(昭和 21 年 5 月造船協会春季講演会に於て講演)

電氣的防蝕法の数学的考察

正員 理 学 士 酒 井 彦 四 郎

Abstract.

Mathematical Considerations on the Electric Method to Prevent Corrosion.

By Hikoshiro Sakai, *Rigakushi, Member.*

It is generally known that most of metallic corrosion in the solution of salt is wholly an electrochemical phenomenon. As, in case of electrochemical corrosion, the quantity of metallic corrosion should be proportional to the electric quantity which flow from the face of metal towards a solution, the question of corrosion is really a question of electric current, and it is a phenomenon not to be considered without the geometrical conditions of shape, size, etc. of metal. Hence, it is natural that the law of similarity should prevail at model experiments. The object of this treatise is to show how the geometrical conditions of shape, size, etc. affect the metallic corrosion, by applying mathematics to the question. However, in connection with this matter, there remain many problems of which this is only a part.

1. は し が き

塩類水溶液中の金属の腐蝕は殆んど全く電気化学的現象であることは一般に認められている処であるが、従来の研究者は大概化学的にのみ取扱つて来たことは甚だふしぎに感ぜられる処である。そして、電気化学的腐蝕では、金属の腐蝕量は金属表面から液に向つて流出する電氣量と一定の比例関係をもつから、腐蝕問題は実は電流問題で、金属物体の形状、大きさ等の幾何学的条件を無視しては考えられない現象で、従つて、模型試験では相似法則に準拠すべきことは当然であるにもかかわらず、従来の研究者は殆んど全く幾何学的条件については考慮を払わずもつぱら溶液の成分等のような化学的条件にのみ注意を集中したことは研究価値をいちじるしく制約したものだといえる。

筆者は腐蝕問題に数学を応用することによつて、形状大きさ等の幾何的條件が、金属の腐蝕に如何に影響するかを究明しようとするもので、今後の研究にまつべき問題は極めて多いが、今日までに得られた二三の成果を報告する。

2. 基 礎 仮 定

本文では次のような仮定を採用した。

- (1) 金属の腐蝕量は金属から液に流出する電流に比例する。
- (2) 金属表面に生ずる分極電圧は電流密度に比例する。
- (3) 液の比抵抗は到る処一定である。
- (4) 同一金属物体内では到る処電位一定である。

この内(1)は電気化学的腐蝕では当然であり、筆者等が軟鋼と亜鉛に電流を通じて実験した結果ともよく一致する。ただし、この時の電流とは、同一金属物体の表面から液に向つて流出する部分と、液から金属に流入する部分とが同時に存在する場合は、その代数和を意味するものではなく、流入する電流とは無関係に流出する方だけの総和を意味する。例えば、金属物体を単独に液に浸すときは、局部電池の発生によつて、金属から液に流出した電流は再び金属にかえり、電流の代数和は零となるが、このときの腐蝕量は流出する方の電流だけについて考えれば、(1)の仮定と矛盾しない筈である。

次に(2)の仮定は厳密には成立せず、殊に、電流密度がある程度以上大になるといちじるしく事実と反する

場合もあるが、腐蝕問題では、大概、電流密度は極めて小なる範囲についてだけ考慮すれば十分で、その範囲内では、この仮定はかなり真相に近い。本文では、この比例定数を分極係数 k と呼ぶが、 k は金属と液の種類、温度等によつてちがひ、かつ、陰陽兩極では一般に値がちがうばかりでなく、液が流動している場合には、その速度に依つてもちがう。数学を腐蝕の実際問題に応用するためには、金属の液に対する単極電位ならびに分極係数の性質等のような基礎資料を必要とすることはいうまでもない。

3. 簡単な応用例

金属表面における電流分布が一様であれば計算は極めて簡単であるから、まず、理解を助ける為に、簡単な応用例について説明しよう。即ち、第1図に示すように、海水中に二個の金属物体 A と C が存在し、外部から電圧 E と電流 I が与えられた場合について考えると、まず、兩極とも分極係数は零で、海水中の抵抗を r とすれば、

$$E + (E_C - E_A) = Ir \quad (3.1)$$

ただし、 E_A と E_C は金属 A と C の海水に対する単極電位である。又、便宜上 $V_A = E + (E_C - E_A)$ とおけば、(3.1) は

$$V_A = Ir \quad (3.2)$$

となる。

次に、分極係数が零でないときについて考えると、 A と C の表面積をそれぞれ S_1 と S_2 、分極係数をそれぞれ k_1 と k_2 とし、かつ、仮りに A と C の表面で電流密度が一様であるとみなしてこれを i_1 と i_2 にすると、

$$I = i_1 S_1 = i_2 S_2 \quad (3.3)$$

$$\text{かつ} \quad V_A = k_1 i_1 + k_2 i_2 + Ir \quad (3.4)$$

である。

今、一例として、 A, C をそれぞれ亜鉛鍍と鉄鍍とし、鉄鍍を防蝕するのに必要な亜鉛鍍の面積を求めるのに、 $S_2/S_1 = \lambda$ と置くと、(3.3) から $\lambda = S_2/S_1 = i_1/i_2$ となるから、 $r=0$ と仮定すれば、上式と (3.4) とから $i_2 = V_A / (\lambda k_1 + k_2)$ となるが、第2図⁽¹⁾によると、 $k_2 i_2$ 、すなわち、鉄鍍表面における分極電圧がある一定値

$$V_c = 0.02V \quad (3.5)$$

なら、鉄鍍は有効に防蝕されると考えられるので

$$V_c = k_2 i_2 = k_2 V_A / (\lambda k_1 + k_2) \quad \text{又は} \quad \lambda = \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{V_A}{V_c} - 1 \right)$$

で、海水静止と考えれば

$$k_1 = 450 \Omega \text{cm}^2, k_2 = 20,000 \Omega \text{cm}^2, V_A = 0.36V \quad (3.6)$$

(1) 本図は奥田克己、田川信夫、原 寅吉の三氏の“鉄製推進器の電氣的防蝕法”(本誌掲載)より引用した。

であるから

$$\lambda = 755.6$$

又、海水の流速 160 m/min のときは

$$k_1 = 250 \Omega \text{cm}^2, k_2 = 650 \Omega \text{cm}^2, V_a = 0.40 \text{V} \quad (3.7)$$

であるから

$$\lambda = 49.4$$

である。

次に、第二の例として、二枚の同面積 S の鉄板を距離 L を隔て、対向させ、外部から電圧 V_a を与えるものとし、

仮に $r = \rho L / S$ (但し、 ρ は海水の比抵抗)、

各表面における電流密度を i とすれば、(3.3) と (3.4) から

$$V_a = i(k_1 + k_2) + i\rho L \quad \text{又は} \quad i = V_a / (k_1 + k_2 + \rho L) \quad (3.8)$$

が得られる。

さて、塩分濃度が腐蝕量、すなわち、 i に如何に影響するかを考えるに、 V_a と L を一定とし、 k は濃度によつて変らぬものとすれば、濃度が増せば ρ は減るから、 i/V_a と濃度の関係は、(3.8) から第3図(A)のようになる筈である。

ひるがえつて鉄板の単独腐蝕について考えると、鉄板表面は材質の不同、酸素の濃淡等の原因のため、場所によつて単独電位を異にし、ある一部は陽極、他の一部は陰極となつて局部電流を生

ずることによつて腐蝕が進行するのであるから、定性的には上述の計算例と全く同一の現象であると考えられる。従つて、 k が濃度に関係であるとすれば、鉄板の単独腐蝕量と溶液の濃度との関係は、第3図(A)の電流と濃度の関係と全く同じ傾向を示す筈であるが、多くの実験によれば、単独腐蝕量と濃度の関係は、同図(B)のように、ある濃度のとき腐蝕量が最大となり、それより濃度が増すと、腐蝕量は反対に減り、食塩なら約 0.5 % のとき腐蝕量が最大といわれているが、このようになる為には、上記の式 (3.8) から考えれば、濃度が増せば k が従つて増すことを意味するものと考えられる。もしもそうだとしたら、腐蝕量が最大になるときの濃度は L 、即ち、品物の大きさによつてちがう筈で、上記の濃度 0.5 % が小試験片の実験から得られた結果であるとすれば、それより遙かに大なる品物にあつては、腐蝕量を最大ならしめる塩分濃度はこれよりも遙かに大なるべき筈ではないかと考えられる。

以上の事柄は一層実験を行つた上でないと確定できないことは勿論であるが、数学的考慮を要すべき問題の一例として指摘したものである。

4. 基本式⁽²⁾

前章では、金属表面における電流分布を一様なものと仮定したときの取扱いに就いて述べたのであるが、一般には、電流密度は複雑な分布をし、これを求めるには、解析的方法を必要とする。すなわち、第1図の場合は

(1) 簡単のため、まず、分極電圧のないときは、海水中における電流密度を表わすベクトル i の分布は、海水中における各点の電位を V とすれば、

$$i = -\frac{1}{\rho} \text{grad } V \quad (4.1)$$

但し、 ρ は海水の比抵抗で、実際上ほぼ定数とみなしてよい。尚、海水が流動していても本式には影響がない筈である。又、 V はラプラスの微分方程式

$$\nabla^2 V \equiv \nabla \cdot \text{grad } V = 0 \quad (4.2)$$

を満足すべきことは周知のことである。

さて、海水中に存在する二箇の金属間に電流が流れる問題では、両極金属の表面は等電位曲面であると考えられるから、このときの境界条件については、同一金属物体内では電位は一定であるとみなし、陽陰両金属の電位をそれぞれ V_{m1} と V_{m2} としよう。又、海水中において金属表面に無限に接近した点の電位をそれぞれ V_{s1} と V_{s2} 、両極の単極電位を V_1 と V_2 とすれば、これ等の間には次の関係が成立することが明らかである。

(2) 本章は奥田克己、田川信夫両氏の前掲論文(本誌掲載)より引用したものである。

第3図

$$V_{m1} = V_{s1} + V_1, \quad V_{m2} = V_{s2} + V_2 \quad (4.3)$$

そして、両極金属に加えられる外部電源の電圧を E とすれば、 $E = V_{m1} - V_{m2}$ である。第1図において、回路の抵抗を零としたときの動電圧を V_a とすれば $V_a = V_2 - V_1$ で、今の場合の回路の動電圧を V とすれば (4.3) の両式から $V = E + V_a = V_{s2} - V_{s1}$ となるが、電位はそもそも相対的であるから、どの点の電位を零としても電流には影響がないから、便宜上 $V_{m2} - V_2 = 0$ と置けば (4.3) の代りに次のように書くことができる。

$$V_{s1} = V, \quad V_{s2} = 0 \quad (4.4)$$

故に、両極の金属表面において (4.4) を満足する (4.2) の解が得られれば、(4.1) から電流分布を求めることができる。

又、表面 A から海水中に流出する電流密度を i_{s1} 、海水から表面 C に流入する電流密度を $-i_{s2}$ 、全電流を I とすれば

$$I = \int_A i_{s1} dS_1 = \int_C i_{s2} dS_2 \quad (4.5)$$

なること当然である。ただし、 dS_1 と dS_2 はそれぞれ表面 A と C の面積素で、積分 $\int_A, \int_C$ はそれぞれ A と C の全表面に及ぼすことを意味する。

(2) 次に、上と同様の問題で、分極電圧のあるときは、海水中にある2箇の金属間に電流が流れる問題では、両極金属の表面は、一見した所では、等電位曲面であると考えられ易いのであるが、電気的防蝕法のような微弱電流を取扱う問題では、金属表面における分極作用が軽視し難い重要事項となる為、金属表面は一般には等電位曲面とは考えられないことになる。今、このときの境界条件について考えると、 V_{m1} 、 V_{m2} 、 V_{s1} と V_{s2} は (1) のときと同様に定義する。ただし、 V_{s1} と V_{s2} は一般に変数で、表面における位置の函数である。又、両

第4図

極の単極電位 V_1 と V_2 、かつ分極電圧 v_1 と v_2 を想起すれば、これ等の間には第4図から明らかなように、次の関係が成立する。

$$V_{m1} = V_{s1} + V_1 + v_1, \quad V_{m2} = V_{s2} + V_2 - v_2 \quad (4.6)$$

しかして E, V_a と V を (1) と同様に定義すれば、 $E = V_{m1} - V_{m2}$ 、 $V_a = V_2 - V_1$ であるから、(4.6) の両式から $V = E + V_a = (V_{s1} + v_1) - (V_{s2} - v_2)$ 。

(1) のときのようにして、今、 $V_{m2} - V_2 = 0$ と置けば、(4.6) の代りに次のように書くことができる。

$$V_{s1} + v_1 = V, \quad V_{s2} - v_2 = 0 \quad (4.7)$$

更に分極電圧 v と電流密度 i の間に、基礎仮定 (2) のような直線関係 $v = ki$ が成立するものとすれば、(4.1) によつて (4.7) は次のようになる。

$$V_{s1} - \frac{k_1}{\rho} \left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_{s1} = V, \quad V_{s2} - \frac{k_2}{\rho} \left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_{s2} = 0 \quad (4.8)$$

ただし、 k_1 と k_2 はそれぞれ陽陰両極の分極係数で、 $\left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_{s1}$ と $\left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_{s2}$ はそれぞれ A, C 両金属から海水側に向う表面に垂直な方向への微係数である。以上を要約すると、両極の金属表面において、(4.8) を満足するような (4.2) の解が得られれば、(4.1) から電流分布を求めることができる。

なお、(1) のときのように $i_{s1}, i_{s2}, I, dS_1, dS_2, \int_A$ と $\int_C$ を定義すれば (4.5) が成立することは勿論である。

5. 応 用 例

以上の基本式を用いて次のような二三の例題を解こう。

其 の 一 (分極電圧のない場合)

無限に拡がる比抵抗 $\rho \Omega \text{cm}$ の導体 (海水とは限らない) 中に半径 $R_1 \text{cm}$ と $R_2 \text{cm}$ の2球があつてその中心距離が $L \text{cm}$ であるときの両球間の抵抗 $r \Omega$ を求める問題。(第5図)。

(1)⁽³⁾ 2 極座標における基礎方程式の一般解 3次元の2極座標について論じたものは比較的少ないように思われるので、まず、これと直角座標の関係を述べよう。

第5図

第6図

今、直角座標 (x, y, z) と次の関係で連結される直交曲線座標 (ξ, η, ζ) を考える。

$$\eta + j\xi = \log \frac{\sigma + j(z+a)}{\sigma + j(z-a)}, \quad x = \sigma \cos \xi, \quad y = \sigma \sin \xi \quad (5.1.1)$$

ただし、 $j = \sqrt{-1}$ で、 $0 \leq \sigma < +\infty$ かつ $0 \leq \xi \leq \pi$ 、 $-\infty < \eta < +\infty$ 、 $0 \leq \zeta < 2\pi$ 。この (ξ, η, ζ) が $(0, 0, \pm a)$ に2極をもつ3次元の2極座標である。(5.1.1) を x, y と z について解けば

$$x = \frac{a \sin \xi \cos \zeta}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad y = \frac{a \sin \xi \sin \zeta}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad z = \frac{a \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} \quad (5.1.2)$$

が得られる。曲面 $\xi = \text{一定}$ 、 $\eta = \text{一定}$ は、第6図にある半平面 $\sigma \geq 0$ を z 軸の周りに廻転して得られるもので、図には2次元の2極座標 (η, ξ) と直角座標 (σ, z) との関係を図解してある。例えば、 $\eta = \text{一定}$ は中心が $(0, 0, a \coth \eta)$ で半径が $|a \operatorname{cosech} \eta|$ の球面である。次に、 $\eta = \eta_1 > 0$ は全く xy -平面の上部に、 $\eta = -\eta_2 < 0$ は下部にある。さて2極座標でのラプラスの微分方程式 $\Delta V = 0$ は次のような形をとる。

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi} \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{(\cosh \eta - \cos \xi) \sin \xi} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = 0 \quad (5.1.3)$$

ただし、 V は(4.1) の中の V と同じく、 $\nabla = \text{grad } V$ はベクトルで、その成分は次のように与えられる。

$$(v_\xi, v_\eta, v_\zeta) = \frac{\cosh \eta - \cos \xi}{a} \times \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}, \frac{\partial V}{\partial \eta}, \frac{1}{\sin \xi} \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) \quad (5.1.4)$$

方程式 (5.1.3) を解くには通常

$$V = (\cosh \eta - \cos \xi)^{\frac{1}{2}} f \quad (5.1.5), \quad \mu = \cos \xi, \quad -1 \leq \mu \leq +1 \quad (5.1.6)$$

と置けば、(5.1.3) は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right\} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} f = 0 \quad (5.1.7)$$

故に、 $f = \Xi(\mu)H(\eta)Z(\xi)$ と置けば、

(3) 本節は Dyurô Endô, The Forces on Two Spheres Placed in Uniform Flow, Proc. Phys-Math. Soc. Japan, 20 (1938) による。

$$(1-\mu^2)\left[\frac{1}{\Xi} \frac{d}{d\mu} \left\{(1-\mu^2) \frac{d\Xi}{d\mu}\right\} + \frac{1}{H} \frac{d^2 H}{d\eta^2} - \frac{1}{4}\right] = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{d\xi^2} \quad (5.1.8)$$

のように分離され、これは一つの定数 C_1 に等しくなければならぬから

$$\frac{d^2 Z}{d\xi^2} = -C_1 Z \quad (5.1.9)$$

V は ξ に関して周期 2π をもつ為には、 $\sqrt{C_1}$ は整数が零でなければならぬから (5.1.9) からの特別解として $\cos m\xi$, $\sin m\xi$; $m=0, 1, 2, \dots$ が得られる。故に (5.1.8) は $\frac{1}{\Xi} \frac{d}{d\mu} \left\{(1-\mu^2) \frac{d\Xi}{d\mu}\right\} - \left(\frac{1}{4} + \frac{m^2}{1-\mu^2}\right) = -\frac{1}{H} \times \frac{d^2 H}{d\eta^2}$ となるから、両辺は他の一つの定数 $-C_2$ に等しくなければならぬ。故に H に関する特別解は $\cosh \sqrt{C_2} \eta$, $\sinh \sqrt{C_2} \eta$ で Ξ に関する方程式は

$$\frac{d}{d\mu} \left\{(1-\mu^2) \frac{d\Xi}{d\mu}\right\} + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right\} \Xi = 0 \quad (5.1.10)$$

となる。但し $n = \sqrt{C_2} - \frac{1}{2}$

(5.1.10) の解は $P_n^m(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}$, $Q_n^m(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n(\mu)}{d\mu^m}$ によつて定義されるルジエンドルのばい函数 $P_n^m(\mu)$, $Q_n^m(\mu)$ である。

さて、求めようとする解は $-1 \leq \mu \leq +1$ のような μ の総ての値に対して有限なるを要するから、 $P_n^m(\mu)$ は $n-m$ が正の整数が零なる条件で採らねばならぬ。故に二つの n と m とは $n \geq m \geq 0$ なる条件で正の整数となり、(5.1.7) の一般解として

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n f_{mn}, \quad f_{mn} = \{\alpha_{mn}(\eta) \cos m\xi + \gamma_{mn}(\eta) \sin m\xi\} P_n^m(\mu)$$

ただし

$$\alpha_{mn}(\eta) = A_{mn} \cosh \frac{2n+1}{2} \eta + B_{mn} \sinh \frac{2n+1}{2} \eta, \quad \gamma_{mn} = C_{mn} \cosh \frac{2n+1}{2} \eta + D_{mn} \sinh \frac{2n+1}{2} \eta \quad (5.1.11)$$

かつ A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , D_{mn} は任意の定数である。これ等を (5.1.5) に入れると、 V の一般式は 2 極座標によつて得られ、次のようになる。

$$V = (\cosh \eta - \mu)^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \alpha_{mn}(\eta) P_n^m(\mu) \cos m\xi + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \gamma_{mn}(\eta) P_n^m(\mu) \sin m\xi \right\} \quad (5.1.12)$$

(2) 2 球が一樣な導電媒体の中にあるときの 2 球間の導電媒体の抵抗を求める計算 2 球 $\eta = \eta_1 > 0$ と $\eta = -\eta_2 < 0$ が一樣な導電媒体の中に置かれたときのポテンシャルを V とすれば、 V は勿論基礎方程式 (5.1.3) を満足するから、一般に (5.1.12) の形に書ける。

さて、分極作用がなければ、 $\eta = \eta_1$ と $\eta = -\eta_2$ は一つの等電位曲面となるから第 4 章によつて

$$\eta = \eta_1, \quad \eta = -\eta_2 \quad \text{のときそれぞれ} \quad V = V_{s1} \quad \text{と} \quad V = V_{s2} \quad (5.1.13)$$

ただし、 V_{s1} と V_{s2} は定数で

$$V_{s1} - V_{s2} = V \quad (5.1.14)$$

である。本節では、(5.1.12) の V が (5.1.13) と (5.1.14) を満足するとき、2 球 $\eta = \eta_1$ と $\eta = -\eta_2$ の間の導電媒体の抵抗 r はどんな式で与えられるかを知るのが目的である。

今、(5.1.12) を (5.1.13) に入れて $\cos m\xi$, $\sin m\xi$ の係数を共に零に等しいと置けば

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{0n}(\eta_1) P_n^m(\mu) = \frac{V_{s1}}{(\cosh \eta_1 - \mu)^{\frac{1}{2}}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{0n}(-\eta_2) P_n^m(\mu) = \frac{V_{s2}}{(\cosh \eta_2 - \mu)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.1.15)$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} \alpha_{mn}(\eta_1) P_n^m(\mu) = 0, \quad \sum_{n=m}^{\infty} \alpha_{mn}(-\eta_2) P_n^m(\mu) = 0 \quad (m \geq 1) \quad (5.1.16)$$

$$\text{と} \quad \sum_{n=m}^{\infty} \gamma_{mn}(\eta_1) P_n^m(\mu) = 0, \quad \sum_{n=m}^{\infty} \gamma_{mn}(-\eta_2) P_n^m(\mu) = 0 \quad (m \geq 0) \quad (5.1.17)$$

(5.1.16) と (5.1.17) から, (5.1.11) を用いることにより $m \geq 1$ のとき $A_{mn} = B_{mn} = 0$ であつ又 $m \geq 0$ のとき

$$C_{mn} = D_{mn} = 0 \quad (5.1.18)$$

又 (5.1.15) の右辺に展開公式

$$(\cosh \eta - \mu)^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2n+1}{2}\eta} P_n(\mu) \quad (5.1.9)$$

を用いると, (5.1.15) と (5.1.11) の第一方程式から, 次の二つの関係式が得られる。

$$\begin{aligned} A_{0n} \cosh \frac{2n+1}{2} \eta_1 + B_{0n} \sinh \frac{2n+1}{2} \eta_1 &= 2^{\frac{1}{2}} V_{s1} e^{-\frac{2n+1}{2} \eta_1}, \\ A_{0n} \cosh \frac{2n+1}{2} \eta_2 - B_{0n} \sinh \frac{2n+1}{2} \eta_2 &= 2^{\frac{1}{2}} V_{s2} e^{-\frac{2n+1}{2} \eta_2} \end{aligned}$$

上式から A_{0n}, B_{0n} を求めて, これ等を (5.1.11) の第1式に用いて

$$\begin{aligned} \alpha_{0n}(\eta) &= A_{0n} \cosh \frac{2n+1}{2} \eta + B_{0n} \sinh \frac{2n+1}{2} \eta \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \frac{V_{s1} e^{-\frac{2n+1}{2} \eta_1} \sinh \frac{2n+1}{2} (\eta + \eta_2) - V_{s2} e^{-\frac{2n+1}{2} \eta_2} \sinh \frac{2n+1}{2} (\eta - \eta_1)}{\sinh \frac{2n+1}{2} (\eta_1 + \eta_2)} \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

(5.1.18) と (5.1.20) を (5.1.12) に入れると

$$V = \sqrt{2(\cosh \eta - \mu)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_{s1} e^{-\frac{2n+1}{2} \eta_1} \sinh \frac{2n+1}{2} (\eta + \eta_2) - V_{s2} e^{-\frac{2n+1}{2} \eta_2} \sinh \frac{2n+1}{2} (\eta - \eta_1)}{\sinh \frac{2n+1}{2} (\eta_1 + \eta_2)} P_n(\mu) \quad (5.1.21)$$

次に, 導電媒体中の任意の点における電流密度を i_η とすれば $i_\eta = -\frac{1}{\rho} v_\eta$ ただし ρ は導電媒体の比抵抗である。

右辺の v_η に (5.1.4) の第2式を入れて $i_\eta = -\frac{\cosh \eta - \mu}{\rho a} \frac{\partial V}{\partial \eta} \dots \dots (5.1.22)$ が得られるから, (5.1.21) から $\frac{\partial V}{\partial \eta}$ を求めてこれに入れれば i_η は求められ, 従つて $\eta = \eta_1, \eta = -\eta_2$ での電流密度 i_{η_1} と $i_{-\eta_2}$ はこのようにして得られた i_η に $\eta = \eta_1, \eta = -\eta_2$ と置いて得られ次のようになる。

$$\begin{aligned} i_{\eta_1} &= -\frac{1}{\rho a} \sqrt{\frac{\cosh \eta_1 - \mu}{2}} \left\{ V_{s1} \sinh \eta_1 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2n+1}{2} \eta_1} P_n(\mu) + (\cosh \eta_1 - \mu) \right. \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{V_{s1} e^{-\frac{2n+1}{2} \eta_1} \cosh \frac{2n+1}{2} (\eta_1 + \eta_2) - V_{s2} e^{-\frac{2n+1}{2} \eta_2} \cosh \frac{2n+1}{2} (\eta_1 - \eta_2)}{\sinh \frac{2n+1}{2} (\eta_1 + \eta_2)} P_n(\eta) \left. \right\} \\ i_{-\eta_2} &= \frac{1}{\rho a} \sqrt{\frac{\cosh \eta_2 - \mu}{2}} \left\{ V_{s2} \sinh \eta_2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2n+1}{2} \eta_2} P_n(\mu) + (\cosh \eta_2 - \mu) \right. \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{V_{s2} e^{-\frac{2n+1}{2} \eta_2} \cosh \frac{2n+1}{2} (\eta_1 + \eta_2) - V_{s1} e^{-\frac{2n+1}{2} \eta_1} \cosh \frac{2n+1}{2} (\eta_2 - \eta_1)}{\sinh \frac{2n+1}{2} (\eta_1 + \eta_2)} P_n(\mu) \left. \right\} \end{aligned} \quad (5.1.23)$$

第三に, 各球面上の全電流 I_{η_1} と $I_{-\eta_2}$ を求めるのに, 球面の面積素を dS_η とすれば $dS_\eta = -\frac{a^2}{(\cosh \eta - \mu)^2} \times d\xi d\mu$ で与えられるから, 球面 $\eta = \eta_1$ から流出する全電流は (5.1.23) の第1式を用いて,

$$\begin{aligned} I_{\eta_1} &= \iint i_{\eta_1} dS_{\eta_1} = -a^2 \int_0^{2\pi} d\xi \int_{-1}^1 \frac{i_{\eta_1}}{(\cosh \eta_1 - \mu)^2} d\mu \\ &= \frac{\sqrt{2} \pi a}{\rho} \left[V_{s1} \sinh \eta_1 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2n+1}{2} \eta_1} \int_{-1}^1 (\cosh \eta_1 - \mu)^{-\frac{3}{2}} P_n(\mu) d\mu \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + V_{s1} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{-\frac{2n+1}{2}\eta_1} \coth \frac{2n+1}{2}(\eta_1+\eta_2) \int_{-1}^1 (\cosh \eta_1 - \mu)^{-\frac{1}{2}} P_n(\mu) d\mu \\
& - V_{s2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{-\frac{2n+1}{2}\eta_2} \operatorname{cosech} \frac{2n+1}{2}(\eta_1+\eta_2) \int_{-1}^1 (\cosh \eta_1 - \mu)^{-\frac{1}{2}} P_n(\mu) d\mu \quad (5.1.24)
\end{aligned}$$

然るに、 m と n は正の整数 (零を含む) で、 $n > 0$ のときは常に $\int_{-1}^1 P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu = \frac{2}{2n+1}$ ($m=n$ のとき) $= 0$ ($m \neq n$ のとき) であるから、これと (5.1.19) から

$$\int_{-1}^1 (\cosh \eta - \mu)^{-\frac{1}{2}} P_n(\mu) d\mu = \frac{2^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{2n+1}{2}\eta}}{2n+1}$$

この両辺を η で微分して $\int_{-1}^1 (\cosh \eta - \mu)^{-\frac{3}{2}} P_n(\mu) d\mu = 2^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{2n+1}{2}\eta} \operatorname{cosech} \eta$

上の2式を (5.1.24) の右辺に入れると、(5.1.24) は終に次のようになる。

$$I_{\eta_1} = \frac{4\pi a}{\rho} \left\{ V_{s1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_2-\eta_1)}}{\sinh \frac{2n+1}{2}(\eta_1+\eta_2)} - V_{s2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_2+\eta_1)}}{\sinh \frac{2n+1}{2}(\eta_1+\eta_2)} \right\} \quad (5.1.25)$$

$$\text{同様にして} \quad I_{-\eta_2} = -\frac{4\pi a}{\rho} \left\{ V_{s2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_2-\eta_1)}}{\sinh \frac{2n+1}{2}(\eta_1+\eta_2)} - V_{s1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_2+\eta_1)}}{\sinh \frac{2n+1}{2}(\eta_1+\eta_2)} \right\}$$

然るに、 $\eta = \eta_1$ から導電媒体中に流出する I_{η_1} と導電媒体中から $\eta = -\eta_2$ に流入する $I_{-\eta_2}$ と相等しいとすれば $I_{\eta_1} = I_{-\eta_2}$ これに (5.1.25) と (5.1.14) を入れて V_{s2} について解けば

$$V_{s2} = -V \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_2-\eta_1)} - e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_2+\eta_1)}}{\sinh \frac{2n+1}{2}(\eta_1+\eta_2)} \bigg/ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_2-\eta_1)} + e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_2+\eta_1)} - 2e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_1+\eta_2)}}{\sinh \frac{2n+1}{2}(\eta_1+\eta_2)}$$

従つて

$$V_{s1} = V_{s2} + V = V \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_2-\eta_1)} - e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_2+\eta_1)}}{\sinh \frac{2n+1}{2}(\eta_1+\eta_2)} \bigg/ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_2-\eta_1)} + e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_2+\eta_1)} - 2e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_1+\eta_2)}}{\sinh \frac{2n+1}{2}(\eta_1+\eta_2)}$$

上の V_{s1} と V_{s2} の値を、例えば (5.1.25) の第1式に入れると I_{η_1} が求まり、又、両球間の導電媒体の抵抗 r は $r = V/I_{\eta_1}$ であるから、

$$\begin{aligned}
r &= \frac{\rho}{4\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_2-\eta_1)} + e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_2+\eta_1)} - 2e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_1+\eta_2)}}{\sinh \frac{2n+1}{2}(\eta_1+\eta_2)} \bigg/ \\
& \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_2-\eta_1)} - e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_2+\eta_1)}}{\sinh \frac{2n+1}{2}(\eta_1+\eta_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_2-\eta_1)}}{\sinh \frac{2n+1}{2}(\eta_1+\eta_2)} \right. \\
& \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_2-\eta_1)} - e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_2+\eta_1)}}{\sinh \frac{2n+1}{2}(\eta_1+\eta_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2n+1}{2}(\eta_2+\eta_1)}}{\sinh \frac{2n+1}{2}(\eta_1+\eta_2)} \right\} \quad (5.1.26)
\end{aligned}$$

特別な場合として、まず、2球が等大ならば (5.1.26) で $\eta_2 = \eta_1$ とおくと、このときの抵抗 r' は、

$$r' = \frac{\rho}{2\pi a} \bigg/ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + e^{-(2n+1)\eta_1}}{\sinh(2n+1)\eta_1} = \frac{\rho}{2\pi a} \bigg/ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2n+1}{2}\eta_1} \operatorname{cosech} \frac{2n+1}{2}\eta_1 \quad (5.1.26')$$

次に一方の球をその儘とし、他方の球をその中心線の垂直2等分面にしたときは(5.1.26)で、例えば $\eta_2=0$ とおけばよく、そのときの抵抗 r'' は

$$r'' = \frac{\rho}{4\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2n+1}{2}\eta_1} \operatorname{cosech} \frac{2n+1}{2}\eta_1 \quad (5.1.26'')$$

上の両式から

$$r' = 2r'' \quad (5.1.27)$$

(3) 既往近似式の由来とその欠陥 2球の半径をそれぞれ R_1 cm, R_2 cm; 中心距離を L cm とすれば抵抗 $r_1 \Omega$ は次の近似式で与えられることを我々は知つている。

$$r_1 = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{2}{L} \right)^{(4)} \quad (5.1.28)$$

まず、本式はどうして得られたかを推断しよう。 η_1 = 一定, η_2 = 一定の各球の半径と中心距離の比は、第1節で知るように、それぞれ $\frac{a \operatorname{cosech} \eta_1}{a \coth \eta_1 + a \coth \eta_2} = \frac{\sinh \eta_2}{\sinh(\eta_1 + \eta_2)}$, $\frac{a \operatorname{cosech} \eta_2}{a \coth \eta_1 + a \coth \eta_2} = \frac{\sinh \eta_1}{\sinh(\eta_1 + \eta_2)}$ で与えられるから、今 $\eta_1 + \eta_2 \gg 0$ かつ $\frac{\sinh \eta_1}{\sinh(\eta_1 + \eta_2)} \cdot \frac{\sinh \eta_2}{\sinh(\eta_1 + \eta_2)} \ll 1$ と仮定する。このような仮定は幾何学的に言えば、少なくとも一方の球の半径と中心距離の比が非常に小さい場合がこれに当ろう。 $\eta_1 + \eta_2 \gg 0$ から $\sinh \frac{2n+1}{2}(\eta_1 + \eta_2) = \frac{1}{2} e^{\frac{2n+1}{2}(\eta_1 + \eta_2)}$ であるから、(5.1.26) から、結局

$$r = \frac{\rho}{4\pi a} \sinh^2(\eta_1 + \eta_2) \left\{ \sinh \eta_1 + \sinh \eta_2 - \frac{2 \sinh \eta_1 \sinh \eta_2}{\sinh(\eta_1 + \eta_2)} \right\} / \{ \sinh^2(\eta_1 + \eta_2) - \sinh \eta_1 \sinh \eta_2 \}$$

然るに、 $\sinh \eta_1 \sinh \eta_2 \ll \sinh^2(\eta_1 + \eta_2)$ であるから、 $\sinh^2(\eta_1 + \eta_2)$ に対して $\sinh \eta_1 \sinh \eta_2$ を省略すれば

$$\begin{aligned} r &\approx (r_1) = \frac{\rho}{4\pi a} \left\{ \sinh \eta_1 + \sinh \eta_2 - \frac{2 \sinh \eta_1 \sinh \eta_2}{\sinh(\eta_1 + \eta_2)} \right\} \\ &= \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a \operatorname{cosech} \eta_1} + \frac{1}{a \operatorname{cosech} \eta_2} - \frac{2}{a \coth \eta_1 + a \coth \eta_2} \right) = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{2}{L} \right) \end{aligned}$$

となつて既往公式(5.1.28)が得られる。既往公式は、形は至つて簡単で、実際の計算は便利だが、適用範囲が不明の憾みがある。勿論、上述の場合は適用され得ることが分るし、次のような場合は一目して適用されないことも分る。

(1) 2球が接触するとき($R_1 + R_2 = L$ のとき)。このときの r は実際には零となるが、 $\frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{2}{L} \right) = \frac{\rho}{4\pi} \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1 R_2 (R_1 + R_2)} \neq 0$ となつて不成立。

(2) 2球が等大の場合と、一方の球をその儘とし、他方の球をその中心線の垂直2等分面にした場合を比較するとき。前者と後者の抵抗をそれぞれ r_1' と r_1'' とすれば、(5.1.27)によれば、 $r_1' = 2r_1''$ にならねばならぬが、(5.1.28)に $R_2 = R_1$ と置けば、 $r_1' = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{2}{R_1} - \frac{2}{L} \right) \dots \dots (5.1.28')$ 又、この垂直2等分面を半径が無限大(例えば、 $R_2 = +\infty$)の球面と見れば、この球の中心は無限遠点となり、従つて $L = +\infty$ になるから、(5.1.28)はこの場合 $r_1'' = \frac{\rho}{4\pi} \frac{1}{R_1} \dots \dots (5.1.28'')$ となり、(5.1.28')と(5.1.28'')から $r_1' \neq 2r_1''$

(4) 既往近似式の修正式。既往公式は至つて透明な式であるが、以上のような種々の欠陥があるから次のような式を考えて(5.1.28)に代用しようと思う。

$$r_2 = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{2} \frac{1}{R_1 + \frac{l R_1}{R_1 + R_2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{R_2 + \frac{l R_2}{R_1 + R_2}} \right) = \frac{\rho}{8\pi} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left(1 + \frac{l}{L} \right) \quad (5.1.29)$$

ただし、 l は2球面間の距離で、 l を $R_2 : R_1$ の比に内分する点を通り、2球の中心線に垂直な平面を考え、その左右両側の抵抗を各あたかも平面が $\eta=0$ なる平面であるからのようにみなして、上の $\frac{1}{2}r_1$ によつて求めたものである。本式は既往公式と同様、前節の(1)のときには成り立たないが、(2)の場合が成り立っていることは、上の理由から明らかである。又 $R_2 = R_1$ と置いたときの抵抗 r_2 を r_2' と書けば

$$r_2' = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{2}{R_1} - \frac{2}{2R_1 + l} \right) = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{2}{R_1} - \frac{2}{L} \right) \quad (5.1.29')$$

(4) 例えば、抜山平一氏著：電磁気学 第1巻 総論 訂正版 95 頁参照。

となつて (5.1.28') の r_1' と一致する。以上の事柄から (5.1.29) は既往公式の修正式と考えられる。

(5) 2 球が等大のときの近似式の誤差。2 球が等大のとき、即ち、 $R_1=R_2=R$, $\eta_1=\eta_2=\eta$ のときは、近似式 (5.1.28) の r_1 と修正式 (5.1.29) の r_2 とは一致するから、これを厳密解 (5.1.26) の r と比較し、(即ち、この場合は (5.1.28') の r_1' と (5.1.29') の r_2' を (5.1.26') の r' と比較することになる) η の変化にともなつて $r_1'/\frac{\rho}{4\pi a} (=r_2'/\frac{\rho}{4\pi a})$ の誤差が如何に変化するかを検べるに、(5.1.26') から、

$$r'/\frac{\rho}{4\pi a} = 2 \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2n+1}{2}\eta} \operatorname{cosech} \frac{2n+1}{2}\eta \right| \text{ 又、(5.1.28') から } r_1'/\frac{\rho}{4\pi a} = 2 \sinh \eta \left(1 - \frac{1}{2 \cosh \eta} \right)$$

であるから、両式に η の値を入れて計算すれば、第1表と第7図のようになる。なお、 $\eta=0$ のときの誤差は上式その儘では求められないが、次の如くすればよからう。

第1表

η	ℓ/R	$r'/\frac{\rho}{4\pi a}$	$r_1'/\frac{\rho}{4\pi a}$	誤差 $\frac{r_1'-r'}{r'} \times 100(\%)$
0	0	0	0	$+\infty$
0.2	0.04013	0.13887	0.20530	47.83191
0.4	0.16214	0.36548	0.44156	20.81472
0.6	0.37093	0.67181	0.73626	9.59262
0.8	0.67487	1.06492	1.11218	4.43769
1	1.08616	1.55712	1.58881	2.03508

$$\eta \approx 0 \text{ のときは } e^{-\frac{2n+1}{2}\eta} \approx 1, \operatorname{cosech} \frac{2n+1}{2}\eta = \frac{2}{(2n+1)\eta}, \sinh \eta \approx \eta, \cosh \eta \approx 1$$

であるから、 $\eta=0$ のときの誤差 $\frac{r_1'-r'}{r'} = \varepsilon$ は

$$\varepsilon = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{2 \sinh \eta \left(1 - \frac{1}{2 \cosh \eta} \right) - 2 \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2n+1}{2}\eta} \operatorname{cosech} \frac{2n+1}{2}\eta \right|}{2 \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2n+1}{2}\eta} \operatorname{cosech} \frac{2n+1}{2}\eta \right|}$$

$$= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\eta - \eta \left/ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \right.}{\eta \left/ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \right.} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} - 1$$

然るに、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = +\infty$ であるから $\varepsilon \rightarrow +\infty$

さて、第7図において、仮に誤差が10%になるときの η の値を求めると $\eta=0.593$ であるが、誤差の程度を判定する指標として η を用いることは実用上不便であるから、 η の代りに試みに便利な l/R を採用してみると、 $l/R = \frac{L-2R}{R} = 2(\cosh \eta - 1)$ であるから、 l/R の値は第1表と第7図のようになる。即ち、この場合には、誤差が10%以下であるためには l/R が0.36以上であることを要することが分る。

(6) 2球が大きさ異なるときの近似式とその修正式の誤差。2球が大きさ異なる場合には、誤差は η_1 と η_2 の函数であるが、 η_1 —一定、例えば、 $\eta_1=0.2$ とし、 η_2 が0から1まで変るときの誤差を求めて見よう。

厳密解(5.1.26)から容易に $r \left/ \frac{\rho}{4\pi a} \right.$ が求まり、近似式(5.1.28)からは

$$r_1 \left/ \frac{\rho}{4\pi a} \right. = \sinh \eta_1 + \sinh \eta_2 - \frac{2 \sinh \eta_1 \sinh \eta_2}{\sinh(\eta_1 + \eta_2)}$$

$$\text{次に } l \text{ は } l = a \coth \eta_1 + a \cosh \eta_2 - a \operatorname{cosech} \eta_1 - a \operatorname{cosech} \eta_2 = a \left(\frac{\cosh \eta_1 - 1}{\sinh \eta_1} + \frac{\cosh \eta_2 - 1}{\sinh \eta_2} \right)$$

であるから、修正式(5.1.29)から、 $r_2 \left/ \frac{\rho}{4\pi a} \right. = \sinh \eta_1 + \sinh \eta_2$

$$= \frac{1}{\frac{2}{\sinh \eta_1} + \frac{2 \sinh \eta_1}{\sinh \eta_1 + \sinh \eta_2} \left(\frac{\cosh \eta_1 - 1}{\sinh \eta_1} + \frac{\cosh \eta_2 - 1}{\sinh \eta_2} \right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{\sinh \eta_2} + \frac{2 \sinh \eta_2}{\sinh \eta_1 + \sinh \eta_2} \left(\frac{\cosh \eta_1 - 1}{\sinh \eta_1} + \frac{\cosh \eta_2 - 1}{\sinh \eta_2} \right)}$$

が得られ、

$$l/\min(R_1, R_2) = \frac{L - (R_1 + R_2)}{R_1 \text{ 又は } R_2} = \cosh \eta_1 - 1 + \frac{\sinh \eta_1}{\sinh \eta_2} (\cosh \eta_2 - 1) \quad (\eta_1 \ll \eta_2 \text{ のとき})$$

$$= \cosh \eta_2 - 1 + \frac{\sinh \eta_2}{\sinh \eta_1} (\cosh \eta_1 - 1) \quad (\eta \ll \eta_1 \text{ のとき})$$

今、 $\eta_1=0.2$ として $\eta_2=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ のときの $r \left/ \frac{\rho}{4\pi a} \right.$ 、 $r_1 \left/ \frac{\rho}{4\pi a} \right.$ と $r_2 \left/ \frac{\rho}{4\pi a} \right.$ を計算し、近似式と修正式の誤差 $\frac{r_1 - r}{r} \times 100$ と $\frac{r_2 - r}{r} \times 100$ を求めると、第2表と第8図のようになる。なお、同表と同図には $l/\min(R_1, R_2)$ をも求めてある。

同図によれば、 $\eta_2=0.7$ のとき、修正式の誤差は10%、又 $l/\min(R_1, R_2)=0.33$ で、 η_2 がこれより大なるにつれ、 $l/\min(R_1, R_2)$ は漸増し、誤差は漸減するが、 η_2 が0から1までの間では近似式の誤差が10%になる所が現われぬし、かつ、この誤差曲線は漸減するが、その速度は図から分るように、 η_2 が0.2より大となれば可成り小となるから、 $l/\min(R_1, R_2)$ が可成り大(η_2 が可成り大となることから推定して)なる所でなければ誤

第2表 ($\eta_1=0.2$)

η_2	$l/\min(R_1, R_2)$	$r/\frac{\rho}{4\pi a}$	$r_1/\frac{\rho}{4\pi a}$	$\frac{r_1-r}{r} \times 100 (\%)$	$r_2/\frac{\rho}{4\pi a}$	$\frac{r_2-r}{r} \times 100 (\%)$
0	0.01506 27	0.06944	0.20134	189.95952	0.10265	47.83902
0.2	0.04013 36	0.13887	0.20530	47.83902	0.20530	47.83902
0.4	0.12201 13	0.25421	0.35229	38.58886	0.32353	27.26926
0.6	0.24891 93	0.41232	0.54933	33.22957	0.47149	14.35131
0.8	0.42595 08	0.61311	0.78514	28.07597	0.66094	7.80122
1	0.66021 08	0.86314	1.06303	23.15941	0.90172	4.46999

(5) $\min(R_1, R_2)$ とは R_1, R_2 の内の小なる方の値を意味する。

$$\{x + a \coth(c - V')\}^2 + y^2 = a^2 \operatorname{cosech}^2(c - V') \quad (5.2.3)$$

よつて点 C , 即ち, $(-b, 0)$ を中心とし, 半径 R の円周上において

$$V_s' = 0 \quad (5.2.4)$$

$$\text{なるためには} \quad b = a \coth c = l - a, \quad a \operatorname{cosech} c = R \quad (5.2.5)$$

$$\text{これから} \quad \frac{R}{l} = \frac{a \operatorname{cosech} c}{a(1 + \coth c)} = e^{-c}$$

$$\text{従つて} \quad a = R \sinh c = \frac{R}{2} \left(\frac{l}{R} - \frac{R}{l} \right) = \frac{l}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{R}{l} \right)^2 \right\}$$

$$\text{よつて} \quad \frac{a}{l - a - R \cos \theta} = \frac{1 - \left(\frac{R}{l} \right)^2}{1 + \left(\frac{R}{l} \right)^2 - \frac{2R}{l} \cos \theta} \equiv 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{l} \right)^n \cos n\theta \quad (5.2.6)$$

次に, (5.2.2) の V' に相応する i_s' を求めるのに, C 点を極とする極座標 (r, θ) を第 10 図のように取れば

$$i_s' = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial V'}{\partial r} \right]_{r=R} \quad (5.2.7)$$

然るに, $x = r \cos \theta + b$, $y = r \sin \theta$ であるから, (5.2.5) を用いれば

$$\frac{\partial V'}{\partial r} = \frac{\partial V'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial V'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{(2a - l) \cos \theta + r}{(2a - l + r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta} + \frac{l \cos \theta - r}{(l - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta}$$

$$\text{これを (5.2.6) に代入して} \quad i_s' = -\frac{a}{\rho R(l - a - R \cos \theta)}$$

$$(5.2.6) \text{ によれば} \quad i_s' = -\frac{1}{\rho R} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{l} \right)^n \cos n\theta \right\} \quad (5.2.8)$$

(2) 円周 R 上において任意の電流分布をなし, 無限の遠方で零となる特解 V'' を求め, そのときの V_s'' と i_s'' を求める。

C を極とする極座標 (r, θ) を用いると, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ となるから

$$V'' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n a_n \cos n\theta$$

は所期の特解である。ただし a_n は定数である。従つて

$$V_s'' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta \quad (5.2.9)$$

$$\text{又, } \frac{\partial V''}{\partial r} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{R} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} a_n \cos n\theta \text{ であるから}$$

$$i_s'' = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial V''}{\partial r} \right]_{r=R} = \frac{1}{\rho R} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos n\theta \quad (5.2.10)$$

(3) (7) 上記 (1) と (2) の場合を重ね合せて $V_s = V_s' + V_s''$, $i_s = i_s' + i_s''$ とし, 境界条件 $V_m = V_s + k i_s$ をみたすように a_n を決定する。

即ち, (5.2.4), (5.2.8), (5.2.9) と (5.2.10) から

$$V_s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta, \quad i_s = \frac{1}{\rho R} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n a_n - 2 \left(\frac{R}{l} \right)^n \right\} \cos n\theta - 1 \right] \quad (5.2.11)$$

$$\text{であるから, 境界条件は} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + \frac{k}{\rho R} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n a_n - 2 \left(\frac{R}{l} \right)^n \right\} \cos n\theta - 1 \right] = V_m$$

$$\begin{aligned} (6) \quad (5.2.2) \text{ から } e^{-2(c-V')} &= \frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2} \text{ よつて } x^2 + 2x a \frac{e^{c-V'} + e^{-(c-V')}}{e^{c-V'} - e^{-(c-V')}} + a^2 \left\{ \frac{e^{c-V'} + e^{-(c-V')}}{e^{c-V'} - e^{-(c-V')}} \right\}^2 + y^2 \\ &= a^2 \left[\left\{ \frac{e^{c-V'} + e^{-(c-V')}}{e^{c-V'} - e^{-(c-V')}} \right\}^2 - 1 \right] \text{ 即ち, (5.2.3) となる。} \end{aligned}$$

(7) 本項では簡単の為, $V_{s2}, i_{s2}, k_2, V_{m2}$ の代りにそれぞれ V_s, i_s, k, V_m と書くことにした。

即ち
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{nk}{\rho R} \right) a_n - \frac{2k}{\rho R} \left(\frac{R}{l} \right)^n \right\} \cos n\theta = V_m + \frac{k}{\rho R}$$

本式が θ の値の如何にかかわらず成立するためには

$$V_m + \frac{k}{\rho R} = 0 \text{ と } \left(1 + \frac{nk}{\rho R} \right) a_n - \frac{2k}{\rho R} \left(\frac{R}{l} \right)^n = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

従つて
$$V_m = -\frac{k}{\rho R}, \quad a_n = \frac{\frac{2k}{\rho R} \left(\frac{R}{l} \right)^n}{1 + \frac{nk}{\rho R}} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (5.2.12)$$

よつて、上の第2式を (5.2.11) の第2式に入れれば

$$i_s = -\frac{1}{\rho R} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{nk}{\rho R}} \left(\frac{R}{l} \right)^n \cos n\theta \right\} \quad (5.2.13)$$

なお、円周 R の表面における平均電流を i_m とすれば、 $i_m = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi i_s R d\theta$ 、これに (5.2.13) を入れて計算すれば $i_m = -\frac{1}{\rho R}$ 従つてこれと (5.2.13) から

$$\frac{i_s}{i_m} = -1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{nk}{\rho R}} \left(\frac{R}{l} \right)^n \cos n\theta \quad (5.2.14)$$

(4) この (1) と (2) の場合を重ね合せた (3) の場合は所期の目的に適する解であることを言わう。

(1) と (2) を重ね合せた $V' + V''$ と $-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial V'}{\partial r} + \frac{\partial V''}{\partial r} \right)$ から、点 A においては $V = +\infty$ であり、又、電流密度は θ の偶函数であるから X 軸に関して対称であることが分る。よつて取残された問題は陽極 A から流出する全電流 I_A は、半径 R の円 C の陰極に流入する全電流 I_C に相等しいことである。

第11図

さて、第11図において、 A を中心とする円 C の外方にある円を描き、その半径を r' (r' は如何に小さくともよい) この円周上に点 $P(x, y)$ を、又、 $A'(-a, 0)$ をとり、角 $PAA' = \omega$ で表わせば、(5.2.2) から

$$V' = \frac{1}{2} \log \frac{r'^2 + 4a^2 - 4ar' \cos \omega}{r'^2} + c$$

故に、円周 r' 上の電流密度 i_r' は

$$i_r' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V'}{\partial r'} = \frac{2a(2a - r' \cos \omega)}{\rho r' (r'^2 + 4a^2 - 4ar' \cos \omega)}$$

随つて、

$$I_A = \int_0^{2\pi} i_r' r' d\omega = \int_0^\pi i_r' r' d\omega + \int_\pi^{2\pi} i_r' r' d\omega = \frac{2\pi}{\rho}$$

又、

$$I_C = -\int_0^{2\pi} i_s R d\theta$$

であるから、(5.2.13) を入れて計算すれば $I_C = \frac{2\pi}{\rho}$

依つて

$$I_A = I_C$$

(5) 一般に $\frac{k}{\rho R} = \frac{\alpha}{\beta}$ (ただし、 α と β は正の整数で、互に素とする) の形のときは、(5.2.14) の右辺の級数は簡単式となることを述べよう。(5.2.14) の右辺の $\frac{k}{\rho R}$ に $\frac{\alpha}{\beta}$ を入れれば次のようになる。

$$\frac{i_s}{i_m} = -1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta}{n\alpha + \beta} \left(\frac{R}{l} \right)^n \cos n\theta = -1 + 2 \Re \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta}{n\alpha + \beta} \left(\frac{R}{l} e^{i\theta} \right)^n$$

ここに、 $i = \sqrt{-1}$ で $\Re \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta}{n\alpha + \beta} \left(\frac{R}{l} e^{i\theta} \right)^n$ は $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta}{n\alpha + \beta} \left(\frac{R}{l} e^{i\theta} \right)^n$ の実数部を表わすものとする。以下同様。

$$\frac{R}{l} e^{i\theta} = w \text{ とすれば, } \frac{R}{l} < 1 \text{ のときは } |w| < 1 \text{ であるから } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta}{n\alpha + \beta} w^n = f(w) \text{ と置けば } w^\beta f(w)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta}{n\alpha + \beta} w^{n\alpha + \beta} - \frac{d}{dw} \{w^\beta f(w^\alpha)\} = \beta \sum_{n=0}^{\infty} w^{n\alpha + \beta - 1} = \frac{\beta w^{\beta-1}}{1-w^\alpha}$$

$$\text{故に} \quad w^\beta f(w^\alpha) = \beta \int \frac{w^{\beta-1}}{1-w^\alpha} dw + K_1 \quad (5.2.15)$$

ただし、 K_1 は積分定数である。

上式の右辺の積分は w の有理函数の積分であるから、初等函数で表わすことが出来る。この結果を簡単な $g(w)$ と書けば

$$f(w^\alpha) = \frac{\beta g(w)}{w^\beta} + \frac{K_1}{w^\beta}$$

故に、 w^α の代りに w と書けば

$$f(w) = \frac{\beta g(w^{1/\alpha})}{w^{\beta/\alpha}} + \frac{K_1}{w^{\beta/\alpha}}$$

上式は $0 < |w| < 1$ の w の任意の値に対して成立することから K_1 が求まり、従つて、 $f(w)$ が簡単な式で表わされる。

$$\text{依つて、} \quad \frac{i_s}{i_m} = -1 + 2 \Re \left\{ \frac{\beta g(w^{1/\alpha})}{w^{\beta/\alpha}} + \frac{K_1}{w^{\beta/\alpha}} \right\} \quad (5.2.16)$$

も簡単な式となる。

$$\text{一例として、} \quad \frac{k}{\rho R} = \frac{2}{3} \text{ のときは} \quad w^3 f(w^2) = 3 \left(-w + \frac{1}{2} \log_e \frac{1+w}{1-w} \right) + K_1$$

$$\text{から} \quad f(w^2) = 3 \left(-\frac{1}{w^2} + \frac{1}{2w^3} \log \frac{1+w}{1-w} \right) + \frac{K_1}{w^3}$$

$$\text{従つて、} \quad f(w) = 3 \left(-\frac{1}{w} + \frac{1}{2w^{3/2}} \log \frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}} \right) + \frac{K_1}{w^{3/2}}$$

$$\text{即ち、} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2n+3} w^n = 3 \left(-\frac{1}{w} + \frac{3}{2w^{3/2}} \log \frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}} \right) + \frac{K_1}{w^{3/2}}$$

右辺の $\log \frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}}$ を展開すれば、左辺とから $K_1=0$ となるから、結局

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2n+3} w^n = 3 \left(-\frac{1}{w} + \frac{1}{2w^{3/2}} \log \frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}} \right)$$

よつて

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2n+3} w^n &= 3 \left(-\frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\frac{R}{l}} + \frac{\cos \frac{3\theta}{2} - i \sin \frac{3\theta}{2}}{2 \left(\frac{R}{l} \right)^{\frac{3}{2}}} \log \frac{1 - \frac{R}{l} + 2i\sqrt{\frac{R}{l}} \sin \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{R}{l} - 2i\sqrt{\frac{R}{l}} \cos \frac{\theta}{2}} \right) \\ &= 3 \left(-\frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\frac{R}{l}} + \frac{\cos \frac{3\theta}{2} - i \sin \frac{3\theta}{2}}{2 \left(\frac{R}{l} \right)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{1}{2} \log_e \frac{\left(1 + \frac{R}{l} \right)^2 + \frac{4R}{l} \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\left(1 + \frac{R}{l} - 2i\sqrt{\frac{R}{l}} \cos \frac{\theta}{2} \right)^2} + i \tan^{-1} \frac{2\sqrt{\frac{R}{l}} \sin \frac{\theta}{2}}{1 - \frac{R}{l}} \right\} \right) \end{aligned}$$

から

$$\Re \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2n+3} w^n = 3 \left(-\frac{\cos \theta}{\frac{R}{l}} + \frac{\cos \frac{3\theta}{2}}{4 \left(\frac{R}{l} \right)^{\frac{3}{2}}} \log_e \frac{1 + \left(\frac{R}{l} \right)^2 - \frac{2R}{l} \cos \theta}{\left(1 + \frac{R}{l} - 2\sqrt{\frac{R}{l}} \cos \frac{\theta}{2} \right)^2} + \frac{\sin \frac{3\theta}{2}}{2 \left(\frac{R}{l} \right)^{\frac{3}{2}}} \tan^{-1} \frac{2\sqrt{\frac{R}{l}} \sin \frac{\theta}{2}}{1 - \frac{R}{l}} \right)$$

故に

$$\frac{i_s}{i_m} = -1 + 6 \left(-\frac{\cos \theta}{\frac{R}{l}} + \frac{\cos \frac{3\theta}{2}}{4 \left(\frac{R}{l} \right)^{\frac{3}{2}}} \log_e \frac{1 + \left(\frac{R}{l} \right)^2 - \frac{2R}{l} \cos \theta}{\left(1 + \frac{R}{l} - 2\sqrt{\frac{R}{l}} \cos \frac{\theta}{2} \right)^2} + \frac{\sin \frac{3\theta}{2}}{2 \left(\frac{R}{l} \right)^{\frac{3}{2}}} \tan^{-1} \frac{2\sqrt{\frac{R}{l}} \sin \frac{\theta}{2}}{1 - \frac{R}{l}} \right)$$

(6) 以上で、円周 R 上に於ける所期の電流分布は知れたが、分布の不均一の程度を見る為に、電流密度が最大及び最小となる点 E と F の電流密度 i_E と i_F と全円周上の平均電流密度 i_m の比 i_E/i_m と i_F/i_m が $\frac{k}{\rho R}$ と $\frac{R}{l}$ の値によつて如何に変るかを調べる。

$$(5.2.14) \text{ から } \frac{i_E}{i_m} = \frac{[i_s]_{\theta=0}}{i_m} = -1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{nk}{\rho R}} \left(\frac{R}{l} \right)^n \quad (5.2.14')$$

$$\frac{i_F}{i_m} = \frac{[i_s]_{\theta=\pi}}{i_m} = -1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{nk}{\rho R}} \left(-\frac{R}{l} \right)^n \quad (5.2.14'')$$

右辺の級数は $\frac{k}{\rho R} = \frac{\alpha}{\beta}$ の形のときは (5) によつて簡単な形になり、例えば、 $\frac{k}{\rho R} = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 2$ と 4 のときの $\frac{i_E}{i_m}$ と $\frac{i_F}{i_m}$ を求めれば、

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{k}{\rho R} = 0 \text{ のとき} \quad & \frac{i_E}{i_m} = \frac{1+\xi}{1-\xi}, \quad \frac{i_F}{i_m} = \frac{1-\xi}{1+\xi} \\ \text{(ii)} \quad \frac{k}{\rho R} = \frac{1}{3} \text{ のとき} \quad & \frac{i_E}{i_m} = -1 - 6 \left\{ \frac{1}{2\xi} + \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\xi^3} \log_e (1-\xi) \right\}, \quad \frac{i_F}{i_m} = -1 + 6 \left\{ \frac{1}{2\xi} - \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\xi^3} \log_e (1+\xi) \right\} \\ \text{(iii)} \quad \frac{k}{\rho R} = \frac{2}{3} \text{ のとき} \quad & \frac{i_E}{i_m} = -1 - 6 \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{2\sqrt{\xi^3}} \log_e \frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}} \right), \quad \frac{i_F}{i_m} = -1 + 6 \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\sqrt{\xi^3}} \tan^{-1} \sqrt{\xi} \right) \\ \text{(iv)} \quad \frac{k}{\rho R} = 1 \text{ のとき} \quad & \frac{i_E}{i_m} = -1 - \frac{2}{\xi} \log_e (1-\xi), \quad \frac{i_F}{i_m} = -1 + \frac{2}{\xi} \log_e (1+\xi) \\ \text{(v)} \quad \frac{k}{\rho R} = 2 \text{ のとき} \quad & \frac{i_E}{i_m} = -1 + \frac{1}{\sqrt{\xi}} \log_e \frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}}, \quad \frac{i_F}{i_m} = -1 + \frac{2}{\sqrt{\xi}} \tan^{-1} \sqrt{\xi} \\ \text{(vi)} \quad \frac{k}{\rho R} = 4 \text{ のとき} \quad & \frac{i_E}{i_m} = -1 + \frac{1}{\sqrt[4]{\xi}} \tan^{-1} \sqrt[4]{\xi} + \frac{1}{2\sqrt[4]{\xi}} \log_e \frac{1+\sqrt[4]{\xi}}{1-\sqrt[4]{\xi}}, \\ & \frac{i_F}{i_m} = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\xi}} \left(\tanh^{-1} \frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{\xi}}{1+\xi} + \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{\xi}}{1-\sqrt{\xi}} \right) \end{aligned}$$

第3表⁽⁸⁾

ξ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	$1^{(9)}$
0	1	1.222	1.5	1.857	2.333	3	4	5.667	9	$+\infty^*$	
	1	0.818	0.667	0.538	0.429	0.333	0.25	0.176	0.111	0.053	0
$\frac{1}{3}$	1	1.163	1.358	1.594	1.890	2.271	2.786	3.530	4.736	7.211	$+\infty^*$
	1	0.861	0.741	0.637	0.544	0.462	0.389	0.323	0.263	0.209	0.159
$\frac{2}{3}$	1	1.129	1.281	1.461	1.681	1.957	2.319	2.821	3.605	5.112	$+\infty^*$
	1	0.888	0.790	0.703	0.625	0.555	0.492	0.434	0.381	0.332	0.288
1	1	1.105	1.231	1.380	1.564	1.773	2.054	2.437	3.024	4.117	$+\infty^*$
	1	0.906	0.823	0.749	0.682	0.622	0.567	0.516	0.469	0.426	0.386
2	1	1.069	1.151	1.225	1.353	1.495	1.663	1.897	2.224	2.946	$+\infty^*$
	1	0.936	0.880	0.831	0.782	0.741	0.702	0.666	0.631	0.601	0.571
4	1	1.042	1.090	1.146	1.210	1.287	1.383	1.511	1.693	2.015	$+\infty^*$
	1	0.962	0.928	0.897	0.868	0.841	0.817	0.794	0.773	0.753	0.734
$+\infty$					1	1					

但し、 $\xi = \frac{k}{\rho R}$ とする。

- (8) 本表中2段に記載した数値は上段は i_E/i_m 下段は i_F/i_m の数値を表わす。なお特に $\xi=0$ のときの $\frac{\rho a}{k}$ の各有限値に対する i_E/i_m と i_F/i_m の数値はそれぞれ式 (5.2.14') と (5.2.14'') からこれを求めた。
- (9) $+\infty^*$ は $\xi \rightarrow 1-$ のとき i_E/i_m の値が限りなく大となることを示す。

第12図
 i_e/i_m

第13図
 i_f/i_m

ただし、 $\frac{R}{l} = \xi$ で、唯今の問題では、当然、 $0 < \xi < 1$ である。

各々の場合の $\frac{R}{l}$ が 0 より 1 まで変化するときの i_e/i_m と i_f/i_m の模様を計算すれば第 3 表のように、図示すれば第 12 図と第 13 図のようになる。

(4) 例題。今、参考の為、 $k/\rho R$ の値について考えるに、海水では $\rho = 20 \Omega \text{ cm}$ で、被防蝕金物を軟鋼とし、表面流速を 100 m/min 以上とすれば、ほぼ $k = 700 \Omega \text{ cm}^2$ であるから、 $R = 35 \text{ cm}$ のとき $k/\rho R = 1$ となる。

然るに、 $\frac{k}{\rho R} = 1$ のときの $\frac{i_s}{i_m}$ は (3) の (5) の方法によれば、

$$\frac{i_s}{i_m} = -1 - \frac{\cos \theta}{R/l} \log_e \left\{ 1 - \frac{2R}{l} \cos \theta + \left(\frac{R}{l} \right)^2 \right\} + \frac{2 \sin \theta}{R/l} \tan^{-1} \frac{\frac{R}{l} \sin \theta}{1 - \frac{R}{l} \cos \theta}$$

であるから、仮りに、 $l = 70 \text{ cm}$ 、即ち、 $\frac{R}{l} = \frac{1}{2}$ とすれば、

$$\frac{i_s}{i_m} = -1 - 2 \cos \theta \log_e \left(\frac{5}{4} - \cos \theta \right) + 4 \sin \theta \tan^{-1} \frac{\sin \theta}{2 - \cos \theta}$$

本式を用いて、 θ の種々の値に対する $\frac{i_s}{i_m}$ の値を計算すれば第 4 表のように、これを図示すれば第 14 図の

第 4 表 i_s/i_m

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
1	1.773	1.488	1.279	1.101	0.855	0.715	0.672	0.628	0.622
0	3	1.953	1.381	1	0.6	0.429	0.383	0.354	0.333

但し、 $R = \frac{k}{\rho}$ とする。

$$r \geq 0, \pi \geq \theta \geq 0, 2\pi > \varphi \geq 0$$

である。例えば第 15 図の点 C を直角座標の原点、点 A を z 軸の正の部分にあるものとすれば、 A の極座標は $(l, \varphi, 0)$ である。(第 16 図)。

次に、この問題の解法は例題 1. のように、先ず、下に述べる (1) と (2) の二つの場合を解き、次に、(3) において之を重ね合せて所期の目的に適する解を導こう。

(1) 点 $A(l, \varphi, 0)$ で $V = +\infty$ とし、他のすべての点で $\Delta V = 0$ を満足する $\Delta V = 0$ の特解 V' を求め、それに応ずる球面 $C(R)$ 上の電位 V_s' と電流密度 i_s' の式を作る。

点 C を極とする極座標において、任意の 1 点 B を採り、 B において $\Delta V = 0$ を満足し、 $A(l, \varphi, 0)$ において $V = +\infty$ となり、かつ、 A, C を結ぶ直線 (即ち、 z 軸) に関して対称な電位 V の一つ V' は明らかに

$$V' = c_0 + \frac{c_1}{\sqrt{1 - \frac{2r}{l} \cos \theta + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} \quad (5.3.1)$$

ここに c_0 は後述の条件により、又 c_1 は点 A から流出する電流の量によつて定まる定数で、 r は CB の長さで、 θ は $\vec{CB}$ が $\vec{Cz}$ となす角⁽¹¹⁾である(第 16 図)。なお、 B は任意の点であるから、球 $C(R)$ 外にあつて宜敷く、かつ、球面 $C(R)$ に何程接近していても宜敷い。故に、式 (5.3.1) に応ずる V_s' と i_s' は定義から

$$V_s' = [V']_{r \rightarrow R+} = c_0 + \frac{c_1}{\sqrt{1 - 2\xi\mu + \xi^2}}$$

ここに

$$\xi = \frac{R}{l} (< 1)$$

かつ

$$\mu = \cos \theta \quad (5.3.2)$$

$$\text{然るに、} \xi < 1 \text{ のときは、} (1 - 2\xi\mu + \xi^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n P_n(\mu) \quad (5.3.3)$$

であるから、上式は

$$V_s' = c_0 + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n P_n(\mu) \quad (5.3.4)$$

と書ける。ただし、 $P_n(\mu)$ は n 次の第 1 種帯球函数で、一般に、

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n$$

で定義されるものである。従つて、(5.3.4) に応ずる電流密度 i_s' は

$$i_s' = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial V'}{\partial r} \right)_{r \rightarrow R+} = -\frac{c_1}{\rho R} \sum_{n=1}^{\infty} n \xi^n P_n(\mu) \quad (5.3.5)$$

(2) 球面 $C(R)$ 上において、 z 軸に対称な電流密度分布をなし、球 $C(R)$ 外では到る処 $\Delta V = 0$ を満足する $\Delta V = 0$ の特解 V'' を求め、それに応ずる球面 $C(R)$ 上の電位 V_s'' と電流密度 i_s'' の式を作る。

このような解を V'' とすれば、 V'' は球面 $C(R)$ 外では到る処 $\Delta V'' = 0$ で、かつ、 z 軸に関して対称であるから、 V'' は θ の偶函数、随つて μ の函数であればよい。この条件に適するものの一つとして次の如き函数を考える。

$$V'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n(\mu)$$

ただし、 a_n は後述の条件から定めらるべき定数である。よつて、 V_s'' の定義から

$$V_s'' = (V'')_{r \rightarrow R+} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\mu) \quad (5.3.6)$$

(11) 詳しく言えば θ は Cz, CB を含む平面上において、半直線 Cz が C を中心として時計の針の進む方向と同方向に CB の位置まで廻転して出来る 2π より小なる角である。

で、之に應ずる電流密度 i_s'' は
$$i_s'' = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial V''}{\partial r} \right)_{r \rightarrow R+} = \frac{1}{\rho R} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n P_n(\mu) \quad (5.3.7)$$

(3) $V_s = V_s' + V_s''$, $i_s = i_s' + i_s''$ とし、境界条件 $V_s + k i_s = 0$ を満たすように a_n を定める。

まず、 $P_0(\mu) = 1$ なることに注意すれば、(5.3.4), (5.3.5), (5.3.9) と (5.3.7) から

$$V_s = V_s' + V_s'' = a_0 + c_0 + c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + c_1 \xi^n) P_n(\mu)$$

$$\text{と} \quad i_s = i_s' + i_s'' = \frac{1}{\rho R} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (n+1) a_n - c_1 n \xi^n \} P_n(\mu) \right] \quad (5.3.8)$$

となるから、条件 $V_s + k i_s = 0$ は
$$a_0(1 + k_2) + c_0 + c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \{ 1 + (n+1) k_2 \} + c_1 \xi^n (1 - n k_2) \right] P_n(\mu) = 0$$

ただし、 $k_2 = \frac{k}{\rho R}$ とする。

本式は θ , 従つて、 $P_n(\mu)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) の値の如何に拘わらず成立するから、その条件として

$$a_0(1 + k_2) + c_0 + c_1 = 0, \quad a_n \{ 1 + (n+1) k_2 \} + c_1 \xi^n (1 - n k_2) = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

が成立する。これから $a_0 = -\frac{c_0 + c_1}{1 + k_2}$, かつ $a_n = -\frac{c_1 \xi^n (1 - n k_2)}{1 + (n+1) k_2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

となるから、(5.3.8) の右辺に上の a_n (ただし、 $n=0, 1, 2, \dots$) の値を入れて簡単にすれば

$$i_s = -\frac{1}{\rho R} \left\{ \frac{c_0 + c_1}{1 + k_2} + c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{1 + (n+1) k_2} \xi^n P_n(\mu) \right\} \quad (5.3.8')$$

(4) c_0 の値を定める。

(1), (2) の場合を重ね合せた (3) の場合は点 A において $V = +\infty$ にして、 i_s は (5.3.8') から分るように μ の函数、従つて、 θ の偶函数であるから、球面 $C(R)$ 上の電流分布は z 軸に関して対称である。今、点 A を陽極とし、球面 $C(R)$ を陰極とみなそう。このときは、 A から流出する全電流は悉く球 $C(R)$ に流入しなければならぬから、 A より出る全電流 I_A は球 $C(R)$ に入る全電流 I_C に相等しい筈である。このことから係数 c_0 の値を定めることが出来る。

さて、第 16 図において、 AB の長さを r' とし、球 $A(r')$ が球 $C(R)$ の全く外方にあるように r' を十分小さくとり、このときの球面 $A(r')$ を通過する電流について考えるに、 i'' はこれを球面全体に積分すれば明かに零になるから、 i' のみについて考えれば宜しい。

然るに、

$$r'^2 = l^2 + r^2 - 2lr \cos \theta$$

$$\text{であらう、(5.3.1) は} \quad V' = c_0 + c_1 \frac{l}{r'} \quad (5.3.9)$$

となるから、之に應ずる電流密度 $i_{r'}$ は上式を用いて次のようになる。

$$i_{r'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V'}{\partial r'} = \frac{c_1 l}{\rho r'^2} \quad (5.3.10)$$

r' は十分小さいから、球面 $A(r')$ 上の電流密度は一様と見てよい。故に球面 $A(r')$ 上の全電流は

$$i_{r'} \times (\text{球の表面積}) = 4\pi r'^2 i_{r'}$$

これは r' が如何に小さくても言えるから、上式は結局陽極 A から出る全電流 I_A に等しい。これから、上式

$$\text{に (5.3.10) を入れて} \quad I_A = \frac{4\pi c_1 l}{\rho} \quad (5.3.11)$$

次に、球面 $C(R)$ 上の全電流 I_C を (5.3.8') から求めよう。今、この球面の面積素を $d\sigma$ とすれば

$$d\sigma = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (5.3.12)$$

で

$$I_C = -\iint i_s d\sigma$$

である。ただし、上の二重積分は球面 $C(R)$ の全体について行うものであるから、 θ については 0 から π まで、 φ については 0 から 2π までの積分にする。上式に (5.3.8') と (5.3.12) を入れれば

$$I_C = \frac{R}{\rho} \left\{ \frac{c_0 + c_1}{1 + k_2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta + c_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{1 + (n+1) k_2} \xi^n P_n(\mu) \sin \theta d\theta \right\}$$

然るに、(5.3.2) から $d\mu = -\sin \theta d\theta$ であるから、上式の右辺は

$$\frac{4\pi R}{\rho} \left\{ \frac{c_0 + c_1}{1 + \varepsilon_0} + \frac{c_1}{2} \int_{-1}^{+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{1+(n+1)\varepsilon_0} \xi^n P_n(\mu) d\mu \right\}$$

$$\text{又} \quad \int_{-1}^{+1} P_n(\mu) d\mu = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{となるから、結局、} \quad I_C = \frac{4\pi R}{\rho} \frac{c_0 + c_1}{1 + \varepsilon_0} \quad (5.3.13)$$

c_0 を定める為に $I_A = I_C$ と置き、これに (5.3.11) と (5.3.13) を代入すれば

$$c_0 = c_1 \left\{ \frac{1}{\xi} (1 + \varepsilon_0) - 1 \right\}$$

故に、(5.3.8') から

$$i_s = -\frac{c_1}{\rho R} \left\{ \frac{1}{\xi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{1+(n+1)\varepsilon_0} \xi^n P_n(\mu) \right\} = -\frac{c_1 l}{\rho R^2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{1+(n+1)\varepsilon_0} \xi^{n+1} P_n(\mu) \right\} \quad (5.3.8'')$$

なお、球面 $C(R)$ 上の平均電流密度 i_m は

$$i_m = -\frac{I_C}{4\pi R^2} = -\frac{I_A}{4\pi R^2} = -\frac{4\pi c_1 l}{\rho} \frac{1}{4\pi R^2} = -\frac{c_1 l}{\rho R^2}$$

であるから、これと (5.3.8'') とから

$$\frac{i_s}{i_m} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{1+(n+1)\varepsilon_0} \xi^{n+1} P_n(\mu) \quad (5.3.14)$$

又、球面 $C(R)$ 上の、 A から最も近い点を E 、最も遠い点を F とすれば、 E と F においては、それぞれ $\theta=0$ と π であることは明らかである。⁽¹²⁾ よつて、これ等の場合の μ の値はそれぞれ $+1$ と -1 である。
 $P_n(1)=1$, $P_n(-1)=(-1)^n P_n(1)$ であるから、 E と F における電流密度 i_E と i_F と i_m との比は (5.3.14)

$$\text{から、特に} \quad \frac{i_E}{i_m} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{1+(n+1)\varepsilon_0} \xi^{n+1} \quad (5.3.14a)$$

$$\text{と} \quad \frac{i_F}{i_m} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{1+(n+1)\varepsilon_0} \xi^{n+1} \quad (5.3.14b)$$

(5) 一般に、 $\varepsilon_0 = \frac{\alpha}{\beta}$ (ただし、 α, β は正の整数で互いに素なるものとする) なる形のときは (5.3.14a) と (5.3.14b) の右辺は初等函数で表わされる。

(5.3.14b) の級数は、このとき、 $\beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)\alpha+\beta} \xi^{n+1}$ となり、これを $f(\xi)$ と置けば、

$$\xi^\beta f(\xi^\alpha) = \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)\alpha+\beta} \xi^{(n+1)\alpha+\beta}$$

$$\text{両辺を } \xi \text{ で微分すれば} \quad \frac{d}{d\xi} \{ \xi^\beta f(\xi^\alpha) \} = \beta \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \xi^{(n+1)\alpha+\beta-1} \quad (5.3.15)$$

$$\text{両辺に } \xi^\alpha \text{ を乗じ} \quad \xi^\alpha \frac{d}{d\xi} \{ \xi^\beta f(\xi^\alpha) \} = \beta \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \xi^{(n+2)\alpha+\beta-1} \quad (5.3.16)$$

$$\text{この両式を辺々相減すれば} \quad (1-\xi^\alpha) \frac{d}{d\xi} \{ \xi^\beta f(\xi^\alpha) \} = \beta \left(3\xi^{2\alpha+\beta-1} + 2\xi^{3\alpha+\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{n\alpha} \right) = \beta \xi^{2\alpha+\beta-1} \frac{3-\xi^\alpha}{1-\xi^\alpha}$$

$$\text{従つて} \quad \frac{d}{d\xi} \{ \xi^\beta f(\xi^\alpha) \} = \beta \xi^{2\alpha+\beta-1} \frac{3-\xi^\alpha}{(1-\xi^\alpha)^2} \quad \text{故に} \quad \xi^\beta f(\xi^\alpha) = \beta \int \xi^{2\alpha+\beta-1} \frac{3-\xi^\alpha}{(1-\xi^\alpha)^2} d\xi + K_1 \quad (5.3.17)$$

ただし、 K_1 は積分定数である。

上式の右辺の積分は ξ の有理函数の積分であるから、これは初等函数で表わすことが出来る。これを簡単な為 $g(\xi)$ と

$$\text{書けば} \quad f(\xi^\alpha) = \beta \frac{g(\xi)}{\xi^\beta} + \frac{K_1}{\xi^\beta} \quad \text{従つて} \quad \xi^\alpha \text{ の代りに } \xi \text{ と書けば} \quad f(\xi) = \beta \frac{g(\xi^\alpha)}{\xi^{\beta/\alpha}} + \frac{K_1}{\xi^{\beta/\alpha}}$$

$$\text{従つて} \quad \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)\alpha+\beta} \xi^{n+1} = \beta \frac{g(\xi^\alpha)}{\xi^{\beta/\alpha}} + \frac{K_1}{\xi^{\beta/\alpha}}$$

上式は、 $0 < \xi < 1$ の任意の ξ の値に対して成立することから K_1 が求まり、従つて、 $f(\xi)$ が簡単に表わされる。従つて

$$\frac{i_E}{i_m} = 1 + \beta \frac{g(\xi^\alpha)}{\xi^{\beta/\alpha}} + \frac{K_1}{\xi^{\beta/\alpha}} \quad (5.3.14a')$$

又、(5.3.14b) の級数は $\beta \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(n+1)\alpha+\beta} \xi^{n+1}$ となり、これを $f(\xi)$ と置けば、前と同様にし

て (5.3.15) と (5.3.16) に相当する式が得られ、この両式を辺々相加えて簡単にすれば

$$\frac{d}{d\xi} \{ \xi^\beta f(\xi^\alpha) \} = -\beta \xi^{2\alpha+\beta-1} \frac{3+\xi^\alpha}{(1+\xi^\alpha)^2}$$

随つて、

$$\xi^\beta f(\xi^\alpha) = -\beta \int \xi^{2\alpha+\beta-1} \frac{3+\xi^\alpha}{(1+\xi^\alpha)^2} d\xi + K_2 \quad (5.3.18)$$

ここに、 K_2 は積分定数である。前と同様の理由から、右辺の積分は初等函数 $g(\xi)$ で表わされ結局 $f(\xi) = -\beta$

$\times \frac{g(\xi^\alpha)}{\xi^{\beta/\alpha}} + \frac{K_2}{\xi^{\beta/\alpha}}$ となり、 K_2 は上の場合と同様に求まり $\frac{i_F}{i_m} = 1 - \beta \frac{g(\xi^\alpha)}{\xi^{\beta/\alpha}} + \frac{K_2}{\xi^{\beta/\alpha}}$ は簡単な式となる。

1 例として、 $\alpha = \frac{2}{3}$ なるときの $\frac{i_E}{i_m}$ を実際に求めて見よう。今の場合 $\alpha = 2, \beta = 3$ であるから、(5.3.17) から

$$\xi^3 f(\xi^2) = 3 \int \xi^6 \frac{3-\xi^2}{(1-\xi^2)^2} d\xi + K_1$$

$\int \xi^6 \frac{3-\xi^2}{(1-\xi^2)^2} d\xi = \mathfrak{S}$ と置けば、 $\mathfrak{S}$ は容易に求まり、 $\mathfrak{S} = \frac{\xi}{1-\xi^2} + 3\xi + \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^5}{5} - 2 \log_e \frac{1+\xi}{1-\xi}$

であるから、 $f(\xi^2) = 3 \left(\frac{1}{1-\xi^2} + \frac{4}{\xi^2} + \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{5} - \frac{2}{\xi^2} \log_e \frac{1+\xi}{1-\xi} \right) + \frac{K_1}{\xi^3}$

従つて $f(\xi)$ 、即ち、 $3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n+5} \xi^{n+1} = 3 \left(\frac{1}{1-\xi} + \frac{4}{\xi} + \frac{1}{3} - \frac{\xi}{5} - \frac{2}{\sqrt{\xi^3}} \log_e \frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}} \right) + \frac{K_1}{\sqrt{\xi^3}}$

然るに、此の右辺は $3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n+5} \xi^{n+1} + \frac{K_1}{\sqrt{\xi^3}}$ に等しいから $K_1 = 0$

依つて、(5.3.14a') から $\frac{i_E}{i_m} = 2 + 3 \left(\frac{1}{1-\xi} + \frac{4}{\xi} - \frac{\xi}{5} - \frac{2}{\sqrt{\xi^3}} \log_e \frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}} \right)$ (5.3.19a)

なお、特に $\alpha = +\infty$ のときは (5.3.14a) と (5.3.14b) から

$$\frac{i_E}{i_m} = \frac{i_F}{i_m} = 1 \quad (5.3.20)$$

$\alpha = 0$ のときは (5.3.14a) の級数は $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \xi^{n+1}$ となり、これを $f(\xi)$ と置けば、 $f(\xi) = \frac{\xi^2(3-\xi)}{(1-\xi)^2}$ と

なり、 $\frac{i_E}{i_m} = 1 + \frac{\xi^2(3-\xi)}{(1-\xi)^2} = 2 - \xi - \frac{3}{1-\xi} + \frac{2}{(1-\xi)^2}$ (5.3.21a)

となるし、(5.3.14b) の級数は $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \xi^{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (-\xi)^{n+1}$ となり、これを上の $f(\xi)$ を用いて表わせば、 $-f(-\xi)$ となるから

$$\frac{i_F}{i_m} = 1 + \{-f(-\xi)\} = 1 - \frac{\xi^2(3+\xi)}{(1+\xi)^2} = -\xi + \frac{3}{1+\xi} - \frac{2}{(1+\xi)^2} \quad (5.3.21b)$$

(6) 次に、電流分布の不均一の程度を見る為に、電流密度が最大及び最小となる点 E と F の電流密度 i_E と i_F と i_m との比 i_E/i_m と i_F/i_m が α と ξ の値に依つて如何に変るかを調べる。

この為に、例えば、 $\alpha = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 2$ と 4 のときの i_E/i_m と i_F/i_m を前述の (5) によつて求めれば次のようになる。ただし、 $\alpha = \frac{2}{3}$ のときの i_E/i_m は (5.3.19a) で与えられているから、ここでは省略する。

$$(i) \quad \alpha = \frac{1}{3} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{i_E}{i_m} = 2 + 3 \left\{ \frac{2}{1-\xi} + \frac{7}{\xi^3} \log_e (1-\xi) + \frac{7}{\xi^2} + \frac{7}{2\xi} - \frac{\xi}{4} \right\} \\ \frac{i_F}{i_m} = 3 \left\{ \frac{7}{\xi^3} \log_e (1+\xi) - \frac{7}{\xi^2} + \frac{7}{2\xi} - \frac{\xi}{4} - \frac{2}{1+\xi} \right\} \end{array} \right. \quad (5.3.22a)$$

$$(5.3.22b)$$

$$(ii) \quad \kappa_0 = \frac{2}{3} \quad \frac{i_F}{i_m} = 3 \left(\frac{4}{\xi} - \frac{1}{1+\xi} - \frac{\xi}{5} - \frac{4}{\sqrt{\xi^3}} \tan^{-1} \sqrt{\xi} \right) \quad (5.3.19b)$$

$$(iii) \quad \kappa_0 = 1 \quad \begin{cases} \frac{i_E}{i_m} = 2 + \frac{2}{1-\xi} + \frac{3}{\xi} \log_e(1-\xi) - \frac{\xi}{2} & (5.3.23a) \\ \frac{i_F}{i_m} = -\frac{2}{1+\xi} + \frac{3}{\xi} \log_e(1+\xi) - \frac{\xi}{2} & (5.3.23b) \end{cases}$$

$$(iv) \quad \kappa_0 = 2 \quad \begin{cases} \frac{i_E}{i_m} = 2 + \frac{1}{1-\xi} - \frac{1}{\sqrt{\xi}} \log_e \frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}} - \frac{\xi}{3} & (5.3.24a) \\ \frac{i_F}{i_m} = \frac{2}{\sqrt{\xi}} \tan^{-1} \sqrt{\xi} - \frac{1}{1+\xi} - \frac{\xi}{3} & (5.3.24b) \end{cases}$$

$$(v) \quad \kappa_0 = 4 \quad \begin{cases} \frac{i_E}{i_m} = 2 - \frac{\xi}{5} - \frac{3}{4\sqrt{\xi}} \tan^{-1} \sqrt{\xi} - \frac{3}{8\sqrt{\xi}} \log_e \frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}} + \frac{1}{2(1-\xi)} & (5.3.25a) \\ \frac{i_F}{i_m} = \frac{2}{4\sqrt{2}\sqrt{\xi}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}} + \frac{3}{8\sqrt{2}\sqrt{\xi}} \log_e \frac{1+\sqrt{2}\sqrt{\xi}+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{2}\sqrt{\xi}+\sqrt{\xi}} - \frac{\xi}{5} - \frac{1}{2(1+\xi)} & (5.3.25b) \end{cases}$$

上の各式⁽¹³⁾を用いて $\kappa_0 = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 2, 4$ と $+\infty$ のときの i_E/i_m と i_F/i_m が 0 と 1 との間を ξ が変わる
とき如何に変るかを計算すれば第 5 表のように、図示すれば第 17 図と第 18 図のようになる。

本表中、2 段に記載した数値は、上段は i_E/i_m 、下段は i_F/i_m の数値である。なお、特に、 $\xi=0$ のときの κ_0 の
各有限値に対する i_E/i_m と i_F/i_m の値はそれぞれ式 (5.3.14a) と (5.3.14b) から之を求めた。

又、(5.3.14a) の級数は正項級数で、かつ、 $n \geq 1$ のときは、 $\Re$ が有限ならば

$$\frac{2n+1}{1+(n+1)\kappa_0} - \frac{3}{1+2\kappa_0} = \frac{(n-1)(\kappa_0+2)}{\{1+(n+1)\kappa_0\}(1+2\kappa_0)} \geq 0 \quad \begin{cases} (n=1 \text{ のとき} & =0) \\ (n=2, 3, \dots \text{ のとき} & >0) \end{cases}$$

$$\text{依つて} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{1+(n+1)\kappa_0} \xi^{n+1} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{1+2\kappa_0} \xi^{n+1} = \frac{3}{1+2\kappa_0} \cdot \frac{\xi^2}{1-\xi}$$

$$\text{然るに、}\xi \rightarrow 1- \text{ ならば} \quad \frac{3}{1+2\Re} \cdot \frac{\xi^2}{1-\xi} \rightarrow +\infty$$

$$\text{であるから、}\xi \rightarrow 1- \text{ ならば} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{1+(n+1)\kappa_0} \xi^{n+1} \rightarrow +\infty$$

$$\text{依つて、}\xi \rightarrow 1- \text{ ならば} \quad \frac{i_E}{i_m} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{1+(n+1)\kappa_0} \xi^{n+1} \rightarrow +\infty$$

第 5 表

ξ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	$1^{(4)}$
0	1	1.0358	1.175	1.4959	2.1556	3.5	6.4	13.5222	36.2	171.1	$+\infty^*$
		0.9744	0.9111	0.8243	0.7224	0.611	0.4938	0.3727	0.2494	0.1249	0
$\frac{1}{3}$	1	1.0212	1.0981	1.2660	1.5853	2.1763	3.2995	5.6195	1.3254	32.5880	$+\infty^*$
		0.9847	0.9442	0.8874	0.8192	0.7431	0.6615	0.5459	0.4876	0.3975	0.3061
$\frac{2}{3}$	1	1.0155	1.0687	1.1836	1.3979	1.7837	2.5013	3.9390	7.3102	19.2359	$+\infty^*$
		0.9887	0.9594	0.9177	0.8670	0.8099	0.7482	0.6831	0.6154	0.5460	0.4952
1	1	1.0114	1.0528	1.1404	1.3021	1.5911	2.1185	3.1568	5.5646	13.8747	$+\infty^*$
		0.9911	0.9682	0.9352	0.8950	0.8495	0.8000	0.7477	0.6931	0.6369	0.5794
2	1	1.0068	1.0313	1.0825	1.1759	1.3405	1.6361	2.2085	3.5054	7.8664	$+\infty^*$
		0.9946	0.9807	0.9605	0.9357	0.9075	0.8767	0.8439	0.8095	0.7739	0.7375
4	1	1.0039	1.0179	1.0454	1.0957	1.1899	1.3424	1.6442	2.3200	4.5551	$+\infty^*$
		0.9971	0.9911	0.9778	0.9639	0.9480	0.9303	0.9116	0.8918	0.8715	0.8505
$+\infty$							1				

(13) (i) より (v) までの式に式 (5.3.19a), (5.3.20)(5.3.21a) と (5.3.21b) を含める。

(14) $+\infty^*$ は $\xi \rightarrow 1-$ のとき i_E/i_m の値が限りなく大となることを示す。

(4) 例題。例題 1. の (4) 例題に於て $R=35\text{ cm}$ なる円周を球面に置換え、他の事項は同一とする。このときは $\xi=\frac{1}{2}$ で、 i_s/i_m は (5.3.14) から

$$\frac{i_s}{i_m} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} P_n(\mu)$$

となり、 θ 、従つて、 μ の種々の値に対する i_s/i_m の値は $P_0(\mu)$ と $P_1(\mu)$ との値⁽¹⁵⁾と循環式

$$(n+1)P_{n+1}(\mu) = (2n+1)\mu P_n(\mu) - nP_{n-1}(\mu)$$

を用いば求められ、第6表のように、これを図示すれば第19図ようになる。なお、参考の為に $\theta=0$ のときの i_s/i_m の式は、(5.3.14) から得られる式

$$\frac{i_s}{i_m} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \xi^{n+1} P_n(\mu)$$

第6表 i_s/i_m

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\pi^{(16)}$
μ	1	0.5236	0.7854	0.5	0	-0.5	-0.7854	-0.5236	-1
1	1.5911	1.3295	1.1725	1.0606	0.9362	0.8807	0.8658	0.8564	0.8495
0	3.5	2.0761	1.4375	1.0774	0.7683	0.6620	0.6370	0.6218	0.6111

(15) $P_0(\mu)=1$, $P_1(\mu)=\mu$.

(16) 陽極と陰極面の中心を通る直線に関して電流分布は対称であるから、 θ は 0 から π まで変るときを考えればよい。

第19図

の右辺に、(5.3.3) とその両辺を ξ で微分した $(\mu - \xi)(1 - 2\xi\mu + \xi^2)^{-3/2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\xi^{n-1}P_n(\mu)$

を用いて容易に次のようになり、これを用いて θ 従つて μ の変化に伴う i_s/i_m の値を計算すれば第 6 表のように、図示すれば、第 19 図のようになる。 $\frac{i_s}{i_m} = \frac{1}{2} + \frac{3}{(5-4\mu)^{3/2}}$

この二つの数値例に依れば i_s/i_m は E において最大値、 F に於て最小値を有し、 E と F とを通る一つの円上を E から F に進めば i_s/i_m は漸減することがわかる。このような傾向は ϕ, ξ の値に関係なく言えることである。(17) ここに記した $\phi=0$ の意味は例題 1. (4) で既述してあるから、茲では述べない。

この二つの例によつても、 ϕ が大となれば $\max\left(\frac{i_s}{i_m}\right) - \min\left(\frac{i_s}{i_m}\right)$ は減少する。(18) 即ち、電流密度の分布が一様分布に近づく。

例題 3. 無限に広い鉄板に幅 $2a$ の亜鉛の長い帯を密着し、亜鉛帯のある一方の面のみを海水に浸して電流を流したときの各表面に於ける電流密度の分布を求める問題。(第20図)

(1) 平面を境界とし、両極の分極係数が等しい場合の厳密解。今、空間直角座標軸 X, Y と Z を考え、総べての変数が Z 方向には無関係であるとし、結局、 XY 平面上の問題と考え、 $y > 0$ の半無限平面を電気伝導度の一様な媒体とし、 $y=0$ の境界において $|x| < a$ と $|x| > a$ (ただし、 a は定数) の部分にそれぞれ

(17) (5.3.14) の両辺を θ で微分すれば、 $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{i_s}{i_m}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{1+(n+1)\phi^2} \xi^{n+1} P_n^1(\mu) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{1+(n+1)\phi^2} \xi^{n+1} \sin\theta$ 依つて θ が 0 と π との間では $\sin\theta > 0$ であるから、この範囲では $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{i_s}{i_m}\right) < 0$ となり $\frac{i_s}{i_m}$ は θ の漸減函数になる。ここに、 $P_n^1(\mu)$ は第一種のルジャンドルのばい函数で、一般に $P_n^m(\mu) = (1-\mu^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}$ で定義される。

(18) (5.3.14a) 及び (5.3.14b) より $\frac{i_E}{i_m} - \frac{r_i}{i_m} = 2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2n+1}{1+(n+1)\phi^2} \xi^{n+1}$ であるから、之から明瞭に $\frac{i_E}{i_m} - \frac{r_i}{i_m}$ は ϕ に関しては減少函数 (又、 ξ に関しては増加函数) なることが分る。

れ同一分極係数 k をもつ陽極 A と陰極 C があるときの電流問題を論じよう。

今 $y > 0$ の部分は媒体であるから、その中では (4.2) を満足し、 $y=0$ 、即ち、極面上においては、(4.7) から

$$\left. \begin{array}{l} x < a, \text{ 即ち, 陽極では } V_{s1} + k i_{s1} = V \\ x > a, \text{ 即ち, 陰極では } V_{s2} - k i_{s2} = 0 \end{array} \right\} \quad (5.4.1)$$

かつ、極面の電流密度 i_s (i_{s1} 或は i_{s2}) は (4.1) から

$$i_s = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{y=0+} \quad (5.4.3)$$

本節の計算目的は V, a, k と ρ に依つて i_{s1} と i_{s2} が如何に変わるかを知るにある。

さて、 V は Y 軸に関して対称にして、 $y \rightarrow +\infty$ では零となるから、(4.2) の特解は

$$V = \int_0^\infty f(\alpha) e^{-y\alpha} \cos x\alpha \, d\alpha \quad (5.4.3)$$

ただし、 $f(\alpha)$ は α のみの函数で、境界条件 (5.4.1) によつて決定されるものである。依つて、 V_s (V_{s1} 或は V_{s2}) と i_s の値は (5.4.3) と (5.4.2) から

$$V_s = \int_0^\infty f(\alpha) \cos x\alpha \, d\alpha, \quad i_s = \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \alpha f(\alpha) \cos x\alpha \, d\alpha \quad (5.4.4)$$

$$(5.4.4) \text{ を } (5.4.1) \text{ の第2式に入れば } \int_0^\infty \left(1 + \frac{k}{\rho} \alpha \right) f(\alpha) \cos x\alpha \, d\alpha = 0$$

$$\text{となるから, } \left(1 + \frac{k}{\rho} \alpha \right) f(\alpha) = \varphi(\alpha), \quad \int_0^\infty \varphi(\alpha) \cos x\alpha \, d\alpha = F(x) \quad (5.4.5)$$

$$\text{と置けば, } (5.4.1) \text{ は } x < a \text{ では } F(x) = V, \quad x > a \text{ では } F(x) = 0 \quad (5.4.1')$$

(5.4.1') を満足するように $f(\alpha)$ を求めるに、一般に、 $F(x)$ をフーリエ余弦積分で表わし

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F(\lambda) d\lambda \int_0^\infty \cos \lambda\alpha \cos x\alpha \, d\alpha$$

これに (5.4.1') を用いて

$$F(x) = \frac{2V}{\pi} \int_0^a d\lambda \int_0^\infty \cos \lambda\alpha \cos x\alpha \, d\alpha = \int_0^\infty \cos x\alpha \, d\alpha \int_0^a \frac{2V}{\pi} \cos \lambda\alpha \, d\lambda$$

$$\text{これと } (5.4.5) \text{ から } \varphi(\alpha) = \frac{2V}{\pi} \int_0^a \cos \alpha\lambda \, d\lambda = \frac{2V}{\pi} \frac{\sin a\alpha}{\alpha}$$

従つて

$$f(\alpha) = \frac{2V}{\pi} \frac{\sin a\alpha}{\alpha \left(1 + \frac{k}{\rho} \alpha \right)}$$

$$\text{これを } (5.4.4) \text{ の第2式に入れて } i_s = \frac{2V}{\pi\rho} \int_0^\infty \frac{\sin a\alpha \cos x\alpha}{1 + \frac{k}{\rho} \alpha} d\alpha \quad (5.4.6)$$

まず、 $x < a$ なるときを考えるに

$$i_{s1} = \frac{V}{\pi\rho} \left\{ \int_0^\infty \frac{\sin(a+x)\alpha}{1 + \frac{k}{\rho} \alpha} d\alpha + \int_0^\infty \frac{\sin(a-x)\alpha}{1 + \frac{k}{\rho} \alpha} d\alpha \right\} \quad (5.4.6')$$

今、 $1 + \frac{k}{\rho} \alpha = \beta$ と置けば

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin(a+x)\alpha}{1 + \frac{k}{\rho} \alpha} d\alpha &= \frac{\rho}{k} \int_1^\infty \sin \left\{ \frac{\rho}{k} (a+x)(\beta-1) \right\} \frac{d\beta}{\beta} \\ &= \frac{\rho}{k} \left[\cos \left\{ \frac{\rho}{k} (a+x) \right\} \int_1^\infty \sin \left\{ \frac{\rho}{k} (a+x)\beta \right\} \frac{d\beta}{\beta} - \sin \left\{ \frac{\rho}{k} (a+x) \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \int_1^\infty \cos \left\{ \frac{\rho}{k} (a+x)\beta \right\} \frac{d\beta}{\beta} \right] \\ &= \frac{\rho}{k} \left[\cos \left(\frac{\rho}{k} a+x \right) \left\{ \frac{\pi}{2} - \text{Si} \left(\frac{\rho}{k} a+x \right) \right\} - \sin \left\{ \frac{\rho}{k} a+x \right\} \left\{ -\text{Ci} \left(\frac{\rho}{k} a+x \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\rho}{k} \left[\frac{\pi}{2} \cos \left\{ \frac{\rho}{k} (a+x) \right\} - \cos \left\{ \frac{\rho}{k} (a+x) \right\} \text{Si} \left\{ \frac{\rho}{k} (a+x) \right\} + \sin \left\{ \frac{\rho}{k} (a+x) \right\} \text{Ci} \left\{ \frac{\rho}{k} (a+x) \right\} \right]$$

同様にして

$$\int_0^\infty \frac{\sin(a-x)\alpha}{1 + \frac{k}{\rho}\alpha} d\alpha = \frac{\rho}{k} \left[\frac{\pi}{2} \cos \left\{ \frac{\rho}{k} (a-x) \right\} - \cos \left\{ \frac{\rho}{k} (a-x) \right\} \text{Si} \left\{ \frac{\rho}{k} (a-x) \right\} + \sin \left\{ \frac{\rho}{k} (a-x) \right\} \text{Ci} \left\{ \frac{\rho}{k} (a-x) \right\} \right]$$

ただし、Si 及び Ci は正弦及び余弦積分と呼ばれるものにして

$$\text{Si } q = \int_0^q \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{と} \quad \text{Ci } q = \int_\infty^q \frac{\cos x}{x} dx$$

を表わす。上の二つの値を (5.4.6') に入れて $x-a=z$ と置けば $z < 0$ で

$$i_{s1} = \frac{V}{\pi k} \left[\pi \cos \left\{ \frac{\rho}{k} (a+z) \right\} \cos \frac{\rho a}{k} - \cos \left\{ \frac{\rho}{k} (2a+z) \right\} \text{Si} \left\{ \frac{\rho}{k} (2a+z) \right\} - \cos \left\{ \frac{\rho}{k} (-z) \right\} \text{Si} \left\{ \frac{\rho}{k} (-z) \right\} + \sin \left\{ \frac{\rho}{k} (2a+z) \right\} \text{Ci} \left\{ \frac{\rho}{k} (2a+z) \right\} + \sin \left\{ \frac{\rho}{k} (-z) \right\} \text{Ci} \left\{ \frac{\rho}{k} (-z) \right\} \right] \quad (5.4.6'')$$

特に $x \rightarrow a-$, 従つて $z \rightarrow 0-$ のときの i_{s1} の極限值を求める為には, このとき (5.4.6'') の $\sin \left\{ \frac{\rho}{k} (-z) \right\} \times \text{Ci} \left\{ \frac{\rho}{k} (-z) \right\}$ は $0 \times \infty$ なる不定形となるから, まず, その極限值を知らねばならぬ。今, $\frac{\rho}{k} (-z) = -\xi$ と置けば, $\xi < 0$ で

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0-} \left[\sin \left\{ \frac{\rho}{k} (-z) \right\} \text{Ci} \left\{ \frac{\rho}{k} (-z) \right\} \right] &= \lim_{-\xi \rightarrow 0+} \{ \sin(-\xi) \text{Ci}(-\xi) \} \\ &= \lim_{-\xi \rightarrow 0+} [\sin(-\xi) \{ \text{Ci}(-\xi) - \log_e(-\xi) \} + \sin(-\xi) \log_e(-\xi)] = \lim_{-\xi \rightarrow 0+} \{ \sin(-\xi) \log_e(-\xi) \} = 0 \end{aligned}$$

となる。従つて,

$$(i_{s1})_{z \rightarrow 0-} = \frac{V}{\pi k} \left(\pi \cos^2 \frac{\rho a}{k} - \cos \frac{2\rho a}{k} \text{Si} \frac{2\rho a}{k} + \sin \frac{2\rho a}{k} \text{Ci} \frac{2\rho a}{k} \right) \quad (5.4.7)$$

次に, $x > a$ のときは, 同様にして, (5.4.6) から

$$-i_{s2} = \frac{V}{\pi \rho} \left\{ \int_0^\infty \frac{\sin(x+a)\alpha}{1 + \frac{k}{\rho}\alpha} d\alpha - \int_0^\infty \frac{\sin(x-a)\alpha}{1 + \frac{k}{\rho}\alpha} d\alpha \right\}$$

なる故, (5.4.6'') と (5.4.7) に相当するものとして

$$i_{s2} = \frac{V}{\pi k} \left[\pi \sin \left\{ \frac{\rho}{k} (a+z) \right\} \sin \frac{\rho a}{k} + \cos \left\{ \frac{\rho}{k} (2a+z) \right\} \text{Si} \left\{ \frac{\rho}{k} (2a+z) \right\} - \cos \frac{\rho z}{k} \text{Si} \frac{\rho z}{k} - \sin \left\{ \frac{\rho}{k} (2a+z) \right\} \text{Ci} \left\{ \frac{\rho}{k} (2a+z) \right\} + \sin \frac{\rho z}{k} \text{Ci} \frac{\rho z}{k} \right] \quad (5.4.6''')$$

(ただし $z > 0$)

$$(i_{s2})_{z \rightarrow 0+} = \frac{V}{\pi k} \left(\pi \sin^2 \frac{\rho a}{k} + \cos \frac{2\rho a}{k} \text{Si} \frac{2\rho a}{k} - \sin \frac{2\rho a}{k} \text{Ci} \frac{2\rho a}{k} \right) \quad (5.4.7')$$

(5.4.6'') と (5.4.6''') に依れば i_{s1} と i_{s2} は $\frac{\rho a}{k}$ の値を与えれば $\frac{\rho z}{k}$ の函数として定まり, 特に, $z=0$ のときは (5.4.7) 又は (5.4.7') に依つてその極限值を求めることが出来る。数値計算の結果は第7表と第8表のようであつて, これを図示すれば第21図, 第22図, 第23図と第24図のようになる。ただし, 極限の場合として, $\frac{\rho a}{k} = +\infty$ の場合については, 次のような計算を行つた。即ち, (5.4.6'') 及び (5.4.6''') において, $\frac{\rho a}{k} = +\infty$ とすれば $\frac{\rho}{k} (2a+z)$ も又大きくなるから,

第7表 $\frac{R_{iAL}}{V}$ の数値表

$\frac{S}{L}$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.2
0	1																				
0.01	0.9723	0.9679																			
0.02	0.9532	0.9462	0.9446																		
0.1	0.8619	0.8500	0.8427	0.8371	0.8320	0.8292	0.8265	0.8244	0.8230	0.8222	0.8219										
0.2	0.7973	0.7839	0.7749	0.7675	0.7613	0.7558	0.7510	0.7468	0.7430	0.7397	0.7368	0.7342	0.7319	0.7299	0.7283	0.7269	0.7257	0.7249	0.7242	0.7239	0.7237

$\frac{S}{L}$	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$+\infty$
0.5	0.6978	0.6484	0.6203	0.5999	0.5843	0.5722	0.5630	0.5515	0.5478												
1	0.6270		0.5427		0.4980		0.4483	0.4457	0.4288	0.3956											
2	0.5729		0.4855		0.4381		0.4038	0.3772	0.3657	0.2908	0.2624	0.2540									
4	0.5387		0.4501		0.3983		0.3660	0.3379	0.3157	0.2417	0.2019	0.1776	0.1529	0.1459							
$+\infty$	0.5		0.4109		0.3619		0.3258	0.2934	0.2739	0.1978	0.1549	0.1278	0.0929	0.0730	0.0599	0.0507	0.0439	0.0387	0.0346	0.0312	0+

但し、 $S = \frac{r_a}{L}$ とする。

第8表 $\frac{R_{iL2}}{V}$ の数値表

$\frac{S}{L}$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.11	0.12	----	$+\infty$
0															
0.01	0.0277	0.0217	0.0191	0.0173	0.0159	0.0148	0.0139	0.0132	0.0125	0.0119	0.0114	0.0109	0.0105	----	0+
0.02	0.0468	0.0390	0.0350	0.0321	0.0298	0.0280	0.0264	0.0250	0.0238	0.0228	0.0218	0.0209	0.0202	----	0+

$\frac{S}{L}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	----	$+\infty$	
0.1	0.1381	0.0551	0.0645	0.0519	0.0432	0.0367	0.0197	0.0085	0.0048	0.0030	0.0020	0.0015	0.0012	0.0009	0.0007	----	0	
0.2	0.2027	0.1364	0.1077	0.0887	0.0749	0.0646	0.0359	0.0161	0.0092	0.0057	0.0040	0.0029	0.0023	0.0017	0.0014	----	0+	
0.5	0.3022	0.2234	0.1837	0.1562	0.1353	0.1190	0.0708	0.0340	0.0200	0.0131	0.0092	0.0074	0.0052	0.0041	0.0033	----	0+	
1	0.3731	0.2885	0.2434	0.2114	0.1865	0.1666	0.1049	0.0540	0.0337	0.0222	0.0159	0.0120	0.0093	0.0075	0.0060	----	0+	
2	0.4271	0.3396	0.2919	0.2573	0.2303	0.2082	0.1379	0.0763	0.0490	0.0342	0.0253	0.0195	0.0154	0.0126	0.0103	----	0+	
4	0.4613	0.3727	0.3240	0.2885	0.2604	0.2374	0.1632	0.0957	0.0644	0.0468	0.0357	0.0282	0.0226	0.0190	0.0159	----	0+	
$+\infty$	0.5	0.4109	0.3619	0.3258	0.2934	0.2739	0.1978	0.1549	0.1278	0.0929	0.0730	0.0599	0.0507	0.0439	0.0387	0.0346	----	0+

$$\begin{aligned} \text{Si}\left\{\frac{\rho}{k}(2a+z)\right\} &= \frac{\pi}{2} - \frac{\cos\left\{\frac{\rho}{k}(2a+z)\right\}}{\frac{\rho}{k}(2a+z)} \left[1! - \frac{2!}{\left\{\frac{\rho}{k}(2a+z)\right\}^2} + \frac{4!}{\left\{\frac{\rho}{k}(2a+z)\right\}^4} - + \dots \right] \\ &\quad - \frac{\sin\left\{\frac{\rho}{k}(2a+z)\right\}}{\frac{\rho}{k}(2a+z)} \left[\frac{1!}{\frac{\rho}{k}(2a+z)} - \frac{3!}{\left\{\frac{\rho}{k}(2a+z)\right\}^3} + \frac{5!}{\left\{\frac{\rho}{k}(2a+z)\right\}^5} - + \dots \right] \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} \text{Ci}\left\{\frac{\rho}{k}(2a+z)\right\} &= \frac{\sin\left\{\frac{\rho}{k}(2a+z)\right\}}{\frac{\rho}{k}(2a+z)} \left[1! - \frac{2!}{\left\{\frac{\rho}{k}(2a+z)\right\}^2} + \frac{4!}{\left\{\frac{\rho}{k}(2a+z)\right\}^4} - + \dots \right] \\ &\quad - \frac{\cos\left\{\frac{\rho}{k}(2a+z)\right\}}{\frac{\rho}{k}(2a+z)} \left[\frac{1!}{\frac{\rho}{k}(2a+z)} - \frac{3!}{\left\{\frac{\rho}{k}(2a+z)\right\}^3} + \frac{5!}{\left\{\frac{\rho}{k}(2a+z)\right\}^5} - + \dots \right] \end{aligned}$$

であることから

$$\begin{aligned} (i_{s1})_{\frac{\rho a}{k} \rightarrow +\infty} &= \frac{V}{\pi k} \lim_{\frac{\rho a}{k} \rightarrow +\infty} \left[\left[\frac{\pi}{2} \cos\left\{\frac{\rho}{k}(-z)\right\} + \frac{1}{\frac{\rho}{k}(2a+z)} \left[1! - \frac{2!}{\left\{\frac{\rho}{k}(2a+z)\right\}^2} + \frac{4!}{\left\{\frac{\rho}{k}(2a+z)\right\}^4} - + \dots \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos\left\{\frac{\rho}{k}(-z)\right\} \text{Si}\left\{\frac{\rho}{k}(-z)\right\} + \sin\left\{\frac{\rho}{k}(-z)\right\} \text{Ci}\left\{\frac{\rho}{k}(-z)\right\} \right] \right] \\ &= \frac{V}{\pi k} \left[\frac{\pi}{2} \cos\left\{\frac{\rho}{k}(-z)\right\} - \cos\left\{\frac{\rho}{k}(-z)\right\} \text{Si}\left\{\frac{\rho}{k}(-z)\right\} + \sin\left\{\frac{\rho}{k}(-z)\right\} \text{Ci}\left\{\frac{\rho}{k}(-z)\right\} \right] \\ (i_{s2})_{\frac{\rho a}{k} \rightarrow +\infty} &= \frac{V}{\pi k} \left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{\rho z}{k} - \cos \frac{\rho z}{k} \text{Si} \frac{\rho z}{k} + \sin \frac{\rho z}{k} \text{Ci} \frac{\rho z}{k} \right) \end{aligned}$$

従つて、 $(i_{s1})_{\frac{\rho a}{k} \rightarrow +\infty} = \frac{V}{2k} = (i_{s2})_{\frac{\rho a}{k} \rightarrow +\infty}$ ただし、 $\xi = \frac{\rho a}{k}$ とする。

第 21 図、第 22 図、第 23 図と第 24 図によれば、例えば、 ρ/k が一定で a が変つた場合に、陽極と陰極との境の点から一定の距離にある点の電流密度が如何に変るかを見るには便利であるが、境の点から a に対して相似の距離にある点の電流密度が如何に変るかを見る為には、 $\frac{\rho z}{k} / \frac{\rho a}{k}$ 、即ち、 z/a を横軸に取つて第 25 図、第 26 図、第 27 図と第 28 図のようにする方が便利である。第 25 図、第 26 図、第 27 図と第 28 図は第 21 図、第 22 図、第 23 図と第 24 図を用いて容易に求めることが出来る。特に、 $\frac{\rho a}{k} = \xi \ll 1$ なるときは

$$\cos \xi \approx 1, \sin \xi \approx \xi, \text{Si} \xi \approx \xi, \text{Ci} \xi \approx \gamma + \log_e \xi$$

ただし、 $\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} - \log_e m \right) = 0.57721566 \dots$

であるから、このときは、(5.4.6''), (5.4.6'''), (5.4.7) 及び (5.4.7') の i_{s1} と i_{s2} に対して次の式が成立する。

$$i_{s1} \approx \frac{V}{\pi k} \left[\pi - 2\xi \left\{ 1 - \gamma - \log_e \xi - \left(1 + \frac{z}{2a} \right) \log_e \left(2 + \frac{z}{a} \right) + \frac{z}{2a} \log_e \left(-\frac{z}{a} \right) \right\} \right] \quad (5.4.6'')$$

$$i_{s2} \approx \frac{V}{\pi k} 2\xi \left\{ 1 - \gamma - \log_e \xi - \left(1 + \frac{z}{2a} \right) \log_e \left(2 + \frac{z}{a} \right) + \frac{z}{2a} \log_e \frac{z}{a} \right\} \quad (5.4.6''')$$

$$(i_{s1})_{z \rightarrow 0-} \approx \frac{V}{\pi k} \{ \pi - 2\xi + 2\xi (\gamma + \log_e 2\xi) \} \quad (5.4.7)$$

$$(i_{s2})_{z \rightarrow 0+} \approx \frac{V}{\pi k} 2\xi (1 - \gamma - \log_e 2\xi) \quad (5.4.7')$$

第25図
 $\frac{k_{12}}{V}$ (其の一)

第26図
 $\frac{k_{12}}{V}$ (其の二)

第27図
 $\frac{k_{12}}{V}$ (其の一)

第28図
 $\frac{k_{12}}{V}$ (其の二)

(4) 広い鉄板に亜鉛の帯を貼付けた場合の数値計算例。無限に広い鉄板に幅 $2a$ の無限に長い亜鉛の帯を貼付けて之を海水中に入れば亜鉛の部分は陽極となり、鉄板の部分は陰極となつて海水を通して電流が生ずるが、このときの k_1 , k_2 と V は海水の流速によつてその値を異にし、流速 160 m/min と静止の場合はそれぞれ (3.8) と (3.7) のようになる。(茲に言う V は其処の V_a である。)

このように、陽極と陰極との分極係数が相異なるときは、境界条件 (5.4.1) は (4.7) となるから、前節の厳密解はその儘では用をなさぬが、 $\frac{\rho a}{k_2} \ll 1$ のときは、次のような方法に依つて近似解が得られる。

今、暫らく、上記の問題を離れ、別に

$$V_{s1} + k_2 i_{s1} = V_a, \quad V_{s2} - k_2 i_{s2} = 0 \quad (5.4.1)$$

なる境界条件の問題を考えるに、この問題においては、 k_2 と V_a が与えられれば、前節の理論により、 V_{s1} , V_{s2} と i_{s1} , i_{s2} は z/a の函数として求まる筈である。ただし、 V_a は V とは等しくなく、 k_2 は元の問題の k_2 に等しいとする。

次に、このようにして求めた V_{s1} と i_{s1} を、式 $V_{s1} + k_1 i_{s1} = V_a'$

に入れたときの V_a' は常数ではなく、 z/a の函数となる筈である。然るに、 $\frac{\rho a}{k_2} \ll 1$ のときは、この V_a' は $|x| < a$ なる範囲において、その平均値 $[V_a']_m$ と大なる差を有しないから、 $[V_a']_m = V$ ならしめれば、近似的に、

$$V_{s1} + k_1 i_{s1} \approx V$$

が成立し、元の問題の境界条件が近似的に満足されたことになる。唯、ここに残された問題は V が与えられたとき、 $[V_a']_m = V$ ならしめるように、 V_a を如何にして定めるかであるが、上の関係から

$$V_a' = V_a - (k_2 - k_1) i_{s1} \quad (5.4.8) \quad [V_a']_m = V_a - (k_2 - k_1) [i_{s1}]_m$$

$$\text{又は} \quad \frac{V}{V_a} = 1 - \frac{k_2 - k_1}{k_2} \left[\frac{k_2 i_{s1}}{V_a} \right]_m \quad (5.4.9)$$

然るに、 $\frac{\rho a}{k_2}$ の値が与えられれば $\left[\frac{k_2 i_{s1}}{V_a} \right]_m$ の値は求められ、従つて、 V/V_a の比が定まるから、 V の値から V_a は求められる。

さて、数値計算の例を示せば次のようである。

海水の比抵抗 ρ は、温度を約 20°C とすれば、 $\rho \approx 20 \Omega \text{ cm}$ であるから、流速 160 m/min の場合において、仮りに $\frac{\rho a}{k_2} = 0.01$ を採れば、これは亜鉛の帯幅 $2a = 0.01 \times \frac{650}{20} \times 2 = 6.5 \text{ mm}$ の場合に相当する。依つて第7

表又は第25図から、 $\frac{\rho a}{k} = \xi = 0.01$ に相当する $\frac{k i_{s1}}{V_a}$ の平均値 $\left[\frac{k_2 i_{s1}}{V_a} \right]_m$ を求めれば、(例えば、シンブソン法則を用いて) $\left[\frac{k_2 i_{s1}}{V_a} \right]_m = 0.9694$ 又、 $V = 0.4 \text{ v}$ 従つて、(5.4.9) より $V_a = 0.9915 \text{ v}$

第7表と第8表又は第25図と第27図から z/a 、即ち、 ξ/ζ の値に相当する $\frac{k_2 i_{s1}}{V_a}$ と $\frac{k_2 i_{s2}}{V_a}$ の値が分るから、 $V_a = 0.9915 \text{ v}$ としたときの i_{s1} と i_{s2} が求められ、第9表と第10表又は第29図のようになる。次に、(5.4.8) から V_a' を求め、最後に [5.4.1] から V_{s1} と V_{s2} を求めれば、それぞれ、第9表と第10表又は第30図のようになる。

第9表

$2a$	z/a	0	0.5	1
6.5 mm	$i_{s1} \text{ mA/dm}^2$	148.3070		147.6413
	$V_d \text{ V}$	0.3982		0.4009
	$V_{d1} \text{ V}$	0.0275		0.0318
	$i_{s2} \text{ mA/dm}^2$	140.6240	139.5887	139.3501
13 mm	$V_d \text{ V}$	0.3964	0.4005	0.4015
	$V_{d1} \text{ V}$	0.0448	0.0516	0.0531

第10表

$2a$	z/a	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	...	$+\infty$
6.5 mm	$i_{s1} \text{ mA/dm}^2$	4.2242		3.5117		2.9070		2.5329		2.4245		2.2672		2.1230	...	0+
	$V_d \text{ V}$	0.0275		0.0215		0.0189		0.0171		0.0158		0.0147		0.0138	...	0+
	$i_{s2} \text{ mA/dm}^2$	6.8969	5.7494	5.1583	4.7334	4.4001	4.1270	3.8945	3.6942	3.5172	3.3600	3.2191	3.0902	2.9743	...	0+
	$V_{d2} \text{ V}$	0.0448	0.0374	0.0335	0.0308	0.0286	0.0268	0.0253	0.0240	0.0229	0.0218	0.0209	0.0201	0.0193	...	0+
13 mm	$i_{s1} \text{ mA/dm}^2$	4.2242		3.5117		2.9070		2.5329		2.4245		2.2672		2.1230	...	0+
	$V_d \text{ V}$	0.0275		0.0215		0.0189		0.0171		0.0158		0.0147		0.0138	...	0+
	$i_{s2} \text{ mA/dm}^2$	6.8969	5.7494	5.1583	4.7334	4.4001	4.1270	3.8945	3.6942	3.5172	3.3600	3.2191	3.0902	2.9743	...	0+
	$V_{d2} \text{ V}$	0.0448	0.0374	0.0335	0.0308	0.0286	0.0268	0.0253	0.0240	0.0229	0.0218	0.0209	0.0201	0.0193	...	0+

次に、別の例として、 $\frac{pa}{k_2} = 0.02$ 従つて亜鉛の帯幅が2倍になつたとき、即ち 13 mm のときを採つて同様なことを行えば、 i_{s1} , i_{s2} , V_a' , V_{s1} と V_{s2} が求められ、これ等は第9表と第10表又は第29図と第30図のようになる。

さて、如上の計算法の厳密ならざる点は、本節の初めに述べた如く、 $V_a' = V$ と仮定したことにあるが、計算の結果に依ればその差は極めて僅少で、上記二例における誤差の最大値はそれぞれ 0.4458 % と 0.9107 % に過ぎない。

次に、亜鉛の帯幅を前と同一にして、海水静止の場合を論ずるに $2a = 6.5$ mm と 13 mm のときは $\frac{pa}{k_2} = 0.000325$ と 0.00065 となり、1に比して非常に小さくなる。このような場合の $\frac{k_2 i_{s1}}{V_a}$, $\frac{k_2 i_{s2}}{V_a}$ は $[5.4.6'']$, $[5.4.6''']$, $[5.4.7]$ と $[5.4.7']$ から求められ、数値計算の結果は第11表又は第31図のようになる。

第11表

 $\frac{k_2 i_{s1}}{V_a}$ の数値表

z/a	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0.000325	0.998394	0.998327	0.998291	0.998268	0.998255	0.998251
0.00065	0.997075	0.996941	0.996868	0.996822	0.996797	0.996788

 $\frac{k_2 i_{s2}}{V_a}$ の数値表

z/a	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0.000325	0.001606	0.001476	0.001408	0.001359	0.001319	0.001286	0.001258	0.001211	0.001173
0.00065	0.002925	0.002666	0.002530	0.002430	0.002351	0.002285	0.002229	0.002135	0.002058

z/a	10	15	20	25	30	35	40	45	50	...	$+\infty$
0.000325	0.001046	0.000949	0.000913	0.000868	0.000832	0.000801	0.000777	0.000750	0.000729	...	0+
0.00065	0.001806	0.001651	0.001538	0.001450	0.001377	0.001315	0.001266	0.001214	0.001171	...	0+

第31図

 $2a = 6.5 \text{ mm}$
 $2a = 13 \text{ mm}$

依つて、前と同様にして、 i_{s1} , i_{s2} , V_a' , V_{s1} と V_{s2} を求めれば、第12表と第13表、又は、第32図と第33図のようになる。この場合にも V と V_a' との誤差の最大値はそれぞれ 0.4188 % と 0.7951 % に過ぎない。

第 12. 表

$-Z/a$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$2a$ 65 mm i_{d1} mA/dm ²	74.3513	74.3463	74.3436	74.3419	74.3410	74.3407
V_d V	0.35850	0.35948	0.36001	0.36034	0.36053	0.36059
V_{d1} V	0.02392	0.02492	0.02546	0.02580	0.02599	0.02605
13 mm i_{d1} mA/dm ²	70.2148	70.2053	70.2002	70.1970	70.1952	70.1946
V_d V	0.35716	0.35901	0.36001	0.36064	0.36099	0.36111
V_{d1} V	0.04119	0.04309	0.04411	0.04475	0.04512	0.04523

第 13 表

Z/a	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5	10	15	20	25	30	...	$+\infty$
$2a$ 65 mm i_{d2} mA/dm ²	0.1196	0.1099	0.1049	0.1012	0.0982	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	0+
V_{d2} V	0.0239	0.0220	0.0210	0.0202	0.0196	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	0+
13 mm i_{d2} mA/dm ²	0.2060	0.1877	0.1781	0.1711	0.1656	0.1609	0.1569	0.1503	0.1450	0.1272	0.1163	0.1083	0.1021	0.0970	---	0+
V_{d2} V	0.0412	0.0375	0.0356	0.0342	0.0331	0.0322	0.0314	0.0301	0.0290	0.0254	0.0233	0.0217	0.0204	0.0194	---	0+

さて、以上の計算結果に基づき、亜鉛に依る防蝕効果が何の程度遠方まで及ぶかに就いて考察するに、電流を通ずることに依つて鉄板が防蝕される原因は、鉄板面に近接する海水に対する鉄板の電位が電流の為に生ずる分極電圧だけ上昇することに基くものにして、陰極における分極電圧 V_{s2} が大ならば大なる程、防蝕効果は大なるべきも、実用上、果して幾何の電圧を必要とするかは俄かに決定し難いことである。前述の如く、第2図は腐蝕試験結果を陰極電圧に対して図示せるものにして、本図から見れば、まず、 $V_{s2} > 20 \text{ mV}$ ならば、防蝕効果あるものと察せられる故、仮りに、此の値を採用し、第30図と第33図から防蝕有効距離を求めれば、それぞれ第14表のようになる。

第14表 防蝕有効距離

亜鉛帯の幅 2a mm	流 速 160 m/min			静 止		
	Z/a	Z mm	比	Z/a	Z mm	比
6.5	1.58009	5.13528	1	1.69915	5.52224	1
13	5.55716	36.12155	7.03	27.04019	175.76120	31.8

本表から明らかなるように、海水静止の場合には、極めて遠方まで防蝕されるが、流速が可成り大なる場合には、防蝕有効距離は格段に小となることが知れる。又、亜鉛帯の幅を2倍にしても防蝕有効距離は2倍にならず、本例では、流速 160 m/min と静止のときそれぞれ 7.03 倍と 31.81 倍である。

次に、亜鉛板を最も経済的に使用する為には、亜鉛帯の幅の半分 a に対する z の比、即ち、 z/a が大なる程有利であるから、今、 z/a と $2a$ との関係について考究するに、他の条件を一定とすれば、 z/a は $2a$ のある値のとき最大値を採ることが分る。例えば、海水静止と流速 160 m/min の2つの場合につき、本節に述べたと全く同様の計算方法に依つて、種々の $2a$ の値に対する z/a の値を算出すれば、第15表並に第34図のような結果が得られる。即ち、 $2a=0$ のときは $z/a=0$ であるが、 $2a$ が増するにつれて z/a は急激に上昇して、遂に z/a の最大値に到達し、それより更に $2a$ が増せば z/a は次第に減少する。そして、 z/a の最大値は海水の流速に依つて著しく影響されるが、 z/a を最大ならしめる $2a$ の値は、流速に依つて殆ど影響されず、略々 $2a=4 \text{ cm}$ となる。依つて、海水流速の大小に拘わらず、亜鉛帯の最も経済的な幅は 4 cm であると結論することが出来る。

第15表

亜鉛帯の幅 2a cm	Z/a	
	流 速 160 m/min	静 止
0.65	1.580	1.699
1.3	5.557	27.040
1.95	7.398	51.113
2.6	8.193	64.873
3.25	8.488	70.933
3.9	8.552	73.048
4.55	8.537	72.904
5.2	8.506	71.554
5.85	8.229	69.537
6.5	8.200	67.400
10.4	-----	53.964
13	6.219	47.180

第34図

z/a が何故に $2a$ のある値のとき最大値を採るかを数式を離れて常識的に解説しよう。第20図に示す如く無限に広い鉄板に幅 $2a$ の亜鉛帯を密着した場合の金属表面に於ける電流密度は第35図(B)のようになり、亜鉛と鉄との境の点 ($z=0$) が最大で、それより遠ざかるにつれて減少することは容易に想像される。又、電位の関係は、第35図(A)のように鉄板面に於ける分極電圧 V_{s2} は電流密度 i_{s2} に比例し、比例定数は分極係数 k_2 、

第35図

即ち、 $V_{s2} = k_2 i_{s2}$ であるから、 V_{s2} も又、 $z=0$ のとき最大にして、 z が増すと共に減少する。

そして、 $V_{s2} = 20 \text{ mV}$ となる点の z の値を z' とすれば、 z' が即ち防蝕有効距離であるから、 z' が a に依つて如何に変わるかを考える為には、 i_{s2} の分布に就いて考えるべきである。然るに、前述のように、 i_{s2} は z/a の函数であると共に、 V 、 k_1 と k_2 が与えられたものとすれば $\rho a/k_2$ の函数である。ただし、 ρ は海水の比抵抗である。故に、今、 a が変ると共に ρ も変り、 ρa は不変であるような場合を考えれば、 i_{s2} 対 z/a の曲線は少しも変らぬから z'/a も又不変である。従つて、 ρ を一定として a を増した場合の z'/a の変り方は、あたかも、 a を一定として ρ を増した場合の z'/a の変り方と全く同一である。そこで、 ρ を増した場合に i_{s2} が如何に変わるかを考えるに、第36図に示すように、 z の大なる部分では減少し、小なる部分では増加する。

第36図

その理由は、第35図(A)に示すように、 z の大なる部分では、海水抵抗に依る電圧降下が大きいから、 ρ が増せば、

電圧降下が増す為 i_{s2} は減るのであるが、 $z=0$ では電圧降下は零であるから、 $z=0$ に近い処では電圧降下の影響よりも i_{s1} が減じ、 V_{s1} が上昇することの方が大きく響き、 ρ が増せば却つて i_{s2} が増すことになる。従つて、任意の点 z に就いて、 ρ と i_{s2} との関係を調べれば、第37図のようになり、更に、考えを進めれば、 z'/a と ρ との関係は第38図のようになることがうなずかれる。

第37図

第38図

以上の事柄から考えれば、 z'/a と $2a$ との関係が第34図のような最大値をもつ曲線となることは数値計算をまたずして推測し得ることである。

なお、以上のような考え方に従い、亜鉛の長い帯の代りに半径 a なる円板を用いた場合に就いて推測するに、 z'/a を最大ならしむる為の $2a$ の値は帯の場合の $2a=4 \text{ cm}$ より幾分小なるべきものと察せられる。其理由は帯の場合には、電流の流れ方は平面的であるのに対して円板の場合には立体的となるから、海水抵抗に基づく電圧降下の影響が一層大きく響き、あたかも、 ρ が増したのと同様な効果になると考えられるからである。