad + \{1+4q \sin\alpha + 2q^2(3-10\cos^2\alpha)\} \cos(-\theta+2\alpha)] \\ &= 16q^2 \cos\alpha + 0(q^4) \end{aligned}$$

となる。之等を (21') 式の右边に入れると次式を得る。

$$\frac{l}{c} = 16q^2 + 8\pi q^2 \sin\alpha + 16q^2 = 8q^2(4 + \pi \sin\alpha)$$

$$\text{故に} \quad \frac{l}{D} = \frac{l}{c} \times \frac{1}{\pi c_2} = \frac{8}{\pi} q^2 \frac{4 + \pi \sin\alpha}{1 + 4q \sin\alpha} \dots\dots\dots(51)$$

$$\text{又} \quad \frac{q_1}{q_0} - 1 = \frac{\vartheta_0\left(\frac{\theta+\alpha}{2\pi}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\theta-\alpha}{2\pi}\right)} - 1 = \frac{1+2q \sin\alpha - 8q^2 \cos^2\alpha + 0(q^4)}{1-2q \sin\alpha - 8q^2 \cos^2\alpha + 0(q^4)} - 1 = \frac{4q \sin\alpha}{1-2q \sin\alpha + 0(q^2)}$$

従つて

$$c_w = \frac{R}{\frac{\rho}{2} q_0^2 l} = \frac{\left(\frac{q_1}{q_0} - 1\right)^2}{\frac{l}{D}} = \frac{2\pi \sin^2\alpha}{4 + \pi \sin\alpha} \frac{1 + 4q \sin\alpha}{1 - 4q \sin\alpha} = c_{w_0}(1 + 8q \sin\alpha) \dots\dots\dots(52)$$

平面翼素の長さ l を一定に保ちつつ壁間距離 $D \rightarrow \infty$ にする事は $q \rightarrow 0$ にする事に対応する。そこで (52) 式に於て $q \rightarrow 0$ ならしめた極限を考えると

$$\lim_{D \rightarrow \infty} c_w = \lim_{q \rightarrow 0} c_w = c_{w_0}$$

となつて、我々の考えた問題の $D \rightarrow \infty$ なる極限值として、周知の Helmholtz-Kirchhoff の式が得られる。

更に迎角 α が小さい時には (51) 式から

$$q = \sqrt{\frac{\pi}{32} \frac{l}{D}}$$

を得る。之を (52) 式に代入すると、近似式として次式を得る。

$$m = \frac{c_w}{c_{w_0}} = 1 + 8 \sin\alpha \sqrt{\frac{\pi}{32} \frac{l}{D}} = 1 + 2.5 \sin\alpha \sqrt{\frac{l}{D}} \dots\dots\dots(53)$$

即ち $\alpha=0$ の場合を除き、 α が小さい場合には l/D が極く小さい範囲内では

$$\frac{c_w}{c_{w0}} - 1 \propto \sqrt{\frac{l}{D}}$$

である。前述の友近教授の論文に拠れば、連続流の同様の場合には

$$\frac{c_a}{c_{a0}} - 1 \propto \left(\frac{l}{D}\right)^2 \quad \text{〔註(6)〕}$$

となつて居る。以上の比較からも、不連続流の場合の方が側壁の影響が極めて著しい事が判る。

尙、(53)式に示した近似式は、形を簡単ならしめる為にその誘導の経過に於て可成り多くの省略を行つて居るので、近似度が低い点は遺憾乍ら已むを得ないと思う。

第二篇 全面的空洞発生状態への應用

10. 飽和蒸氣圧に関する補正

第一編の各章に於ては、平面翼素の背面即ち空洞部分の圧力 p_1 は

$$p_1 = p_0 - \frac{\rho}{2}(q_1^2 - q_0^2) \dots\dots\dots (54)$$

として居る（茲に p_0 は上流無限遠の圧力とする）。然るに我々の場合には空洞部分の圧力は、実験状態に於ける水温に対する水の飽和蒸氣圧 p_d （常温に於ては $p_d \approx 0.02 \text{ kg/cm}^2$ 程度と考えてよい）を採らなければならない。従つて c_{w0} , c_{a0} 及び c_w , c_a に対して、夫々 $p_0 - p_d$ 及び $p_1 - p_d$ に相当する丈の補正を施さなければならない。

先ず揚力に対する蒸氣圧補正を考えると、之を厳密に考えると極めて困難になるから、概略値として、揚力 L_0 及び L に夫々 $l(p_0 - p_d) \cos \alpha$, 及び $l(p_1 - p_d) \cos \alpha$ 丈の余分な力が追加されるものとする。即ち c_{a0} 及び c_a に対して夫々

$$\frac{p_0 - p_d}{\frac{\rho}{2} q_0^2} \cos \alpha \quad \text{及び} \quad \frac{p_1 - p_d}{\frac{\rho}{2} q_0^2} \cos \alpha$$

丈の補正を加えればよい事になる。

今側壁の影響の無い場合の空洞指数（Cavitation number）、或は側壁の有る場合に上流無限遠の流れのみを考えた見掛けの空洞指数を k_0 とすれば

$$k_0 = \frac{p_0 - p_d}{\frac{\rho}{2} q_0^2} \dots\dots\dots (55)$$

で与えられる。即ち c_{a0} 及び c_a に対して蒸氣圧補正を施した値を夫々 c_{a0}' 及び c_a' とすると、先ず側壁の影響のない場合即ち c_{a0}' に対しては簡単に次式の様になる。

$$c_{a0}' = c_{a0} + k_0 \cos \alpha \dots\dots\dots (56)$$

更に α が小さい時には $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \alpha$ であるから

$$c_{a0}' \approx c_{a0} + k_0 \approx \frac{\pi}{2} \alpha + k_0 \dots\dots\dots (56')$$

となる。（以上は A. Betz の理論其儘である。）

次に側壁の有る場合、即ち c_a' に対しては少々複雑になる。第一編に於て求めた c_a/c_{a0} 又は c_w/c_{w0} の値 m を使用すれば

$$c_a' = c_a + \frac{p_1 - p_d}{\frac{\rho}{2} q_0^2} \cos \alpha = m c_{a0} + \frac{p_0 - p_d - \frac{\rho}{2}(q_1^2 - q_0^2)}{\frac{\rho}{2} q_0^2} \cos \alpha = m c_{a0} + \left(k_0 - 2 \frac{\Delta q}{q_0}\right) \cos \alpha$$

但し $\Delta q = q_1 - q_0$ とする。

註(6) 詳しく書けば

$$\frac{L}{L_0} = 1 + \frac{\pi^2}{24} (1 + \sin^2 \alpha) \left(\frac{l}{D}\right)^2 - \frac{\pi^4}{7680} (11 - 53 \sin^2 \alpha - 22 \sin^4 \alpha) \left(\frac{l}{D}\right)^4 + O\left\{\left(\frac{l}{D}\right)^6\right\}$$

となつて居る。（上式中の記号は本論文のものと一致せしめた）

今仮りに $-2\frac{\Delta q}{q_0}$ を空洞指数補正量と名付け

$$\Delta k = -2\frac{\Delta q}{q_0} \dots\dots\dots (57)$$

と置けば

$$c_{a'} = mc_{a_0} + (k_0 + \Delta k) \cos \alpha \dots\dots\dots (58)$$

従つて $m = \frac{c_a}{c_{a_0}}$ の代りに

$$m_{a'} = \frac{c_{a'}}{c_{a_0'}} = \frac{mc_{a_0} + (k_0 + \Delta k) \cos \alpha}{c_{a_0} + k_0 \cos \alpha} \dots\dots\dots (59)$$

なる式が蒸気圧修正を考慮した場合の揚力係数に対する側壁影響を与える。 α が小さい時には

$$m_{a'} = \frac{c_{a'}}{c_{a_0'}} = \frac{mc_{a_0} + (k_0 + \Delta k)}{c_{a_0} + k_0} = m - \frac{m-1 - \frac{\Delta k}{k_0}}{\frac{\pi}{2}\alpha + k_0} k_0 \dots\dots\dots (59')$$

次に抗力に対する蒸気圧補正を考えると、揚力の場合と全く同様にして

$$c_{w_0'} = c_{w_0} + k_0 \sin \alpha \dots\dots\dots (60)$$

α が小さい時に対しては

$$c_{w_0'} = c_{w_0} + k_0 \sin \alpha = \left(\frac{\pi}{2}\alpha + k_0 \right) \sin \alpha = c_{a_0'} \alpha \dots\dots\dots (60')$$

を得る。又 $c_{w'}$ に対しては

$$c_{w'} = mc_{w_0} + (k_0 + \Delta k) \sin \alpha \dots\dots\dots (61)$$

従つて

$$m_{w'} = \frac{c_{w'}}{c_{w_0'}} = \frac{mc_{w_0} + (k_0 + \Delta k) \sin \alpha}{c_{w_0} + k_0 \sin \alpha} = \frac{c_{a'}}{c_{a_0'}} = m_{a'} \dots\dots\dots (62)$$

となり、 α が小さい時には

$$m_{w'} = \frac{c_{w'}}{c_{w_0'}} = m - \frac{m-1 - \frac{\Delta k}{k_0}}{\frac{\pi}{2}\alpha + k_0} k_0 \dots\dots\dots (62')$$

を得る。

以上の諸式に使用した空洞指数補正量 $\Delta k = -2\frac{\Delta q}{q_0}$ は (30) 式より ϑ 函数を使つて計算する事が出来る。即ち

$$\Delta k = -2\frac{\Delta q}{q_0} = -2 \times \left(\frac{q_1}{q_0} - 1 \right) = -2 \times \left\{ \frac{\vartheta_0 \left(\frac{\theta + \alpha}{2\pi} \right)}{\vartheta_0 \left(\frac{\theta - \alpha}{2\pi} \right)} - 1 \right\} \dots\dots\dots (63)$$

此の値は第 1 表乃至第 4 表の欄から読み採る事が出来、之を図示すれば第 8 図の通である。即ち側壁の存在の為に空洞指数は見掛けの値より減少するわけである。この影響は極めて大きい。

11. 摩擦抵抗に関する補正

以上各章に於ては、流体は完全流体であると仮定したのであるが、実際には粘性が存在し、平面翼素の液体に接触して居る片面のみには粘性に基づく摩擦抵抗が作用する。故に之に対する補正も考える必要がある。所が此の摩擦抵抗をあらゆる α 及び l/D に対して厳密に求める事は、現在の所では殆ど不可能事に属するので、問題を α が小さい場合に限り、加之 l/D の値の如何に拘らず摩擦抵抗 R_f が側壁の影響の無い場合に対しては

$$R_{f_0} = f \cdot \frac{\rho}{2} q_0^2 l \dots\dots\dots (64)$$

で与えられ、側壁が有る場合には

$$R_f = f \cdot \frac{\rho}{2} \left\{ \frac{1}{2} (q_0 + q_1) \right\}^2 l \dots\dots\dots (65)$$

で与えられるとの粗い仮定を置く。この f は一種の摩擦抵抗係数であつて、その定値は定め難いが、大体 0.0036 程度であると見て大差ないと考えられる。する抗力係数に対する補正として、側壁の影響が無い場合に対しては、単に f だけ加えれば宜しい事になる。即ち前記蒸気圧補正と共に摩擦抵抗に関する補正をも施した抗力係数を、側壁が無い場合と有る場合とで夫々 c_{w_0}'' 及び c_{w_0}' とすれば、前者に対しては

$$c_{w_0}'' = c_{w_0}' + f = c_{w_0} + k_0 \sin \alpha + f = \left(\frac{\pi}{2} \alpha + k_0 \right) \alpha + f \quad \dots\dots\dots (66)$$

となる。後者に対しては (65) 式を変形して (63) 式を使うと、

$$R_f = f \cdot \frac{\rho}{2} q_0^2 l \left(1 + \frac{\Delta q}{q_0} \right) = f \cdot \frac{\rho}{2} q_0^2 l \left(1 - \frac{\Delta k}{2} \right) = R_{f_0} \left(1 - \frac{\Delta k}{2} \right)$$

となるから

$$c_w'' = c_w' + f \left(1 - \frac{\Delta k}{2} \right) = m c_{w_0} + (k_0 + \Delta k) \sin \alpha + f \left(1 - \frac{\Delta k}{2} \right) = \left(m \frac{\pi}{2} \alpha + k_0 + \Delta k \right) \alpha + f \left(1 - \frac{\Delta k}{2} \right) \quad \dots\dots\dots (67)$$

となる。即ち摩擦抵抗係数に対する補正率は、見掛けの空洞指数補正量の 1/2 であり然も符号が逆になつて居る。之を図示すれば第 8 図上半の通である。

又 $m_{w_0}'' = \frac{c_w''}{c_{w_0}''}$ を計算すれば次の如くになり、又恒に $m_{w_0}'' > m_{a'}$ である事も容易に証明せられる。

$$\begin{aligned} m_{w_0}'' = \frac{c_w''}{c_{w_0}''} &= m - \frac{\left(m - 1 - \frac{\Delta k}{k_0} \right) k_0 \sin \alpha + \left(m - 1 + \frac{\Delta k}{2} \right) f}{c_{w_0} + k_0 \sin \alpha + f} \\ &= m - \frac{\left(m - 1 - \frac{\Delta k}{k_0} \right) k_0 \alpha + \left(m - 1 + \frac{\Delta k}{2} \right) f}{\left(\frac{\pi}{2} \alpha + k_0 \right) \alpha + f} \quad \dots\dots\dots (68) \end{aligned}$$

特に $\alpha = 90^\circ$ 及び 0° の場合には、(68) 式は

$$\begin{cases} \alpha = 90^\circ \text{ の場合} \dots\dots\dots \frac{c_w''}{c_{w_0}''} = m - \frac{\left(m - 1 - \frac{\Delta k}{k_0} \right) k_0}{c_{w_0} + k_0} = m - \frac{\left(m - 1 - \frac{\Delta k}{k_0} \right) k_0}{0.8798 + k_0} \quad \dots\dots\dots (68') \\ \alpha = 0^\circ \text{ の場合} \dots\dots\dots \frac{c_w''}{c_{w_0}''} = 1 \quad \dots\dots\dots (68'') \end{cases}$$

となる ($\alpha = 0$ の時は (68) 式より恒に $\Delta k = 0$ である)。即ち $\alpha = 0$ の場合には、摩擦抵抗が有限な値を持つ限りその量が如何に小さく共、 c_w''/c_{w_0}'' は l/D の値の如何に関せず恒に 1 である。

最後に $c_{a'}$ 、 c_{w_0}'' 、 $m_{a'} = c_{a'}/c_{a_0'}$ 及び $m_{w_0}'' = c_w''/c_{w_0}''$ の四者が、見掛けの空洞指数 k_0 及び l/D の変化と共に、如何に変わるか、を上述の理論によつて計算し、迎角 $\alpha = 5^\circ$ の場合に就いて之を図示すれば第 9、10、11 及び 12 図の通である。同図中の空洞が発生しない状態に於ける $c_{a'}$ 及び c_{w_0}'' の値は、O. Walchner の翼厚比 0.0385 なる極めて薄い円弧型翼素に関する実験値 (参考文献 (6)) を基礎として、之から粗い仮定の下に算出した。即ち同実験は詳しくは判らないが多分 $l/D = 0.4$ 程度の翼素空洞試験水槽で行われたものであるらしいので、仮りに $l/D = 0.4$ とし、その時の $\alpha = 5^\circ$ に対する実験値は $c_a = 0.66$ 、 $c_w = 0.035$ となつて居るから、連続流の場合の側壁影響に関する友近教授の計算結果 (第 7 図) を其儘使つて、この値から他の l/D に対する c_a の値を推算したのである。但し c_w に対しては、連続流の場合には l/D の相違に対する修正の方法が判らないので、仮りに l/D の総ての値に対して一定値 $c_w = 0.035$ を採つて置いた。此の点に関しては未だ多くの疑問が残つて居る次第である。

第 9、10、11 及び 12 図を通覧して直ちに判明する事は次の諸事項である。

(i) l/D が大なる時程、全面的空洞の起り方が早い。換言すれば、翼弦長に比して側壁間の距離が小さい時程、見掛けの空洞指数の値が余り小さくならない内に、空洞が発生する。

(ii) 空洞現象が全面的に発生した状態に於ては、安全流体の二次元不連続流として求めた側壁影響及び摩擦抵抗に関する補正よりも、蒸気圧に関する補正の為に、見掛けの空洞指数を減少せしめる影響の方が遙に大きく効いて来る結果、側壁影響係数は 1 以下となり、且つ l/D の値が大きい時程、揚力係数及び抗力係数は共に小さくなる。

(iii) 抗力係数の最大値は、 l/D の値が大きい時程、その値が大きい。此の事は第 10 図からも既に明らかであるが、又次の様にも説明出来る。即ち空洞現象を発生しない状態に於ける或る l/D に対する揚力係数を c_{a0} 、同一 l/D に対する抗力係数の最大値を c_{wm}'' とすれば、容易に

$$c_{wm}'' = c_{a0} \tan \alpha + \left(1 - \frac{4k}{2}\right) f$$

なる事が導き出される。上式に於て c_{a0} 及び $-4k$ は l/D の値の増大と共に大きい値を採るものである。従つて c_{wm}'' は l/D と共に大きい値を採ることが知れる。

12. 結 論

以上、本論文に於ては、二つの平行壁の丁度中間に置かれ且つ全面的空洞現象を起した平面翼素に作用する揚力及び抗力の模様を明かにする目的を以て、先ず第一編に於て完全流体の二次元不連続流の問題として解いた。即ち Demtchenko の混合調和問題の解法に依り、又別解として Villat の公式を適用する事に依つて、平面翼素に作用する揚力及び抗力に対する一般解を求め、然る後に楕円函数を変形して行き、 ϑ 函数を使つて計算に便利な形に改め、迎角 $\alpha = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ$ 及び 90° の場合に対して詳しい数値計算を行つて、その結果を図示した。その結果は、壁の距離が翼弦長に比して相当に大きくても側壁影響は可成り大きく効いて来る事、並に空洞現象を全く起さない場合即ち流れが連続流と見做し得る様な場合の同様の結果と較べて、側壁の影響が格段に著しく且つその模様が全く相違して居る事が判つた。次いで第二編に於ては A. Betz の方法に倣つて上記の不連続ポテンシャル流と考えた場合の結果に対する補正に就て考察を加えた。即ち空洞部分の圧力を実験状態に於ける水温に対する水の飽和蒸気圧 p_d に改める為の補正、及び翼素に作用する摩擦抵抗の為の補正の二者に分けて考え、夫々に対する補正量を与える式を求め、簡単な楕円函数を含む数値計算を行つて結果を図示した。最後に上述の補正を行つた揚力係数及び抗力係数が、見掛けの空洞指数及び l/D の変化と共に、如何に変化するかを迎角 $\alpha = 5^\circ$ の場合に就いて計算してその結果を図示した。その結果は、第一編で求めた完全流体の二次元不連続流として解いた結果とは、模様が全く異つて居り、全面的空洞発生状態に於いては側壁影響は恒に 1 以下であつて l/D の値の増大と共に揚力及び抗力は共に減小して居る。

本論文の筆を擱くに當つて、面倒な数値計算の一部を熱心に援助して下さいた斎藤童子・河野米子両嬢に対して深く感謝の意を表したいと思う。

後 記

本論文を草し了つてホツとして居る時、日本航空学会誌 10 月号が配達せられて来た。そして其の中に偶々友近教授及び橋本講師が“後流を伴う平面翼の揚力及び抗力に対する地面効果 I.”と題して、本論文の前半と極めて関係が深い内容の論文を発表して居られるのを見出した。所謂後流と空洞とが、流体力学上或る程度迄殆んど同一に取扱ひ得るものである事は論を俟たない。そして同論文では平面翼の一方の側のみに壁がある場合に就て論じて居られるのであるが、等角写像の行い方や楕円函数の取扱ひ方等の諸点に於て、本論文と類似の個所が極めて多く、終始多大の興味と喜びとを以て拝見させて戴いた。本論文中の附録 I' に掲げた Villat の公式に依る別解は、実は同論文中の相当個所にヒントを得て、後で急いで書加えられたものである。茲に両著者に対して厚く謝意を表する次第である。(終)

昭和 18 年 12 月 (東京帝国大学第一工学部船舶工学科教室に於て)

参 考 文 献

- (1) 篠田仁吉：卒業論文“平行な壁の間に置かれた平板の不連続流について”(昭和 18 年 6 月)
- (2) B. Demtchenko：“Problèmes mixtes harmonique en hydrodynamique des fluides parfaits”(1933)
- (3) 友近 晋：楕円函数論(昭和 17 年)
- (4) 佐々木達治郎：等角写像の応用(昭和 14 年)
- (5) S. Tomotika：“The Lift on a Flat Plate placed in a stream between Two Parallel Walls and Some Allied Problems.” Report Aeron. Res. Inst., Tokyo Imp. Univ., No. 101 (1934). 157-227
- (6) O. Walchner：“Profilmessungen bei Kavitation.” G. Kempf u. E. Foerster：Hydromech. Prob. d. Schiffsantriebs. Teil I. 1932. 256-267
- (7) 海軍技術研究所造船研究部：空洞現象関係文献抄

- (8) 鬼頭史城：“全面的空洞を生ぜる翼素及翼列の性能に就て”造船協会雑纂第229号(昭和16年4月)
 (9) 同上：“翼素の空洞現象に及ぼす側壁の影響”(昭和18年2月)

附録 I. 混合調和問題の解法の適用

$F(t)$ は t 平面の実軸上でその虚数部又は実数部の値が知られて居る訳であるが、実数部の値が総て知られて居る場合のみ $F(t)$ は解き得るのである。そこで値の判つて居る虚数部を実数部に直す為に EB 及び DF で虚数になり其の他で実数になる様な或る函数を $F(t)$ に乗ずれば、新しく得られた函数は実軸上でその実数部の値が総て知られる事になる。斯様な函数は例えば

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}} \dots\dots\dots (1.1)$$

で与えられる事は直ちに了解される。 $F(t)T(t)$ は t 平面の実軸上でその実数部の値が $\theta \cdot T(t)$ 又は $i \log q \cdot T(t)$ の形で知られる。即ち $F(t)T(t)$ の実数部の値を実軸上で $C(t)T(t)$ とすれば

$$\begin{aligned} C(t) &= i \log q_1 \dots\dots\dots -\infty < t < e_3 \\ &= 0 \dots\dots\dots e_3 < t < e_2 \\ &= i \log q_1 \dots\dots\dots e_2 < t < e_1 \\ &= -\alpha \dots\dots\dots e_1 < t < t_1 \\ &= \pi - \alpha \dots\dots\dots t_1 < t < +\infty \end{aligned}$$

である。斯の如き $F(t)T(t)$ を実軸上の実数部の値 $C(t)T(t)$ によつて与える式は次の如くにして求められる。

原点を中心とし半径 R の半円 c を画き、Cauchy の定理を c と実軸とに依つて囲まれた変域に適用すると

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{+R} \frac{f(s)}{s-t} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(s)}{s-t} ds \dots\dots\dots (1.2)$$

無限遠に於ける $f(s)$ の値を f_0 とし、 $s = Re^{i\theta}$ の絶対値 R を無限大に増すと、(1.2) 式の第2項は

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(s)}{s-t} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \frac{f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}-t} iRe^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \frac{f(Re^{i\theta})}{1-\frac{t}{Re^{i\theta}}} id\theta = \frac{f_0}{2\pi i} \times i\pi = \frac{f_0}{2}$$

となる。故に (1.2) 式は

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s)}{s-t} ds + \frac{1}{2} f_0 \dots\dots\dots (1.3)$$

t の共軛数を $\bar{t}$ とすれば Cauchy の定理から

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s)}{s-\bar{t}} ds + \frac{1}{2} f_0 \dots\dots\dots (1.4)$$

各数に対して皆夫々の共軛数を探つても上記の関係は変わらないから、之を (1.4) 式に適用して次の (1.5) 式を得る。

$$0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{f}(s)}{s-\bar{t}} ds + \frac{1}{2} \bar{f}_0 \dots\dots\dots (1.5)$$

茲に $\bar{f}(s)$ 及び $\bar{f}_0$ は夫々 $f(s)$ 及び f_0 の共軛数である。(1.3) 式から (1.5) 式を引算すれば

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\varphi(s)}{s-t} ds + i\psi_0 = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{t-s} ds + i\psi_0 \dots\dots\dots (1.6)$$

但し茲に $\varphi(s)$ 及び $i\psi_0$ は夫々 $f(s)$ の実数部及び f_0 の虚数部とする。(1.6) 式に於て $f(t)$ の代りに先の $F(t)T(t)$ を考えれば、 $\varphi(s)$ は $C(s)T(s)$ に相当するものである。故に

$$F(t)T(t) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C(s)T(s)}{t-s} ds \dots\dots\dots (1.7)$$

但し (1.6) 式の第2項は虚数で実軸上に於ける $f(t)$ の実数部の値には影響を及ぼさないものであるから (1.7) 式に於ては之を省略した。(1.7) 式に (1.1) 式を代入して積分すればよいわけであるが $T(t)$ の式からして楕円函数が導入される。即ち

$$\int_t^\infty \frac{dt}{\sqrt{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}} = u \dots\dots\dots (1.8)$$

と置けば Weierstrass の楕円函数の定義によつて

$$t = \wp(u)$$

となる。故に

$$dt = \wp'(u) du, \quad T(t) = -2 \frac{du}{dt} = -\frac{2}{\wp'(u)}$$

同様に変数 s を

$$s = \wp(v)$$

なる関係にある v と置換えると

$$ds = \wp'(v) dv, \quad T(s) = -\frac{2}{\wp'(v)}$$

扱て $2\omega_1$ 及び $2\omega_3$ を $\wp$ 函数の二つの週期とすれば

$$e_1 = \wp(\omega_1), \quad e_3 = \wp(\omega_3), \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

であり、我々の場合には $e_1 > e_2 > e_3$ として居るから

$$\omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}}, \quad \omega_3 = i \int_{-\infty}^{e_3} \frac{dt}{\sqrt{-4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}}$$

から明らかな如く

$$\omega_1 > 0, \quad \frac{\omega_3}{i} > 0$$

である。我々は t 又は $s = -\infty, e_3, e_2, e_1$ 及び $+\infty$ が夫々 u 又は $v = 0, -\omega_3, \omega_1 - \omega_3, \omega_1$ 及び 0 に対応する様に採るものとすれば、 t 又は s 平面と u 又は v 平面との対応は第 4 図のようになる。(1.7) 式の t 及び s に夫々上記の如き u 及び v を代入すれば

$$F(u) = \frac{i}{\pi} \wp'(u) \int_{\odot} \frac{C(v) dv}{\wp(u) - \wp(v)} \quad \dots\dots\dots (1.9)$$

但し上記の $\int_{\odot} dv$ は第 4 図の如き矩形に沿つて正の向きに廻つて行つて行く積分を表わすものとする。

(1.9) 式を変形する為に $\zeta(u) = -\wp'(u)$ で定義される ζ 函数を導き、その公式

$$\zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta(u) = \frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(v)} \quad \dots\dots\dots (1.10)$$

を (1.9) 式に代入すれば

$$F(u) = \frac{i}{\pi} \int_{\odot} C(v) \{ \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta(u) \} dv \quad \dots\dots\dots (1.11)$$

(1.11) 式を積分すれば第 3 項は $\zeta(u) \int_{\odot} C(v) dv$ となる。所が $\zeta(u)$ は $u=0$ で一位の極を持つが、 $F(u)$ は $u=0$ 即ち E 点で有限でなければならない。故に

$$\int_{\odot} C(v) dv = 0 \quad \dots\dots\dots (1.12)$$

$$\text{即ち} \quad i \log q_1 \left(\int_0^{-\omega_3} dv - \int_{\omega_1 - \omega_3}^{\omega_1} dv \right) + (-\alpha) \int_{\omega_1}^a dv + (\pi - \alpha) \int_a^0 dv = 0$$

$$\text{故に} \quad \alpha(a - \omega_1) + a(\pi - \alpha) = 0$$

$$\therefore a\pi = \alpha\omega_1 \quad \dots\dots\dots (1.13)$$

を得る。(Demtchenko の所謂正則の条件である)

更に (1.11) 式の第 1, 第 2 項を積分すれば、 $C(v)$ は各変域内では常数であるから、之を積分記号の外に出し、又 $\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \zeta(u)$ で定義される σ 函数を導き

$$\int \{ \zeta(u+v) + \zeta(u-v) \} dv = \log \sigma(u+v) - \log \sigma(u-v) = \log \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)}$$

を使うと

$$F(u) = \frac{i}{\pi} \left\{ i \log q_1 \left[\log \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} \right]_0^{-\omega_3} + i \log q_1 \left[\log \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} \right]_{\omega_1 - \omega_3}^{\omega_1} - \alpha \left[\log \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} \right]_a^0 + (\pi - \alpha) \left[\log \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} \right]_a^0 \right\} \quad \dots\dots\dots (1.14)$$

σ 函数の性質を使つて上式を变形すれば第 1 及び第 2 項では

$$\begin{aligned}\log \frac{\sigma(u-\omega_3)}{\sigma(u+\omega_3)} &= \log \frac{-e^{-\eta_3 u} \sigma(\omega_3) \sigma_3(u)}{e^{\eta_3 u} \sigma(\omega_3) \sigma_3(u)} = -\pi i - 2\eta_3 u \\ \log \frac{\sigma(u)}{\sigma(u)} &= 0 \\ \log \frac{\sigma(u+\omega_1)}{\sigma(u-\omega_1)} &= \log \frac{e^{\eta_1 u} \sigma(\omega_1) \sigma_1(u)}{-e^{-\eta_1 u} \sigma(\omega_1) \sigma_1(u)} = \pi i + 2\eta_1 u \\ \log \frac{\sigma(u+\omega_1-\omega_3)}{\sigma(u-\omega_1+\omega_3)} &= \log \frac{e^{\eta_1(u-\omega_3)} \sigma(\omega_1) \sigma(u-\omega_3)}{-e^{-\eta_1(u+\omega_3)} \sigma(\omega_1) \sigma_1(u+\omega_3)} = \pi i + 2\eta_1 u \\ &\quad + \log \frac{-e^{-\eta_3 u - \eta_1 \omega_3} \frac{\sigma(\omega_2)}{\sigma(\omega_1)} \sigma_2(u)}{-e^{\eta_3 u - \eta_1 \omega_3} \frac{\sigma(\omega_2)}{\sigma(\omega_1)} \sigma_2(u)} = \pi i + 2\eta_1 u - 2\eta_3 u\end{aligned}$$

第 3, 第 4 項では

$$\log \frac{\sigma(u+\omega_1)}{\sigma(u-\omega_1)} = \log \frac{e^{\eta_1 u} \sigma(\omega_1) \sigma_1(u)}{-e^{-\eta_1 u} \sigma(\omega_1) \sigma_1(u)} = \pi i + 2\eta_1 u$$

なる変形が行われる。但し茲に

$$\eta_1 = \zeta(\omega_1), \quad \eta_2 = \zeta(\omega_2), \quad \eta_3 = \zeta(\omega_3)$$

とする。以上の関係を (1.14) 式に代入すれば

$$\begin{aligned}F(u) &= \frac{i}{\pi} \left\{ i \log q_1 (-\pi i - 2\eta_3 u + \pi i + 2\eta_1 u - \pi i - 2\eta_1 u + 2\eta_3 u) - \pi \log \frac{\sigma(u+a)}{\sigma(u-a)} + \alpha(\pi i + 2\eta_1 u) \right\} \\ &= i \left\{ \log q_1 - \log \frac{\sigma(u+a)}{\sigma(u-a)} + \alpha i + \frac{\alpha}{\pi} 2\eta_1 u \right\} \\ &= i \left\{ \log q_1 + \log \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u+a)} + \frac{\alpha}{\pi} \cdot 2\eta_1 u + \alpha i \right\} \dots\dots\dots (6)\end{aligned}$$

尙 (1.14) 式の各項の変形の際 πi 又は $-\pi i$ が現われるのは、例えば $\log \frac{\sigma(u-\omega_3)}{\sigma(u+\omega_3)}$ に就て言えば之は $\int_{\omega_3}^{-\omega_3} d\{\log \sigma(u+v)\}$ であるが、 u が 0 と $-\omega_3$ との間にある時は $v = -u$ が特異点であるから、この点の周りを左側に π だけ廻らねばならない為に $-\pi i$ が加わるのである。

附録 I'. 別解 Villat の公式を応用した解法

第 4 図の如き u 平面を

$$u = \omega_1 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \dots\dots\dots (1'.1)$$

なる写像函数によつて Z 平面に写像すると、 u 平面に於ける矩形の内部は Z 平面に於ける半径 1 及び $q \left[= e^{\frac{\omega_2 \pi i}{\omega_1}} < 1 \right]$ なる二つの同心円で囲まれた環状領域の上半部に写像される。(第 I'-1 図参照) そして容易に知れる様に、平面翼素の表面 EF は斯様な半環状領域の外半円に対応し、一方二つの平行壁 AB, CD は内半円に対応する。そして種々の点は夫々次の様に写像されるのである。

$$\begin{aligned}A, C &= qe^{i\theta_2} = qe^{i\pi \left(1 - \frac{b}{\omega_1}\right)} & B &= qe^{i\pi} \\ D &= q & E &= e^{i\pi} \\ F &= 1 & P &= e^{i\theta_1} = e^{i\pi \left(1 - \frac{a}{\omega_1}\right)}\end{aligned}$$

茲に θ_1 及び θ_2 は夫々 Z 平面に於ける点 P 及び A, C の複素座標の偏角である。

扱て Z 平面に於て速度の絶対値を q 、流れの方向が x 軸の正の方向となす角を θ とし (第 4 章に一応述べた如く、この速度の絶対値 q と、 $q = e^{\frac{\omega_2 \pi i}{\omega_1}}$ で表わされる q とは同一文字で表わしてあるが、勿論両者は全く関係のない別物である)

$$F = \theta + i \log q \dots\dots\dots (5)$$

と置けば

$$\frac{dw}{dZ} = e^{-iK} \dots\dots\dots (1'.2)$$

となる事は第 4 章に於て述べた通りである。故に F なる函数を Z の函数として決定出来れば問題は解けた事になるのである。

平面翼素の表面上及び二つの平行壁の面上に於ては総ての点に於て流れの方向が知れて居るから函数 F の実数部 θ は最初から知れて居るのである。所が一に於て自由流線 λ_1 及び λ_2 の上では θ の値は最初から知られて居ないが、その代りその上で圧力が到る所一定で、従つて下流無限遠に於けるものと等しい事から知れる様に流れの速度の大きさが一定で q_1 に等しい事が最初から判つて居る。今取扱ひの便宜上仮に一時

$$q_1 = 1 \dots\dots\dots (1'.3)$$

と置く。すると上流無限遠に於ける速度の大きさは従つて $1/q_1$ になるわけである。以上の様に置くとき自由流線上では函数 F の虚数部が最初から 0 と知れて居ることになる。尚流れの中には吹出し、吸込み及び渦の孰れもが存在しないと仮定して居るので、函数 F は流れの中到處で正則である。

故に Z 平面に於ては F なる函数は半環状領域の内部到處で正則で、外半円上及び内半円上に於てその実数部が中心角 θ の函数として夫々予め知られて居る値 $\Phi(\theta)$ 及び $\Psi(\theta)$ を採り、且つ又両半円の連結部たる Z 平面の実軸上の線分 BE 及び DF の上ではその虚数部が零になる様な Z の函数でなければならない。

斯様な函数を決定する事は有名な Villat の公式を使う事に依つて解決せられる。

今考へて居る半環状領域の実軸に対する鏡像を考え、上下両半面に於ける二つの半環状領域を合して出来る一つの環状領域を考える。考へて居る函数 $F(Z)$ は前述の如く実軸上でその虚数部が零であるから、上半面の半環状領域内の任意の一点 Z に共軛な点 $\bar{Z}$ に就て $F(Z)$ に共軛な $\overline{F(Z)}$ を考えると $\overline{F(Z)}$ は Z 平面の上半分で定数された函数 $F(Z)$ の下半分に於ける解析接続を与える (Schwarz の鏡像原理による解析接続の定理)。

従つて、下半面の半環状領域に於ける解析接続の外半円上に於ける実数部は上半面の半環状領域の外半円上に於ける $F(Z)$ の実数部 $\Phi(\theta)$ と実軸に関して対称であり、同様に下半面の内半円上に於ける解析接続の実数部は上半面の内半円上に於ける $F(Z)$ の実数部 $\Psi(\theta)$ と実軸に関して対称である。

故に我々は、全環状領域の内部到處で正則な解析函数で、外円上及び内円上に於けるその実数部が夫々既知函数 $\Phi(\theta)$ 及び $\Psi(\theta)$ に等しい様な函数 $F(Z)$ を

$$\left. \begin{aligned} \Phi(2\pi - \theta) &= \Phi(\theta) \\ \Psi(2\pi - \theta) &= \Psi(\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1'.4)$$

なる条件の成立する場合に就て求めればよいのである。

斯様な函数 $F(Z)$ は Villat の公式に依つて

$$F(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi(\theta) \zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \theta \right) d\theta - \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Psi(\theta) \zeta_3 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \theta \right) d\theta \dots\dots\dots (1'.5)$$

で与えられる。又 $\Phi(\theta)$ 及び $\Psi(\theta)$ は共に 2π を週期とする函数で、且つ

$$\int_0^{2\pi} \Phi(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \Psi(\theta) d\theta \dots\dots\dots (1'.6)$$

なる条件を満足するものとする。

我々の場合に於ては平行な壁に平行に x 軸を採つて居るから、 θ の値如何に拘らず

$$\Psi(\theta) = 0 \dots\dots\dots (1'.7)$$

である。(1'.4) 式と (1'.7) 式とから

$$\int_0^\pi \Phi(\theta) d\theta = 0 \dots\dots\dots (1'.8)$$

次に (1'.4) 式及び (1'.7) 式を考慮に入れて (1'.5) 式を変形すると

$$F(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(\theta) \left[\zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \theta \right) + \zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \theta \right) \right] d\theta \dots\dots\dots (1'.9)$$

なる形となる。次に $\Phi(\theta)$ の値は

$$\Phi(\theta) = \begin{cases} -\alpha & \dots\dots\dots 0 < \theta < \theta_1 \\ \pi - \alpha & \dots\dots\dots \theta_1 < \theta < \pi \end{cases} \dots\dots\dots (1'.10)$$

で与えられるから、之を (1'.8) 式に代入すると

$$\theta_1 = \pi - \alpha \quad \dots\dots\dots (1' \cdot 11)$$

を得。更に $\Phi(\theta)$ の値を (1'・9) 式に代入して積分を行うと

$$\begin{aligned} F(Z) &= \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{\pi-\alpha} (-\alpha) \left[\zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \theta \right) + \zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \theta \right) \right] d\theta \\ &\quad + \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_{\pi-\alpha}^{\pi} (\pi-\alpha) \left[\zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \theta \right) + \zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \theta \right) \right] d\theta \\ &= \frac{i}{\pi} (\pi-\alpha) \log \frac{\sigma \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \right)}{\sigma \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \right)} - i \log \frac{\sigma \left\{ \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} (\pi-\alpha) \right\}}{\sigma \left\{ \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} (\pi-\alpha) \right\}} \\ &= \frac{i}{\pi} (\pi-\alpha) \left(-i\pi + 2 \frac{\eta_1 \omega_1}{i\pi} \log Z \right) - i \log \frac{\sigma \left\{ \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} (\pi-\alpha) \right\}}{\sigma \left\{ \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} (\pi-\alpha) \right\}} \\ &= (\pi-\alpha) + 2 \frac{\eta_1 \omega_1}{\pi^2} (\pi-\alpha) \log Z - i \log \frac{\sigma \left\{ \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} (\pi-\alpha) \right\}}{\sigma \left\{ \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} (\pi-\alpha) \right\}} \end{aligned}$$

(1'・1) 式を代入して

$$\begin{aligned} &= (\pi-\alpha) - \frac{2i\eta_1}{\pi} (\pi-\alpha)(u-\omega_1) - i \log \frac{\sigma \left(u + \frac{\omega_1}{\pi} \alpha - 2\omega_1 \right)}{\sigma \left(u - \frac{\omega_1}{\pi} \alpha \right)} \\ &= (\pi-\alpha) - 2 \frac{i\eta_1}{\pi} (\pi-\alpha)(u-\omega_1) - i \left\{ \pi i - 2\eta_1 \left(u + \frac{\omega_1}{\pi} \alpha - \omega_1 \right) \right\} - i \log \frac{\sigma \left(u + \frac{\omega_1}{\pi} \alpha \right)}{\sigma \left(u - \frac{\omega_1}{\pi} \alpha \right)} \\ &= i \left\{ -2\pi i + \alpha i + 2 \frac{u}{\pi} \eta_1 \alpha - \log \frac{\sigma(u+\alpha)}{\sigma(u-\alpha)} \right\} \quad \dots\dots\dots (1' \cdot 12) \end{aligned}$$

$e^{2\pi i} = 1$ であるから第 1 項は省略して差支ない。又先に取扱いの便宜上仮に一時自由流線上の流れの速度の大きさを 1 と置き、従つて上流無限遠の速度の大きさを $1/q_1$ としたが、茲で再び旧に復して上流無限遠に於ける速度の大きさを 1、下流の自由流線上の速度の大きさを q_1 とする事にすれば、 dw/dZ の値を q_1 倍にして置けばよい事になる。(1'・2) 式に依つて

$$q_1 \frac{dw}{dZ} = q_1 e^{-iF} = e^{-i(F + i \log q_1)}$$

であるから、求める F は (1'・12) 式に $i \log q_1$ を加えたものになる。従つて結局

$$F(u) = i \left\{ \log q_1 + \alpha i + 2 \frac{u}{\pi} \eta_1 \alpha + \log \frac{\sigma(u-\alpha)}{\sigma(u+\alpha)} \right\}$$

となる。これ即ち (6) 式に他ならない。

附 録 II.

(1) 式より

$$dw = c \frac{t-t_1}{t-t_2} \frac{dt}{(t-e_2)(t-e_3)}$$

所が $u=a$, $b-\omega_3$ は夫々 P 点及び A , C 点对應するから

$$t_1 = \wp(a), \quad t_2 = \wp(b-\omega_3)$$

附録 I 中に於いて述べた t , dt , e_2 及び e_3 の置換式並に上記の t_1 及び t_2 の値を dw 式の右辺に代入し、更に公式

$$\wp(u) - \wp(v) = - \frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\{\sigma(u)\sigma(v)\}^2}$$

を使うと

$$dw = c \frac{\wp(u) - \wp(a)}{\wp(u) - \wp(b - \omega_3)} \frac{\wp'(u) du}{\{\wp(u) - \wp(\omega_1 - \omega_3)\} \{\wp(u) - \wp(\omega_3)\}}$$

$$= c \frac{\sigma(u+a)\sigma(u-a)\sigma^2(b-\omega_3)\sigma^2(\omega_1-\omega_3)\sigma^2(\omega_3)\sigma^4(u)\wp'(u)du}{\sigma^2(a)\sigma(u+b-\omega_3)\sigma(u-b+\omega_3)\sigma(u+\omega_1-\omega_3)\sigma(u-\omega_1+\omega_3)\sigma(u-\omega_3)\sigma(u+\omega_3)}$$

更に

$$\sigma^4(u)\wp'(u) = -\sigma(2u)$$

なる公式を使うと

$$dw = -c \frac{\sigma^2(b-\omega_3)\sigma^2(\omega_1-\omega_3)\sigma^2(\omega_3)}{\sigma^2(a)} \times \frac{\sigma(u+a)\sigma(u-a)\sigma(2u)du}{\sigma(u+b-\omega_3)\sigma(u-b+\omega_3)\sigma(u+\omega_1-\omega_3)\sigma(u-\omega_1+\omega_3)\sigma(u-\omega_3)\sigma(u+\omega_3)}$$

常數項を繰べて c の中に含めると

$$= \frac{c\sigma(u+a)\sigma(u-a)\sigma(2u)du}{\sigma(u+b-\omega_3)\sigma(u-b+\omega_3)\sigma(u+\omega_1-\omega_3)\sigma(u-\omega_1+\omega_3)\sigma(u-\omega_3)\sigma(u+\omega_3)} \dots\dots\dots (2.1)$$

σ 函数の週期に関する性質を使えば

$$\sigma(u+b-\omega_3) = -e^{-2\eta_3(u+b)}\sigma(u+b+\omega_3)$$

$$\sigma(u+\omega_1-\omega_3) = -e^{-2\eta_3(u+\omega_1)}\sigma(u+\omega_1+\omega_3) = e^{-2\eta_3(u+\omega_1)+2\eta_1(u+\omega_3)}\sigma(u-\omega_1+\omega_3)$$

$$\sigma(u-\omega_3) = -e^{-2\eta_3 u}\sigma(u+\omega_3)$$

是等を (2.1) 式に代入すると分母に於ける e の冪指数は

$$-2\eta_3(u+\omega_1)+2\eta_1(u+\omega_3)-2\eta_3 u-2\eta_3(u+b)$$

$$= 2\eta_1 u - 6\eta_3 u + 2(\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1) - 2\eta_3 b$$

$$= 2u(\eta_1 - 3\eta_3) + \pi i - 2\eta_3 b$$

となる。茲に Legendre の関係式

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 &= \frac{\pi i}{2} \\ \left(\eta_2 \omega_1 - \eta_1 \omega_2 = \frac{\pi i}{2} \right) \\ \left(\eta_3 \omega_2 - \eta_2 \omega_3 = \frac{\pi i}{2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.2)$$

を利用した。 $e^{-\pi i + 2\eta_3 b}$ なる常數は c の中に含めて了うと (2.1) 式は結局次の様になる。

$$dw = \frac{c\sigma(u+a)\sigma(u-a)\sigma(2u)e^{2u(3\eta_3-\eta_1)}}{\sigma(u+b+\omega_3)\sigma(u-b+\omega_3)\sigma^2(u-\omega_1+\omega_3)\sigma^2(u+\omega_3)} du \dots\dots\dots (8)$$

附 録 III.

$u = b - \omega_3$ で $\frac{dZ}{dw} = 1$ であるから (7) 式より

$$q_1 = \frac{\sigma(a+b-\omega_3)}{\sigma(-a+b-\omega_3)} e^{-\frac{2\alpha}{\pi}\eta_1(b-\omega_3)-\alpha i}$$

上式中

$$\sigma(a+b-\omega_3) = -e^{-\eta_3(a+b)}\sigma(\omega_3)\sigma_3(a+b)$$

$$\sigma(-a+b-\omega_3) = -e^{-\eta_3(-a+b)}\sigma(\omega_3)\sigma_3(-a+b)$$

であるから是等を代入し (1.13) 式及び (2.2) 式の関係を利用すると

$$q_1 = \frac{\sigma_3(a+b)}{\sigma_3(-a+b)} e^{-\frac{2\alpha}{\pi}b\eta_1 + \frac{2\alpha}{\pi}\eta_1\omega_3 - \alpha i - 2\eta_3 a}$$

$$= \frac{\sigma_3(a+b)}{\sigma_3(-a+b)} e^{\frac{2\omega}{\pi}(\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1) - \frac{3\alpha}{\pi}b\eta_1 - \alpha i}$$

$$= \frac{\sigma_3(a+b)}{\sigma_3(-a+b)} e^{ai - \frac{2\alpha}{\pi}b\eta_1 - \alpha i}$$

$$= \frac{\sigma_3(a+b)}{\sigma_3(-a+b)} e^{-\frac{2\alpha}{\pi}b\eta_1} \dots\dots\dots (9)$$

附 録 IV.

$$\frac{dZ}{du} = f(u)$$

と置く、公式

$$\sigma(u+2\omega_1) = -e^{2\eta_1(u+\omega_1)} \sigma(u)$$

及び (1.13) 式を利用して

$$\begin{aligned} & \frac{f(u+2\omega_1)}{f(u)} \\ &= e^{4\omega_1 \left(3\eta_3 - \eta_1 - \frac{\alpha}{\pi} \eta_1 \right) + 4\eta_1(u+a+\omega_1) + 4\eta_1(2u+2\omega_1) - 2\eta_1(u+b+\omega_3+\omega_1) - 2\eta_1(u-b+\omega_3+\omega_1) - 4\eta_1(u+\omega_3+\omega_1) - 4\eta_1(u-\omega_1+\omega_3+\omega_1)} \\ &= e^{12(\eta_3\omega_1 - \eta_1\omega_3) - 4\eta_1 \left(\frac{\alpha}{\pi} \omega_1 - a \right)} \\ &= e^{-6\pi i} = 1 \\ & \frac{f(u+2\omega_3)}{f(u)} \\ &= e^{4\omega_3 \left(3\eta_3 - \eta_1 - \frac{\alpha}{\pi} \eta_1 \right) + 4\eta_3(u+a+\omega_3) + 4\eta_3(2u+2\omega_3) - 2\eta_3(u+b+2\omega_3) - 2\eta_3(u-b+2\omega_3) - 4\eta_3(u+2\omega_3) - 4\eta_3(u-\omega_1+2\omega_3)} \\ &= e^{-4(\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1) - 4 \frac{\alpha}{\pi} (\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1)} \\ &= e^{-2\pi i \left(1 + \frac{\alpha}{\pi} \right)} \\ &= e^{-2\alpha i} = e^{-2 \frac{\alpha}{\omega_1} \pi i} \end{aligned}$$

故に $f(u)$ は $2\omega_1, 2\omega_3$ なる週期を有する第二種楕円函数である事が知れる。この $f(u)$ を

$$A(u) = \frac{\sigma(u+u_0)}{\sigma(u)\sigma(u_0)} e^{cu}$$

なる函数を使つて因数に分解する。 $A(u)$ が $f(u)$ と同じ乗数を持つ (同数である) 様に c 及び u_0 を決定すると

$$1 = e^{2c\omega_1 + 2u_0\eta_1} e^{-2 \frac{\alpha}{\omega_1} \pi i} = e^{2c\omega_3 + 2u_0\eta_3}$$

之から

$$c = -2a \frac{\eta_1}{\omega_1}, \quad u_0 = 2a$$

を得。即ち

$$A(u) = \frac{\sigma(u+2a)}{\sigma(u)\sigma(2a)} e^{-2a \frac{\eta_1}{\omega_1} u}$$

と置けば $A(u)$ は $u=0$ に一位の極を有し $f(u)$ と同じ乗数を持つ一つの第二種楕円函数である。

$f(u)$ の極は $-b-\omega_3, b-\omega_3, -\omega_3$ 及び $\omega_1-\omega_3$ で総て一位である ($-\omega_3, \omega_1-\omega_3$ に就ては一見二位の極の様であるが分子の $\sigma(2u)$ が是等の点では共に一位の零になるので、結局一位の極になるのである)。従つて c_1, c_2, c_3 及び c_4 を各極に於ける $f(u)$ の剰留数とする時は $A(u)$ を使つて次の様な簡単な要素に分解する事が出来る。

$$f(u) = c_1 A(u+b+\omega_3) + c_2 A(u-b+\omega_3) + c_3 A(u+\omega_3) + c_4 A(u-\omega_1+\omega_3)$$

茲に c_1, c_2, c_3 及び c_4 を計算すると

$$\begin{aligned} c_1 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \sigma^2(a-b-\omega_3) \sigma(-2b-2\omega_3)}{\sigma(\varepsilon) \sigma(-2b) \sigma^2(-b) \sigma^2(-b-\omega_1)} e^{-2(b+\omega_3) \left(3\eta_3 - \eta_1 - \frac{\alpha}{\pi} \eta_1 \right)} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\sigma(\varepsilon)} = 1 \end{aligned}$$

を利用し且つ

$$\sigma(Z) = \frac{2\omega_1}{\vartheta_1'} e^{\frac{2\omega_1\eta_1}{2\omega_1} \frac{Z^2}{2\omega_1}} \vartheta_1\left(\frac{Z}{2\omega_1}\right)$$

によつて σ 函数を ϑ 函数に直すと

$$c_1 = \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{a-b-\omega_3}{2\omega_1}\right) \vartheta_1\left(\frac{2b+2\omega_3}{2\omega_1}\right) \vartheta_1^2}{(2\omega_1)^2 \vartheta_1\left(\frac{2b}{2\omega_1}\right) \vartheta_1^2\left(\frac{b}{2\omega_1}\right) \vartheta_1^2\left(\frac{b+\omega_1}{2\omega_1}\right)} e^{-2(b+\omega_3)\left(3\eta_3-\eta_1-\frac{\alpha}{\pi}\eta_1\right)+\frac{\eta_1}{\omega_1}\left\{(a-b+\omega_3)^2+2(b+\omega_3)^2-2b^2-b^2-(b+\omega_1)^2\right\}}$$

$$q = e^{\tau\pi i}, \quad \tau = -\frac{\omega_3}{\omega_1}$$

と置けば

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1\left(\frac{a-b-\omega_3}{2\omega_1}\right) &= \vartheta_1\left(\frac{a-b}{2\omega_1} - \frac{\tau}{2}\right) = -iq^{-\frac{1}{4}} e^{i\pi\frac{a-b}{2\omega_1}} \vartheta_0\left(\frac{a-b}{2\omega_1}\right) \\ \therefore \vartheta_1^2\left(\frac{a-b-\omega_3}{2\omega_1}\right) &= -q^{-\frac{1}{2}} e^{2i\pi\left(\frac{a-b}{2\omega_1}\right)} \vartheta_0^2\left(\frac{a-b}{2\omega_1}\right) \\ \vartheta_1\left(\frac{b+\omega_3}{\omega_1}\right) &= \vartheta_1\left(\frac{b}{\omega_1} + \vartheta_2\right) = -q^{-1} e^{-2i\pi\frac{b}{\omega_1}} \vartheta_1\left(\frac{b}{\omega_1}\right) \\ \vartheta_1\left(\frac{c+\omega_1}{2\omega_1}\right) &= \vartheta_1\left(\frac{b}{2\omega_1} + \frac{1}{2}\right) = \vartheta_2\left(\frac{b}{2\omega_1}\right) \end{aligned} \right\}$$

之等の関係式及び (1.13) 式を利用して c_1 の運算を進めると結局

$$c_1 = e^{\frac{2\eta_1\omega_3-6\eta_3\omega_3+\eta_1(a^2-b^2-\omega_1^2+3\omega_3^2)+i\alpha}{\omega_1}} \frac{\vartheta_1'^2 \vartheta_0^2\left(\frac{a-b}{2\omega_1}\right)}{4\omega_1^2 \vartheta_1^2\left(\frac{b}{2\omega_1}\right) \vartheta_2^2\left(\frac{b}{2\omega_1}\right) q^{3/2}}$$

同様にして c_2 , c_3 及び c_4 が次の様に得られる

$$\begin{aligned} c_2 &= e^{\frac{2\eta_1\omega_3-6\eta_3\omega_3+\eta_1(a^2-b^2-\omega_1^2+3\omega_3^2)+i\alpha}{\omega_1}} \frac{\vartheta_1'^2 \vartheta_0^2\left(\frac{a+b}{2\omega_1}\right)}{4\omega_1^2 \vartheta_1^2\left(\frac{b}{2\omega_1}\right) \vartheta_2^2\left(\frac{b}{2\omega_1}\right) q^{3/2}} \\ c_3 &= -2e^{\frac{2\eta_1\omega_3-6\eta_3\omega_3+\eta_1(a^2-b^2-\omega_1^2+3\omega_3^2)+i\alpha}{\omega_1}} \frac{\vartheta_1'^2 \vartheta_0^2\left(\frac{a}{2\omega_1}\right)}{4\omega_1^2 \vartheta_1^2\left(\frac{b}{2\omega_1}\right) \vartheta_2^2 q^{3/2}} \\ c_4 &= -2e^{\frac{2\eta_1\omega_3-6\eta_3\omega_3+\eta_1(a^2-b^2-\omega_1^2+3\omega_3^2)+i\alpha}{\omega_1}} \frac{\vartheta_1'^2 \vartheta_3^2\left(\frac{a}{2\omega_1}\right)}{4\omega_1^2 \vartheta_1^2\left(\frac{b}{2\omega_1}\right) \vartheta_2^2 q^{3/2}} \end{aligned}$$

上記 c_1 , c_2 , c_3 及び c_4 の各に共通な常数

$$e^{\frac{2\eta_1\omega_3-6\eta_3\omega_3+\eta_1(a^2-b^2-\omega_1^2+3\omega_3^2)+i\alpha}{\omega_1}} \frac{\vartheta_1'^2}{4\omega_1^2 \vartheta_1^2\left(\frac{b}{2\omega_1}\right) \vartheta_2^2 \vartheta_2^2\left(\frac{b}{2\omega_1}\right) q^{3/2}}$$

を常数 c の中に含めて了うと

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \vartheta_0^2\left(\frac{a-b}{2\omega_1}\right) \vartheta_2^2 \\ c_2 &= \vartheta_0^2\left(\frac{a+b}{2\omega_1}\right) \vartheta_2^2 \\ c_3 &= -2\vartheta_0^2\left(\frac{a}{2\omega_1}\right) \vartheta_2^2\left(\frac{b}{2\omega_1}\right) \\ c_4 &= -2\vartheta_3^2\left(\frac{a}{2\omega_1}\right) \vartheta_1^2\left(\frac{b}{2\omega_1}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

となり

$$f(u) = \frac{dZ}{du} = c\{c_1 A(u+b+\omega_3) + c_2 A(u-b+\omega_3) + c_3 A(u+\omega_3) + c_4 A(u-\omega_1+\omega_3)\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

附 録 V.

σ 函数を ϑ 函数に直せば

$$\begin{aligned} \frac{2a}{e^{\omega_1}} \eta_1 u A(u) &= \frac{\sigma(u+2a)}{\sigma(u)\sigma(2a)} = \frac{\vartheta_1\left(\frac{u+2a}{2\omega_1}\right)\vartheta_1'}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)\vartheta_1\left(\frac{2a}{2\omega_1}\right) \cdot 2\omega_1} e^{\frac{271\omega_1}{(2\omega_1)^2} \{ (u+2a)^2 - u^2 - (2a)^2 \}} \\ \therefore A(u) &= \frac{\vartheta_1\left(\frac{u+2a}{2\omega_1}\right)\vartheta_1'}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)\vartheta_1\left(\frac{a}{\omega_1}\right) \cdot 2\omega_1} \quad \dots\dots\dots (5.1) \end{aligned}$$

上式に於て $u=2\omega_1 v$ と置き (1.13) 式を利用すれば

$$A(v)2\omega_1 = \frac{\vartheta_1\left(v+\frac{\alpha}{\pi}\right)\vartheta_1'}{\vartheta_1(v)\vartheta_1\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)} \quad \dots\dots\dots (5.2)$$

所が u の虚数部は 0 と $-\omega_3$ との間の値しか採り得ない。即ち

$$\Re\left(\frac{2\omega_3}{i}\right) > 0 > \Re\left(\frac{u}{i}\right) > -\Re\left(\frac{\omega_3}{i}\right) > -\Re\left(\frac{2\omega_3}{i}\right)$$

附録 I に於て述べた如く $\omega_1 > 0$ であるから上記の不等式の第 1, 第 3 及び第 5 項を総て $2\omega_1$ で除して $\omega_3/\omega_1 = \tau$ を使えば

$$\Re\left(\frac{\tau}{i}\right) > \Re\left(\frac{v}{i}\right) > -\Re\left(\frac{\tau}{i}\right)$$

複素変数 v が上記の不等式を満足する場合には (5.2) 式の右辺は展開可能で

$$\begin{aligned} A(v) \cdot 2\omega_1 &= \frac{\vartheta_1\left(v+\frac{\alpha}{\pi}\right)\vartheta_1'}{\vartheta_1(v)\vartheta_1\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)} \\ &= \pi \cot \pi v + \pi \cot \alpha + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \sin(2\pi n v + 2\alpha) - q^{4n} \sin 2\pi n v}{1 - 2q^{2n} \cos 2\alpha + q^{4n}} \quad \dots\dots\dots (5.3) \end{aligned}$$

(参考文献 (2) の 320 頁参照)

(5.3) 式を項別に積分すれば (13) 式を得る。

附 録 VI.

(18) 式に (19), (20) 両式を代入し (13) 式に依つて之を変形すれば

$$\begin{aligned} -\frac{le^{-i\alpha}}{c} &= c_1 \left\{ \log \sin \pi \left(\frac{\theta+it}{2\pi} \right) - \log \sin \pi \left(\frac{\theta+it+\pi}{2\pi} \right) \right\} \\ &\quad + c_2 \left\{ \log \sin \pi \left(\frac{-\theta+it}{2\pi} \right) - \log \sin \pi \left(\frac{-\theta+it+\pi}{2\pi} \right) \right\} \\ &\quad + c_3 \left\{ \log \sin \pi \left(\frac{it}{2\pi} \right) - \log \sin \pi \left(\frac{it+\pi}{2\pi} \right) \right\} + c_4 \left\{ \log \sin \pi \left(\frac{it-\pi}{2\pi} \right) - \log \sin \pi \left(\frac{it}{2\pi} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{\pi}{2} \cot \alpha \cdot (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) \\ &\quad - c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \frac{q^{2n} \{ \cos(2\alpha + n\theta + it) - \cos(2\alpha + n\pi + \theta + it) \} - q^{4n} \{ \cos n(\theta + it) - \cos n(\pi + \theta + it) \}}{1 - 2q^{2n} \cos 2\alpha + q^{4n}} \\ &\quad - c_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \frac{q^{2n} \{ \cos(2\alpha + n - \theta + it) - \cos(2\alpha + n\pi - \theta + it) \} - q^{4n} \{ \cos n(-\theta + it) - \cos n(\pi - \theta + it) \}}{1 - 2q^{2n} \cos 2\alpha + q^{4n}} \\ &\quad - c_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \frac{q^{2n} \{ \cos(2\alpha + nit) - \cos(2\alpha + n\pi + it) \} - q^{4n} \{ \cos nit - \cos n(\pi + it) \}}{1 - 2q^{2n} \cos 2\alpha + q^{4n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -c_4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \frac{q^{2n} \{ \cos(2\alpha + n - \pi + it) - \cos(2\alpha + n\pi - \pi + it) \} - q^{4n} \{ \cos n(-\pi + it) - \cos n(\pi - \pi + it) \}}{1 - 2q^{2n} \cos 2\alpha + q^{4n}} \\
& = c_1 \log \tan \frac{\theta + it}{2} + c_2 \log \tan \frac{-\theta + it}{2} + c_3 \log \tan \frac{it}{2} + c_4 \log \frac{-1}{\tan \frac{it}{2}} \\
& - \frac{\pi}{2} (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) \cot \alpha + (q \text{ の冪級数}) \dots\dots\dots (6.1)
\end{aligned}$$

所が

$$\begin{aligned}
\log \tan \frac{\theta + it}{2} &= \log \tan \left(\frac{\theta}{2} + i \frac{t}{2} \right) = \log \frac{\tan \frac{\theta}{2} + i \tanh \frac{t}{2}}{1 - i \tan \frac{\theta}{2} \tanh \frac{t}{2}} = \log \frac{\sin \theta + i \sinh t}{\cos \theta + \cosh t} \\
&= \frac{1}{2} \log \frac{\sin^2 \theta + \sinh^2 t}{(\cos \theta + \cosh t)^2} + i \tan^{-1} \frac{\sinh t}{\sin \theta} \dots\dots\dots (6.2)
\end{aligned}$$

茲で

$$\begin{aligned}
\sinh t &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{1 - e^{-2t}}{2e^{-t}} = \frac{1 - q^2}{2q} \\
\cosh t &= \frac{1 + q^2}{2q}
\end{aligned}$$

なる関係を利用して (6.2) 式の第 1 項を変形し、更に

$$\tan \delta = \frac{2q}{1 - q^2} \sin \theta \dots\dots\dots (22)$$

と置けば

$$\frac{\pi}{2} - \delta = \tan^{-1} \frac{\sinh t}{\sin \theta}$$

となつて (6.2) 式の第 2 項が変形されるから (6.2) 式は

$$\log \tan \frac{\theta + it}{2} = \frac{1}{2} \log \frac{1 - 2q \cos \theta + q^2}{1 + 2q \cos \theta + q^2} + i \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \dots\dots\dots (6.3)$$

同様にして

$$\log \tan \frac{-\theta + it}{2} = \frac{1}{2} \log \frac{1 - 2q \cos \theta + q^2}{1 + 2q \cos \theta + q^2} + i \left(\frac{\pi}{2} + \delta \right) \dots\dots\dots (6.4)$$

$$\log \tan \frac{it}{2} = \log \frac{1 - q}{1 + q} + i \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots (6.5)$$

$$\log \frac{-1}{\tan \frac{it}{2}} = i\pi - \log \tan \frac{it}{2} = -\log \frac{1 - q}{1 + q} + i \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots (6.6)$$

更に q の冪級数の項は、例えば c_1 に係る $\sum$ の中に就て言えば n が偶数の場合には

$$\begin{aligned}
& \cos(2\alpha + n\theta + it) - \cos(2\alpha + n\pi + \theta + it) = 0 \\
& \cos n(\theta + it) - \cos n(\pi + \theta + it) = 0
\end{aligned}$$

となつて消失し、 n が奇数の場合のもののみが残る。 c_1 に係る $\sum$ に就て之を計算して S_1 と置けば

$$S_1 = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{2 \times 2}{n} \frac{q^{2n} \{ \cos(2\alpha + n\theta) \cosh nt - i \sin(2\alpha + n\theta) \sinh nt \} - q^{4n} \{ \cos n\theta \cosh nt - i \sin n\theta \sinh nt \}}{1 - 2q^{2n} \cos 2\alpha + q^{4n}}$$

茲に $\cosh nt = \frac{1 + q^{2n}}{2q^n}$, $\sinh nt = \frac{1 - q^{2n}}{2q^n}$ を代入すれば

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{2}{n} q^n \frac{\{ \cos(2\alpha + n\theta) (1 + q^{2n}) - q^{2n} \cos n\theta (1 + q^{2n}) \} - i \{ \sin(2\alpha + n\theta) (1 - q^{2n}) - q^{2n} \sin n\theta (1 - q^{2n}) \}}{1 - 2q^{2n} \cos 2\alpha + q^{4n}} \\
&= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{2}{n} q^n \frac{(1 + q^{2n}) \{ \cos(2\alpha + n\theta) - q^{2n} \cos n\theta \} - i (1 - q^{2n}) \{ \sin(2\alpha + n\theta) - q^{2n} \sin n\theta \}}{1 - 2q^{2n} \cos 2\alpha + q^{4n}} \dots\dots\dots (6.7)
\end{aligned}$$

となる。 c_2 , c_3 及び c_4 に係るものを、同様に計算して夫々 S_2 , S_3 及び S_4 とすれば、夫等は (6.7) 式に於て θ の代りに夫々 $-\theta$, 0 及び $-\pi$ を代入したものとなる。

S_1, S_2, S_3 及び S_4 から $n=1, 3, 5, 7, \dots$ の項を取り出し, 同じ n の値の項を加え合せたものを夫々 $A_1, A_3, A_5, A_7, \dots$ とすれば

$$\begin{aligned} A_1 = & \frac{2q(1+q^2)}{1-2q^2 \cos 2\alpha + q^4} [c_1 \cos(2\alpha + \theta) + c_2 \cos(2\alpha - \theta) + (c_3 - c_4) \cos 2\alpha - q^2 \{(c_1 + c_2) \cos \theta + (c_3 - c_4)\}] \\ & - i \frac{2q(1-q^2)}{1-2q^2 \cos 2\alpha + q^4} \{c_1 \sin(2\alpha + \theta) + c_2 \sin(2\alpha - \theta) + (c_3 - c_4) \sin 2\alpha - q^2(c_1 - c_2) \sin \theta\} \\ = & 2q(1+q^2)M_1 - i \times 2q(1-q^2)N_1 \dots\dots\dots (6.8) \end{aligned}$$

同様にして

$$A_3 = \frac{2}{3} q^3(1+q^6)M_3 - i \times \frac{2}{3} q^3(1-q^6)N_3 \dots\dots\dots (6.9)$$

$$A_5 = \frac{2}{5} q^5(1+q^{10})M_5 - i \times \frac{2}{5} q^5(1-q^{10})N_5 \dots\dots\dots (6.10)$$

$$A_7 = \frac{2}{7} q^7(1+q^{14})M_7 - i \times \frac{2}{7} q^7(1-q^{14})N_7 \dots\dots\dots (6.11)$$

但し茲に

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{c_1 \cos(2\alpha + \theta) + c_2 \cos(2\alpha - \theta) + (c_3 - c_4) \cos 2\alpha - q^2 \{(c_1 + c_2) \cos \theta + (c_3 - c_4)\}}{1 - 2q^2 \cos 2\alpha + q^4} \\ M_3 &= \frac{c_1 \cos(2\alpha + 3\theta) + c_2 \cos(2\alpha - 3\theta) + (c_3 - c_4) \cos 2\alpha - q^6 \{(c_1 + c_2) \cos 3\theta + (c_3 - c_4)\}}{1 - 2q^6 \cos 2\alpha + q^{12}} \\ M_5 &= \frac{c_1 \cos(2\alpha + 5\theta) + c_2 \cos(2\alpha - 5\theta) + (c_3 - c_4) \cos 2\alpha - q^{10} \{(c_1 + c_2) \cos 5\theta + (c_3 - c_4)\}}{1 - 2q^{10} \cos 2\alpha + q^{20}} \\ M_7 &= \frac{c_1 \cos(2\alpha + 7\theta) + c_2 \cos(2\alpha - 7\theta) + (c_3 - c_4) \cos 2\alpha - q^{14} \{(c_1 + c_2) \cos 7\theta + (c_3 - c_4)\}}{1 - 2q^{14} \cos 2\alpha + q^{28}} \\ &\vdots \\ N_1 &= \frac{c_1 \sin(2\alpha + \theta) + c_2 \sin(2\alpha - \theta) + (c_3 - c_4) \sin 2\alpha - q^2(c_1 - c_2) \sin \theta}{1 - 2q^2 \cos 2\alpha + q^4} \\ N_3 &= \frac{c_1 \sin(2\alpha + 3\theta) + c_2 \sin(2\alpha - 3\theta) + (c_3 - c_4) \sin 2\alpha - q^6(c_1 - c_2) \sin 3\theta}{1 - 2q^6 \cos 2\alpha + q^{12}} \\ N_5 &= \frac{c_1 \sin(2\alpha + 5\theta) + c_2 \sin(2\alpha - 5\theta) + (c_3 - c_4) \sin 2\alpha - q^{10}(c_1 - c_2) \sin 5\theta}{1 - 2q^{10} \cos 2\alpha + q^{20}} \\ N_7 &= \frac{c_1 \sin(2\alpha + 7\theta) + c_2 \sin(2\alpha - 7\theta) + (c_3 - c_4) \sin 2\alpha - q^{14}(c_1 - c_2) \sin 7\theta}{1 - 2q^{14} \cos 2\alpha + q^{28}} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.12)$$

(6.3), (6.4), (6.5), (6.6) の諸式及び (6.8) 式以降の諸式を纏めて (6.1) 式に代入し両辺の符号を変えれば (21) 式を得る。

附 録 VII.

(16) 式から D を計算する際に虚数の出るのは (13) 式右辺の $\log \sin \pi v$ の項だけである。其他は u が $\frac{b+\omega_1}{2} - \omega_3$ から $\frac{b!}{2} - \omega_3$ に移動すると $u+b+\omega_3, u-b+\omega_3, u+\omega_3$ 及び $u-\omega_1+\omega_3$ は夫々

$$\frac{3b+\omega_1}{2} \rightarrow \frac{3b}{2}, \quad \frac{-b+\omega_1}{2} \rightarrow \frac{-b}{2}, \quad \frac{b+\omega_1}{2} \rightarrow \frac{b}{2} \quad \text{及び} \quad \frac{b-\omega_1}{2} \rightarrow \frac{b-2\omega_1}{2}$$

に変わり, $v \left(= \frac{u}{2\omega_1} \right)$ が又之に伴つて変るが皆実数であるから虚数は現れない。唯 $\log \sin \pi v$ は $\sin \pi v$ が正から負に移る時に虚数が現れるのみである。 v が正から負に符号を変えるのは第二の v が $\frac{-b+\omega_1}{4\omega_1} \rightarrow \frac{-b}{4\omega_1}$ に変る際である ($\because 0 < b < \omega_1$)。

(5.3) 式右辺の第 1 項で

$$D = \Im c c_2 \int_{\frac{-b+\omega_1}{4\omega_1}}^{\frac{-b}{4\omega_1}} \pi \cot \pi v \cdot dv$$

被積分函数 $\cot \pi v$ は $v=0$ で ∞ になるから此所はその周りを小さい半円を描いて廻つて積分する。
 その際 $v=0$ に於ける剰留数の πi 倍値が増す。所がその剰留数を計算すると

$$\lim_{v \rightarrow 0} v \pi \cot \pi v = 1$$

故に

$$D = \oint_{\gamma} \pi \cot \pi v dv = \oint_{\gamma} \pi i = \pi c c_2 \dots \dots \dots (25)$$

附 録 VIII.

(14), (17) 兩式を再び掲げると

$$\frac{Z(v)}{C} = c_1 B\left(v + \frac{b+\omega_3}{2\omega_1}\right) + c_2 B\left(v + \frac{-b+\omega_3}{2\omega_1}\right) + c_3 B\left(v + \frac{\omega_3}{2\omega_1}\right) + c_4 B\left(v + \frac{-\omega_1+\omega_3}{2\omega_1}\right) \dots \dots \dots (14)$$

$$\Im \left\{ Z\left(\frac{b}{2} - \omega_3\right) + Z\left(\frac{b+\omega_1}{2} - \omega_3\right) - Z(0) - Z(\omega_1) \right\} = 0 \dots \dots \dots (17)$$

(17) 式は変数が u の形になつて居るから、之を v の形に直すと $v = \frac{u}{2\omega_1}$ であるから

$$\Im \left\{ Z\left(\frac{b-2\omega_3}{4\omega_1}\right) + Z\left(\frac{b+\omega_1-2\omega_3}{4\omega_1}\right) - Z(0) - Z\left(\frac{1}{2}\right) \right\} = 0 \dots \dots \dots (17)'$$

(14) 式を (17)' 式に代入し, (19), (20) 兩式を利用して変形すると

$$\begin{aligned} & \Im \left[c_1 \left\{ B\left(\frac{3\theta}{4\pi}\right) + B\left(\frac{\pi+3\theta}{4\pi}\right) - B\left(\frac{\theta+it}{2\pi}\right) - B\left(\frac{\pi+\theta+it}{2\pi}\right) \right\} \right. \\ & + c_2 \left\{ B\left(\frac{-\theta}{4\pi}\right) + B\left(\frac{\pi-\theta}{4\pi}\right) - B\left(\frac{-\theta+it}{2\pi}\right) - B\left(\frac{\pi-\theta+it}{2\pi}\right) \right\} \\ & + c_3 \left\{ B\left(\frac{\theta}{4\pi}\right) + B\left(\frac{\pi+\theta}{4\pi}\right) - B\left(\frac{it}{2\pi}\right) - B\left(\frac{\pi+it}{2\pi}\right) \right\} \\ & \left. + c_4 \left\{ B\left(\frac{\theta-2\pi}{4\pi}\right) + B\left(\frac{\theta-\pi}{4\pi}\right) - B\left(\frac{-\pi+it}{2\pi}\right) - B\left(\frac{it}{2\pi}\right) \right\} \right] = 0 \dots \dots \dots (8.1) \end{aligned}$$

となる。之を (13) 式に代入すると級数以外の部分は

$$\begin{aligned} & \Im \left[c_1 \left(\log \sin \frac{3\theta}{4} + \log \sin \frac{\pi+3\theta}{4} - \log \sin \frac{\theta+it}{2} - \log \sin \frac{\pi+\theta+it}{2} \right) \right. \\ & + c_2 \left(\log \sin \frac{-\theta}{4} + \log \sin \frac{\pi-\theta}{4} - \log \sin \frac{-\theta+it}{2} - \log \sin \frac{\pi-\theta+it}{2} \right) \\ & + c_3 \left(\log \sin \frac{\theta}{4} + \log \sin \frac{\pi+\theta}{4} - \log \sin \frac{it}{2} - \log \sin \frac{\pi+it}{2} \right) \\ & + c_4 \left(\log \sin \frac{\theta-2\pi}{4} + \log \sin \frac{\theta-\pi}{4} - \log \sin \frac{-\pi+it}{2} - \log \sin \frac{it}{2} \right) \\ & + \cot \alpha \left\{ c_1 \left(\frac{6\theta+\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - \theta - it \right) + c_2 \left(\frac{-2\theta+\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \theta - it \right) \right. \\ & \left. + c_3 \left(\frac{2\theta+\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - it \right) + c_4 \left(\frac{2\theta-3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - it \right) \right\} \end{aligned}$$

となる。 $0 < \theta < \pi$ ($0 < b < \omega_1$ から直ちにこの関係が出る) なる事を考慮して上式から虚数のみを選び出す。其の
 際例えば

$$\log \sin \frac{\theta+it}{2} + \log \sin \frac{\pi+\theta+it}{2} = \log \sin \frac{\theta+it}{2} \cos \frac{\theta+it}{2} = \log \frac{1}{2} \sin(\theta+it) = \log \sin(\theta+it) - \log 2$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \log \sin(\theta+it) &= \log \{ \sin \theta \cosh t + i \cos \theta \sinh t \} = \frac{1}{2} \log (\sin^2 \theta \cosh^2 t + \cos^2 \theta \sinh^2 t) \\ &+ i \tan^{-1} \frac{\cos \theta \sinh t}{\sin \theta \cosh t} = \frac{1}{2} \log (\sin^2 \theta + \sinh^2 t) + i \tan^{-1} \frac{\tanh t}{\tan \theta} \end{aligned}$$

$$\log \sin \left(-\frac{\theta}{4} \right) = \log \left(-\sin \frac{\theta}{4} \right) = i\pi + \log \sin \frac{\theta}{4}$$

なる関係を利用して計算を進めると上記級数以外の部分は

$$\begin{aligned} & \Im \left[c_1 \log \sin(\theta + it) + c_2 \left\{ \log \sin(-\theta + it) - \log \sin\left(-\frac{\theta}{4}\right) \right\} + c_3 \log \sin it \right. \\ & \quad \left. + c_4 \left\{ \log(-\sin it) - \log \sin \frac{\theta - 2\pi}{4} - \log \sin \frac{\theta - \pi}{4} \right\} + it \cot \alpha (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) \right] \\ & = c_1 \tan^{-1} \frac{\tanh t}{\tan \theta} + c_2 \left\{ \tan^{-1} \left(-\frac{\tanh t}{\tan \theta} \right) - \pi \right\} + \frac{\pi}{2} (c_3 - c_4) + t \cot \alpha (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) \end{aligned}$$

茲で

$$\tan \gamma = \frac{\tanh t}{\tan \theta} \left(= \frac{1 - q^2}{1 + q^2} \frac{1}{\tan \theta} \right) \dots\dots\dots (28)$$

と置けば

$$\tan^{-1} \left(-\frac{\tanh t}{\tan \theta} \right) - \pi = \pi - \gamma - \pi = -\gamma$$

故に上記は更に簡単になつて

$$= (c_1 - c_2) \gamma + \frac{\pi}{2} (c_3 - c_4) + \log \frac{1}{q} \cot \alpha (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) \dots\dots\dots (8.2)$$

次に (8.1) 式を (13) 式に代入した際の q の冪級数の部分を考える。例えば c_1 に係る Σ に就て言えば、 v の値として

$$\frac{3\theta}{4\pi}, \frac{\pi + 3\theta}{4\pi}, \frac{\theta + it}{2\pi}, \frac{\pi + \theta + it}{2\pi}$$

を代入するのであるが、前二者からは虚数を生じないから今の場合には考慮の外に置いて宜い事になる。そして結局 c_1 に係る Σ は

$$\begin{aligned} & \Im \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \frac{q^{2n} \cos(n\theta + it + 2\alpha) - q^{4n} \cos n(\theta + it)}{1 - 2q^{2n} \cos 2\alpha + q^{4n}} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \frac{q^{2n} \cos(n\pi + \theta + it + 2\alpha) - q^{4n} \cos n(\pi + \theta + it)}{1 - 2q^{2n} \cos 2\alpha + q^{4n}} \right\} \\ & = \Im \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \frac{q^{2n} \{ \cos(n\theta + it + 2\alpha) + \cos(n\pi + \theta + it + 2\alpha) \} - q^{4n} \{ \cos n(\theta + it) + \cos n(\pi + \theta + it) \}}{1 - 2q^{2n} \cos 2\alpha + q^{4n}} \right] \end{aligned}$$

となつて n が奇数の項は消失し、 n が偶数のもののみが残る。即ち c_1 に係る Σ は

$$\begin{aligned} & = \Im \left\{ - \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{2 \times 2}{n} \frac{q^{2n} \cos(2\alpha + n\theta + nit) - q^{4n} \cos(n\theta + nit)}{1 - 2q^{2n} \cos 2\alpha + q^{4n}} \right\} \\ & = \Im \left[- \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{4}{n} \frac{q^{2n} \{ \cos(2\alpha + n\theta) \cosh nt - i \sin(2\alpha + n\theta) \sinh nt \} - q^{4n} \{ \cos n\theta \cosh nt - i \sin n\theta \sinh nt \}}{1 - 2q^{2n} \cos 2\alpha + q^{4n}} \right] \\ & = \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{4}{n} \frac{q^{2n} \sin(2\alpha + n\theta) \sinh nt - q^{4n} \sin n\theta \sinh nt}{1 - 2q^{2n} \cos 2\alpha + q^{4n}} \end{aligned}$$

茲で $\sinh nt = \frac{1 - q^{2n}}{2q^n}$ を代入すれば

$$= \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{2}{n} \frac{q^n (1 - q^{2n}) \sin(2\alpha + n\theta) - q^{2n} \sin n\theta}{1 - 2q^{2n} \cos 2\alpha + q^{4n}}$$

n は偶数のみであるから $n (n=2, 4, 6, \dots)$ の代りに $2n (n=1, 2, 3, \dots)$ と書直すと

$$= \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^{2n} (1 - q^{4n}) \sin(2\alpha + 2n\theta) - q^{4n} \sin 2n\theta}{1 - 2q^{4n} \cos 2\alpha + q^{8n}} \dots\dots\dots (8.3)$$

c_2, c_3 及び c_4 に係る Σ を同様に計算すれば、夫等は (8.3) 式に於て θ の代りに夫々 $-\theta, 0$ 及び $-\pi$ を代入したものとなる。従つて q の冪級数の部分を総て纏めると次式の様になる。

$$\sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} q^{2n} (1 - q^{4n}) L_{2n} \dots\dots\dots (8.4)$$

但し茲に

$$L_{2n} = \frac{c_1 \sin(2\alpha + 2n\theta) + c_2 \sin(2\alpha - 2n\theta) + (c_3 + c_4) \sin 2\alpha - q^{4n} (c_1 - c_2) \sin 2n\theta}{1 - 2q^{4n} \cos 2\alpha + q^{8n}} \dots\dots\dots (27)$$

とする。

(8.2) 式と (8.4) 式を加え合せて 0 に等しいと置いたのが (26) 式である。

附 録 IX.

(32) 式に於て $\alpha \rightarrow 0$ ならしめる

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{c_w}{c_{w_0}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{4 + \pi \sin \alpha}{2\pi \sin^2 \alpha} \frac{\left\{ \vartheta_0 \left(\frac{\theta + \alpha}{2\pi} \right) - \vartheta_0 \left(\frac{\theta - \alpha}{2\pi} \right) \right\}^2}{\vartheta_0 \left(\frac{\theta - \alpha}{2\pi} \right)} \frac{1}{l/D}$$

(38) 式を代入して

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{4 + \pi \sin \alpha}{2\pi \sin^2 \alpha} \frac{\pi}{S} \frac{1}{\vartheta_0^2 \left(\frac{\theta - \alpha}{2\pi} \right)} \left\{ \vartheta_0 \left(\frac{\theta + \alpha}{2\pi} \right) - \vartheta_0 \left(\frac{\theta - \alpha}{2\pi} \right) \right\}^2$$

(35) 式の展開を利用すれば

$$\begin{aligned} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{4 + \pi \sin \alpha}{2S \sin^2 \alpha} \frac{1}{\vartheta_0^2 \left(\frac{\theta - \alpha}{2\pi} \right)} [2q \{ \cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta + \alpha) \} \\ &\quad - 2q^4 \{ \cos 2(\theta - \alpha) - \cos 2(\theta + \alpha) \} + 2q^8 \{ \cos 3(\theta - \alpha) - \cos 3(\theta + \alpha) \} \dots]^2 \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{4 + \pi \sin \alpha}{2S \sin^2 \alpha} \frac{16q^2}{\vartheta_0^2 \left(\frac{\theta - \alpha}{2\pi} \right)} (\sin \theta \sin \alpha - q^3 \sin 2\theta \sin 2\alpha + q^8 \sin 3\theta \sin 3\alpha - \dots)^2 \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{4 + \pi \sin \alpha}{S \sin^2 \alpha} \frac{8q^2 \sin^2 \theta \sin^2 \alpha}{\vartheta_0^2 \left(\frac{\theta - \alpha}{2\pi} \right)} \{ 1 - 4q^3 \cos \theta \cos \alpha + q^8 (3 - 4 \sin^2 \theta) (3 - 4 \sin^2 \alpha) - \dots \}^2 \\ &= \frac{32q^2 \sin^2 \theta}{S} \left\{ \frac{1 - 4q^3 \cos \theta + 3q^8 (3 - 4 \sin^2 \theta) + \dots}{1 - 2q \cos \theta + 2q^4 \cos 2\theta - 2q^8 \cos 3\theta + \dots} \right\}^2 \dots \dots \dots (39) \end{aligned}$$

第 1 図 z 平面

第 2 図 w 平面

第 3 図 t 平面

第 4 図 u 平面

第 5 図 下流無限遠

第 6 図

第 7 図

第 8 図 空洞指数補正量及摩擦係数補正率

第 9 図 揚力係数 ($\alpha = 5^\circ$)

第 10 図 抗力係数 ($\alpha = 50^\circ$)

第 11 図 揚力に対する側壁影響係数

第 1'-1 図 z 平面

第 12 図 抗力に対する側壁影響係数

第 1 表 ($\alpha=5^\circ$)

ϕ	0.1		0.2		0.3		0.4		備考
θ	$63^\circ 20'$	$63^\circ 30'$	$51^\circ 30'$	$51^\circ 40'$	$39^\circ 20'$	$39^\circ 30'$	$30^\circ 20'$	$30^\circ 30'$	
$\frac{C_1}{C_2}$	0.9101	0.9106	0.7245	0.7253	0.5104	0.5113	0.2953	0.3100	(35)式
$\frac{C_1}{C_2}$	0.9425	0.9430	0.7759	0.7769	0.5712	0.5723	0.3645	0.3655	
$\frac{C_1}{C_2}$	1.0100		1.0401		1.0707		1.1041		
$\frac{C_1}{C_2}$	0.8010		0.6047		0.4182		0.2539		
$\frac{C_1}{C_2}$	1.1594		1.4016		1.6137		1.8479		
$\frac{C_1}{C_2}$	0.8232	0.8244	0.9025	0.9037	0.9873	0.9871	1.0783	1.0774	(12)式
$\frac{C_1}{C_2}$	0.5510	0.5530	0.3954	0.3967	0.2601	0.2613	0.1515	0.1524	
C_1	0.8442	0.8457	0.6678	0.6691	0.3099	0.3110	0.1296	0.1302	
C_2	0.9061	0.9071	0.6548	0.6563	0.3881	0.3896	0.1800	0.1810	
C_3	-0.8738	-0.8721	-0.6049	-0.6039	-0.3414	-0.3408	-0.1408	-0.1436	
C_4	-0.8760	-0.8728	-0.6143	-0.6183	-0.3523	-0.3556	-0.1567	-0.1526	(12)式
$C_1 + C_2 + C_3 + C_4$	0.00107	0.00107	0.00310	0.00311	0.00440	0.00443	0.00413	0.00417	
$\log \frac{C_1}{C_2}$	2.3026		1.6094		1.2040		0.9163		(28)式
$\tan \gamma$	0.3333	0.3361	0.7342	0.7299	1.0180	1.0173	1.2376	1.2323	
γ	0.3712	0.3696	0.6333	0.6305	0.7947	0.7913	0.8912	0.8879	(26)式
$(C_1 - C_2) \gamma$	0.0227	-0.0226	-0.0531	-0.0550	-0.0622	-0.0622	-0.0443	-0.0481	
$\frac{C_1}{C_2} (C_1 - C_2)$	0.0035	0.0121	0.0149	0.0225	0.0171	0.0233	0.0124	0.0157	
$\log \frac{C_1}{C_2} \log (C_1 - C_2)$	0.0232	0.0232	0.0370	0.0572	0.0606	0.0610	0.0493	0.0437	
$\frac{C_1}{C_2} (1 - \frac{C_1}{C_2}) \log \frac{C_1}{C_2}$	-0.0037	-0.0037	-0.0137	-0.0133	-0.0136	-0.0137	-0.0114	-0.0115	
$\frac{C_1}{C_2} (1 - \frac{C_1}{C_2}) \log \frac{C_1}{C_2}$	0.0000	0.0000	-0.0023	-0.0003	-0.0011	-0.0011	-0.0016	-0.0016	(21)式
$\frac{C_1}{C_2} (1 - \frac{C_1}{C_2}) \log \frac{C_1}{C_2}$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0001	-0.0001	
上 7 列、和	0.0033	0.0120	0.0027	0.0107	-0.0012	0.0053	-0.0023	0.0011	
θ	$63^\circ 16'$		$51^\circ 26.6'$		$39^\circ 21.3'$		$30^\circ 26.8'$		
C_1	0.8445		0.5674		0.3101		0.1300		
C_2	0.9057		0.6543		0.3884		0.1807		(25)式
C_3	-0.8743		-0.6052		-0.3413		-0.1437		
C_4	-0.8743		-0.6129		-0.3525		-0.1580		
$C_1 + C_2$	1.7502		1.2217		0.6985		0.3107		
$1 + 2 \frac{C_1}{C_2} \log \frac{C_1}{C_2} + \frac{C_1^2}{C_2^2}$	1.0841		1.2853		1.5592		1.8437		
$1 - 2 \frac{C_1}{C_2} \log \frac{C_1}{C_2} + \frac{C_1^2}{C_2^2}$	0.9359		0.7907		0.6261		0.4703		(30)式
$1 + 2 \frac{C_1}{C_2} \log \frac{C_1}{C_2} + \frac{C_1^2}{C_2^2}$	1.1523		1.6306		2.4317		3.2326		
$1 - 2 \frac{C_1}{C_2} \log \frac{C_1}{C_2} + \frac{C_1^2}{C_2^2}$	0.0753		0.2445		0.4545		0.6347		
$\frac{C_1}{C_2} - \frac{C_1}{C_2}$	1.2222		1.5200		1.8571		2.3333		
$\frac{C_1}{C_2} \log \frac{C_1}{C_2}$	0.6097		0.4033		0.6120		0.8473		
$C_3 - C_4$	0.0000		0.0077		0.0116		0.0093		(29)式
$C_1 + C_2 + C_3 + C_4$	0.00107		0.00310		0.00441		0.00416		
$\frac{C_1}{C_2} \log \frac{C_1}{C_2}$	0.1286		0.2987		0.3175		0.2127		
$(C_1 - C_2) \log \frac{C_1}{C_2}$	0.0000		0.0031		0.0072		0.0073		
$\frac{C_1}{C_2} \log (C_1 - C_2)$	0.0192		0.0557		0.0772		0.0747		
$2 \frac{C_1}{C_2} (1 - \frac{C_1}{C_2}) M_1$	0.1322		0.3329		0.3953		0.3044		(63)式
$\frac{C_1}{C_2} (1 - \frac{C_1}{C_2}) M_5$	-0.0011		0.0057		-0.0054		0.0005		
$\frac{C_1}{C_2} (1 - \frac{C_1}{C_2}) M_6$	0.0000		0.0000		-0.0006		-0.0011		
$\frac{C_1}{C_2} (1 - \frac{C_1}{C_2}) M_7$	0.0000		0.0000		0.0000		-0.0001		
上 7 列、和	0.2723		0.6247		0.7932		0.5990		
$\frac{C_1}{C_2}$	0.2800		0.6573		0.7962		0.6013		(67)式
$\frac{C_1}{C_2}$	0.0984		0.3344		0.6525		1.0592		
$\frac{C_1}{C_2}$	0.9022		0.7242		0.5106		0.3928		
$\frac{C_1}{C_2}$	0.9423		0.7777		0.5714		0.3652		
$\frac{C_1}{C_2}$	0.03561		0.07387		0.11923		0.17383		
C_1	0.01209		0.01632		0.02172		0.03018		(63)式
$\frac{C_1}{C_2} \log \frac{C_1}{C_2}$	1.154		1.461		1.945		2.702		
空洞の面積 ΔA	-0.07122		-0.14774		-0.23316		-0.33576		(67)式
空洞の長さ L	0.03561		0.07387		0.11923		0.17383		

第 2 表 $(\alpha=10^\circ)$

θ	0.07		0.1		0.15		0.2	
θ	74° 30'	75° 0'	68° 30'	68° 40'	59° 20'	59° 40'	52° 0'	52° 20'
$\frac{\theta - \alpha}{2\pi}$	0.9398	0.9408	0.8954	0.8958	0.8042	0.8057	0.7031	0.7046
$\frac{\theta + \alpha}{2\pi}$	0.9866	0.9878	0.9599	0.9605	0.8934	0.8950	0.8104	0.8125
$\frac{\theta}{2\pi}$	1.0049		1.0100		1.0225		1.0401	
$\frac{\theta + \alpha}{2\pi}$	0.8622		0.8022		0.7056		0.6091	
$\frac{\theta - \alpha}{2\pi}$	1.1379		1.1972		1.2964		1.3269	
$\frac{\theta}{2\pi} \cdot \frac{\theta + \alpha}{2\pi}$	0.7942	0.7915	0.8244	0.8236	0.8693	0.8677	0.9071	0.9055
$\frac{\theta}{2\pi} \cdot \frac{\theta - \alpha}{2\pi}$	0.6008	0.6043	0.5530	0.5549	0.4725	0.4750	0.3992	0.4018
C_1	0.8918	0.8938	0.8173	0.8187	0.6764	0.6788	0.5347	0.5370
C_2	0.9829	0.9853	0.9322	0.9341	0.8345	0.8375	0.7104	0.7140
C_3	-0.9377	-0.9312	-0.8768	-0.8752	-0.7525	-0.6085	-0.6107	-0.6085
C_4	-0.9347	-0.9456	-0.9766	-0.9806	-0.7502	-0.7584	-0.6219	-0.6300
$C_1 + C_2 + C_3 + C_4$	0.00221	0.00223	0.00424	0.00427	0.00830	0.00834	0.01245	0.01259
$\log \frac{1}{\theta}$	2.6593		2.3026		1.8971		1.6094	
$\tan \theta$	0.2746	0.2633	0.3861	0.3828	0.5669	0.5593	0.7212	0.7126
r	0.2679	0.2595	0.3683	0.3656	0.5157	0.5099	0.6248	0.6192
$(C_1 - C_2) \cdot r$	-0.0244	-0.0237	-0.0450	-0.0447	-0.0814	-0.0809	-0.1099	-0.1096
$\frac{1}{2}(C_3 - C_4)$	-0.0047	0.0226	-0.0003	-0.0086	-0.0036	0.0137	0.0176	0.0338
$\log \frac{1}{\theta} \cot \alpha (\frac{\theta + \alpha}{2\pi} + \frac{\theta - \alpha}{2\pi})$	0.0332	0.0326	0.0554	0.0558	0.0893	0.0897	0.1197	0.1150
$\frac{1}{2} \theta^2 (1 - \theta^2) L_2$	-0.0060	-0.0061	-0.0114	-0.0114	-0.0201	-0.0202	-0.0274	-0.0273
$\frac{1}{2} \theta^2 (1 - \theta^2) L_4$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0002	-0.0002	-0.0006	-0.0006
$\frac{1}{2} \theta^2 (1 - \theta^2) L_6$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
上 5 列 / 和	-0.0018	0.0264	-0.0013	0.0082	-0.0160	0.0021	-0.0063	0.0113
B	74° 32'		68° 31.4'		59° 27.8'		52° 7.3'	
C_1	0.8919		0.8173		0.6785		0.5353	
C_2	0.9881		0.9400		0.8372		0.7117	
C_3	-0.9373		-0.8766		-0.7500		-0.6059	
C_4	-0.9354		-0.8771		-0.7575		-0.6249	
$C_1 + C_2$	1.8750		1.7579		1.5157		1.2472	
$1 + 2\theta \cos \theta + \theta^2$	1.0422		1.0832		1.1742		1.2856	
$1 - 2\theta \cos \theta + \theta^2$	0.9676		0.9368		0.8708		0.7944	
$1 + 2\theta \cos \theta + \theta^2$	1.0772		1.1563		1.3484		1.6183	
$\frac{1}{2} \log \frac{1 + 2\theta \cos \theta + \theta^2}{1 - 2\theta \cos \theta + \theta^2}$	0.0372		0.0726		0.1495		0.2407	
$\frac{1 + \theta}{1 - \theta}$	1.1506		1.2222		1.3529		1.5000	
$\log \frac{1 + \theta}{1 - \theta}$	2.1403		0.2007		0.3023		0.4055	
$C_3 - C_4$	-0.0019		0.0005		0.0075		0.0150	
$C_1 + C_2 + C_3 + C_4$	0.00221		0.00424		0.00834		0.01250	
$\frac{1}{2}(C_3 - C_4) \log \frac{1 + \theta}{1 - \theta}$	0.00623		0.1277		0.2266		0.3002	
$(C_3 - C_4) \log \frac{1 + \theta}{1 - \theta}$	-0.0003		0.0001		0.0023		0.0061	
$\frac{1}{2} \cot \alpha (C_1 + C_2 + C_3 + C_4)$	0.0127		0.0378		0.0743		0.1113	
$2\theta (1 + \theta^2) M_1$	0.0703		0.1312		0.2422		0.3377	
$\frac{2}{3} \theta^3 (1 + \theta^2) M_3$	-0.0003		-0.0010		-0.0032		-0.0056	
$\frac{2}{5} \theta^5 (1 + \theta^2) M_5$	0.0000		0.0000		0.0000		0.0000	
$\frac{2}{7} \theta^7 (1 + \theta^2) M_7$	0.0000		0.0000		0.0000		0.0000	
上 7 列 / 和	0.1532		0.2350		0.3422		0.4497	
$\frac{1}{\theta}$	0.1617		0.3004		0.5506		0.7613	
$\frac{1}{\theta^2}$	0.0523		0.1017		0.2023		0.3405	
$\frac{\theta - \alpha}{2\pi}$	0.9392		0.8955		0.8055		0.7036	
$\frac{\theta + \alpha}{2\pi}$	0.9867		0.9600		0.8948		0.8111	
$\frac{\theta}{2\pi} - 1$	0.04979		0.07203		0.11088		0.15277	
C_{θ}	0.04736		0.05100		0.05874		0.06854	
$\frac{C_{\theta}}{C_{\theta} \cdot \frac{\theta}{2\pi} \cdot \frac{\theta + \alpha}{2\pi}}$	1.136		1.224		1.409		1.645	
空洞係數修正率 $\Delta \theta$	-0.09353		-0.14406		-0.22176		-0.30554	
修正係數修正率	0.04979		0.07203		0.11088		0.15277	

0.245		0.3		0.3464		0.4	
46°20'	46°40'	40°20'	41°0'	36°0'	36°10'	32°20'	32°40'
0.6070	0.6091	0.4901	0.4933	0.3951	0.3959	0.2962	0.2977
0.7256	0.7279	0.6140	0.6190	0.5178	0.5191	0.4137	0.4164
1.0602		1.0307		1.1217		1.1641	
0.5243		0.4243		0.3445		0.2598	
1.4899		1.6061		1.7094		1.8364	
0.3403	0.3386	0.3829	0.3795	1.0216	1.0208	1.0672	1.0651
0.3374	0.3399	0.2671	0.2718	0.2137	0.2148	0.1626	0.1645
0.4147	0.4171	0.2858	0.2895	0.1964	0.1972	0.1189	0.1200
0.5919	0.5956	0.4486	0.4558	0.3374	0.3391	0.2320	0.2349
-0.4861	-0.4843	-0.3475	-0.3454	-0.2479	-0.2475	-0.15375	-0.1531
-0.5049	-0.5128	-0.3602	-0.3811	-0.2668	-0.2696	-0.1784	-0.1825
0.01571	0.01586	0.01027	0.01080	0.01894	0.01910	0.01971	0.01989
1.4067		1.2040		1.0602		0.9163	
0.8465	0.8368	0.8333	0.8605	1.0816	1.0748	1.1442	1.1295
0.7025	0.6967	0.7770	0.7653	0.8247	0.8215	0.8526	0.8462
-0.1245	-0.1244	-0.1265	-0.1273	-0.1163	-0.1166	-0.0964	-0.0972
0.0293	0.0443	0.0320	0.0561	0.0297	0.0347	0.0327	0.0462
0.1239	0.1266	0.1248	0.1283	0.1139	0.1148	0.0972	0.0992
-0.0314	-0.0319	-0.0321	-0.0333	-0.0290	-0.0300	-0.0255	-0.0263
-0.0012	-0.0012	-0.0022	-0.0022	-0.0029	-0.0029	-0.0035	-0.0035
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0001	-0.0001	-0.0003	-0.0003
-0.0023	0.0134	-0.0040	0.00216	-0.0036	-0.0003	0.0102	0.0181
46°28'		40°26'		36°10.6		31°54'	
0.4150		0.2864		0.1972		0.1175	
0.5924		0.4497		0.3922		0.2283	
-0.4858		-0.3474		-0.2475		-0.1547	
-0.5060		-0.3702		-0.2698		-0.1731	
1.0074		0.7361		0.5364		0.3458	
1.3980		1.5467		1.6752		1.8392	
0.7220		0.6333		0.5608		0.4808	
1.9363		2.4422		2.9939		3.8260	
0.3304		0.4465		0.5483		0.6709	
1.6488		1.8571		2.0606		2.3333	
0.5001		0.6190		0.7230		0.8479	
0.0202		0.0228		0.0223		0.0184	
0.01573		0.01835		0.01911		0.01822	
0.3328		0.3286		0.2941		0.2320	
0.0101		0.0141		0.0161		0.0156	
0.1401		0.1633		0.1702		0.1623	
0.5924		0.4146		0.3924		0.3371	
-0.0063		-0.0052		-0.0026		0.0009	
-0.0002		-0.0006		-0.0009		-0.0011	
0.0000		0.0000		0.0000		-0.0001	
0.8689		0.9148		0.8693		0.7467	
0.8823		0.9282		0.8827		0.7582	
0.4741		0.6575		0.8283		1.0571	
0.6077		0.4906		0.3960		0.2943	
0.7260		0.6148		0.5192		0.4102	
0.1947		0.2532		0.3111		0.3988	
0.07956		0.09748		0.11682		0.14670	
-1.909		2.339		2.803		3.520	
-0.3894		-0.5064		-0.6222		-0.7875	
0.1947		0.2532		0.3111		0.3988	