(昭和21年11月 造船協会秋季講演会に於て講演)

円形弾性板の強制振動 (第2報)

准員 工学士 金 沢 武*

Abstract.

On the Forced Vibrations of Clamped Elastic Circular Plates. (No. 2)

By Takeshi Kanazawa, *Kogakushi, Associate Member.*

In this article, we investigated the forced vibrations of clamped elastic circular plates under any eccentric forces, and the behaviours of elastic shock waves transmitted in the plates due to any eccentric shocks.

We solved the problem by means of the forces or shocks expanded in the normal functions with the initial conditions ; $w=0, \frac{dw}{dt}=0$ at $t=0$. As the particular cases, the distribution of forces or shocks were (i) uniform in the circle with radius a_0 and eccentricity ε .

(ii) concentrated at the point having eccentricity ε .

and their time factor were

$$(i) \quad \frac{t}{\beta} \quad \text{for } 0 \leq t \leq \beta, \quad \frac{2\beta-t}{\beta} \quad \text{for } \beta \leq t \leq 2\beta, \\ 0 \quad \text{for } t \geq 2\beta \text{ or } t \leq 0 \quad (\text{single trigonometric shock})$$

$$(ii) \quad e^{-pt} \sin(\omega t - mk) \quad \text{for } mk \leq t \leq mk + \frac{\pi}{\omega} \\ 0 \quad \text{for } mk + \frac{\pi}{\omega} \leq t \leq (m+1)k \\ (\text{continuous shock})$$

(iii) $\sin \omega t$

Thus we had the deflection of the plate and the bending moment at any time.

§1. 緒 言

著者は先に周辺固定された円形弾性板の強制振動について其の一般的解法を示し、併せて特殊な二、三の例についての計算例をあげておいた。夫等は主として外力が偏心を有しない中心強制外力であつたが、今回は実用上からも興味ある偏心強制外力及び衝撃荷重について計算する機会を得たので、此所に第2報として発表する次第である。

先に示した如く、中心強制外力の時は節直径のない振動のみが現れ、従つて最大変位は恒に中心に生ずるものである。之に対して偏心強制外力の場合は節直径を有する振動も生じ得るのである。又曲げモーメントについても種々異つた結果が得られるであろうと考えられる。

そこで筆者は変位のみならず曲げモーメントについても計算を行つて見た。

扱へる衝撃をあらわすには色々な方法があるが、此処では衝撃の時間因数については、

$$(i) \quad \frac{\beta}{t} : 0 \leq t \leq \beta, \quad \frac{-t+2\beta}{\beta} : \beta \leq t \leq 2\beta, \quad 0 : t \leq 0 \\ t \geq 2\beta$$

$$(ii) \quad e^{-pt} \sin(\omega t - mk) : mk \leq t \leq mk + \frac{\pi}{\omega} \\ 0 : mk + \frac{\pi}{\omega} \leq t \leq (m+1)k$$

の2種をとつた。(i)の方は衝撃時間 2β の三角形型単独衝撃をあらわし、既に第1報でもその型のものについて取扱つておいた。(ii)は $k - \frac{\pi}{\omega}$ なる時間をおいて作用する連続衝撃をあらわすものであり、 p は相隣る衝

* 東京大学工学部助教授

撃の減衰の度を, $2\pi/\omega$ は各衝撃の週期をあらわすものである。衝撃力の分布状況に関しては,

(i) $\theta=0$, $r=\varepsilon$ の点を中心に半径 a_0 なる円内に強さ一様に分布して居る場合

(ii) $\theta=0$, $r=\varepsilon$ の点に集中して働く場合

の2つの場合について計算を行つて見た。

§2. 微分方程式及び其の解法

一般に外力 $q(r, \theta, t)$ を受けて振動する円形弾性板の強制振動の微分方程式は, 板の半径を a , 厚さを h , ポアソン比を σ , 単位体積当りの重さを ρ , ヤング係数を E , 変位を w で表わすと,

$$G \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{g}{\rho h} q(r, \theta, t) \quad (1)$$

$$\text{但し } G \equiv \frac{Egh^2}{12\rho(1-\sigma^2)}$$

となる。初期条件を $t=0$ で $w=0$, $dw/dt=0$ として第1報で述べた如くに $q(r, \theta, t)$ をノーマル函数の級数に展開して w を求めると $k_s^{(n)}$ を $J_n(ka)I_n'(ka) - J_n'(ka)I_n(ka) = 0$ の第 s 番目の根とし, 更に $k_s^{(n)4}G^2 = \nu_{ns}^2$ ($2\pi/\nu_{ns}$ は n ケの節直径, $s-1$ ケの節円をもつた自由振動の周期) とおくと,

$$\begin{aligned} w = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos(n\theta) \{ J_n(k_s^{(n)}r) I_n'(k_s^{(n)}a) - J_n'(k_s^{(n)}a) I_n(k_s^{(n)}r) \} \left\{ \frac{\sin(\nu_{ns}t)}{\nu_{ns}} \int_0^t B_{ns} \cos(\nu_{ns}t) dt \right. \\ & \left. - \frac{\cos(\nu_{ns}t)}{\nu_{ns}} \int_0^t B_{ns} \sin(\nu_{ns}t) dt \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sin(n\theta) \{ J_n(k_s^{(n)}r) I_n'(k_s^{(n)}a) - J_n'(k_s^{(n)}a) I_n(k_s^{(n)}r) \} \\ & \times \left\{ \frac{\sin(\nu_{ns}t)}{r_{ns}} \int_0^t A_{ns} \cos(\nu_{ns}t) dt - \frac{\cos(\nu_{ns}t)}{\nu_{ns}} \int_0^t A_{ns} \sin(\nu_{ns}t) dt \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

となる。

茲に

$$\begin{aligned} A_{ns} = & \frac{1}{\pi \rho h a^2 J_n(k_s^{(n)}a) I_n(k_s^{(n)}a) J_n'(k_s^{(n)}a) I_n'(k_s^{(n)}a)} \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) d\theta \int_0^a q(r, \theta, t) r \\ & \times \{ J_n(k_s^{(n)}r) I_n'(k_s^{(n)}a) - J_n'(k_s^{(n)}a) I_n(k_s^{(n)}r) \} dr \end{aligned} \quad (3)$$

$$B_{0s} = \frac{1}{2} \{ B_{ns} \}_{n=0} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} B_{ns} = & \frac{1}{\pi \rho h a^2 J_n(k_s^{(n)}a) I_n(k_s^{(n)}a) J_n'(k_s^{(n)}a) I_n'(k_s^{(n)}a)} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) d\theta \int_0^a q(r, \theta, t) r \\ & \times \{ J_n(k_s^{(n)}r) I_n'(k_s^{(n)}a) - I_n'(k_s^{(n)}a) I_n(k_s^{(n)}r) \} dr \end{aligned} \quad (5)$$

である。

扱て上式を用いて偏心衝撃をうけた場合を解くのであるが, 最初に

(i) $\theta=0$, $r=\varepsilon$ なる点を中心に半径 a_0 なる円内に一様な衝撃力 A が作用する場合:

(a) 三角形単独衝撃の場合: 今坐標の原点を $r=\varepsilon$ に移すと, 旧坐標系に関する面積要素 $r d\theta dr$ は新坐標系では $r_0 d\varphi dr_0$ となる。一方,

$$\left. \begin{aligned} J_n(k_s^{(n)}r) \frac{\sin}{\cos}(n\theta) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{m+n}(k_s^{(n)}\varepsilon) J_m(k_s^{(n)}r_0) \frac{\sin}{\cos}(m\pi - \varphi) \\ I_n(k_s^{(n)}r) \frac{\sin}{\cos}(n\theta) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-)^m I_{m+n}(k_s^{(n)}\varepsilon) I_m(k_s^{(n)}r_0) \frac{\sin}{\cos}(m\pi - \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (6)^*$$

なる関係がある故, A_{ns} , B_{ns} を求める積分は,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin}{\cos}(m\pi - \varphi) \int_0^{a_0} J_m(k_s^{(n)}r_0) dr_0 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a_0} J_0(k_s^{(n)}r_0) dr_0 = 2\pi \frac{a_0^2}{k_s^{(n)}} \left\{ \begin{matrix} J_1 \\ -I_1 \end{matrix} \right\} (k_s^{(n)}a_0)$$

となり, 従つて

$$A_{ns} = 0 \quad (7)$$

$$B_{0s} = \frac{A a_0}{h \rho a^2} \frac{\{ J_0(k_s^{(0)}\varepsilon) J_1(k_s^{(0)}a_0) I_0'(k_s^{(0)}a) + I_0(k_s^{(0)}\varepsilon) I_1(k_s^{(0)}a_0) J_0'(k_s^{(0)}a) \}}{k_s^{(0)} J_0(k_s^{(0)}a) I_0(k_s^{(0)}a) J_0'(k_s^{(0)}a) I_0'(k_s^{(0)}a)} \quad (8)$$

* Watson: Theory of Bessel Function.

$$B_{ns} = \frac{2Aa_0}{h\rho a^2} \frac{\{J_n(k_s^{(n)}\varepsilon)J_1(k_s^{(n)}a_0)I_n'(k_s^{(n)}a) + I_n(k_s^{(n)}\varepsilon)I_1(k_s^{(n)}a_0)J_n'(k_s^{(n)}a)\}}{k_s^{(n)}J_n(k_s^{(n)}a)I_n(k_s^{(n)}a)J_n'(k_s^{(n)}a)I_n'(k_s^{(n)}a)} \quad (9)$$

なる式が得られる。但し上式の A_{ns} , B_{ns} の式には時間因数は除いてある。(7), (8), (9) を (2) に代入して時間因数を求めると、既に第1報で求めた如く、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu_{ns}^2} \left[\left\{ \frac{t}{\beta} - \frac{\sin(\nu_{ns}t)}{\nu_{ns}\beta} \right\} H(t) - 2 \left\{ \frac{t-\beta}{\beta} - \frac{\sin(\nu_{ns}t-\beta)}{\nu_{ns}\beta} \right\} H(t-\beta) \right. \\ \left. + \left\{ \frac{t-2\beta}{\beta} - \frac{\sin(\nu_{ns}t-2\beta)}{\nu_{ns}\beta} \right\} H(t-2\beta) \right] \quad (10) \end{aligned}$$

但し $H(t) = 0 \quad t \leq 0$
 $= 1 \quad t \geq 0$

が得られる。故に $k_s^{(n)4}G = \nu_{ns}^2$ を考慮すればこの場合の変位の式として

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{Aa_0 g}{G\rho h a^2} \Omega_{ns}(k_s^{(n)}, \varepsilon, a_0) \Gamma_{ns}(k_s^{(n)}r) \cos(n\theta) {}_1\Xi_{ns}(\nu_{ns}, \beta, t) \quad (11)$$

と表わすことが出来る。

但し

$$\Omega_{ns}(k_s^{(n)}, \varepsilon, a_0) \equiv \frac{\delta_n \{J_n(k_s^{(n)}\varepsilon)I_n'(k_s^{(n)}a)J_1(k_s^{(n)}a_0) - I_n(k_s^{(n)}\varepsilon)J_n'(k_s^{(n)}a)I_1(k_s^{(n)}a_0)\}}{k_s^{(n)4}J_n(k_s^{(n)}a)I_n(k_s^{(n)}a)} \quad (12)$$

$$\Gamma_{ns}(k_s^{(n)}r) \equiv \frac{1}{k_s^{(n)}} \left(\frac{J_n(k_s^{(n)}r)}{J_n'(k_s^{(n)}a)} - \frac{I_n(k_s^{(n)}r)}{I_n'(k_s^{(n)}a)} \right) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} {}_1\Xi_{ns}(\nu_{ns}, \beta, t) \equiv \left\{ \frac{t}{\beta} - \frac{\sin(\nu_{ns}t)}{\beta\nu_{ns}} \right\} H(t) - 2 \left\{ \frac{t-\beta}{\beta} - \frac{\sin(\nu_{ns}t-\beta)}{\nu_{ns}\beta} \right\} H(t-\beta) \\ + \left\{ \frac{t-2\beta}{\beta} - \frac{\sin(\nu_{ns}t-2\beta)}{\beta\nu_{ns}} \right\} H(t-2\beta) \quad (14) \end{aligned}$$

$$\delta_n = 2 \quad (n \neq 0), \quad \delta_n = 1 \quad (n = 0)$$

である。

(b) 連続衝撃の場合： この時は (11) で時間因数 ${}_1\Xi_{ns}$ が変わるのみで他にはかわりがない。時間因数を求めると次の如くなる。

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{m-1} \frac{e^{-\nu_{ns}t}}{2\nu_{ns}} \left[\frac{1}{\sqrt{p^2 + (\omega - \nu_{ns})^2}} \left[\left\{ e^{-\frac{p}{\omega}\pi} \sin\left(\overline{\omega - \nu_{ns} \cdot mk} + \frac{\pi}{\omega} - \delta_1\right) - \sin(\overline{\omega - \nu_{ns} \cdot mk} - \delta_1) \right\} \right. \right. \\ \times \cos(\nu_{ns}t - m\omega k) + \left\{ e^{-\frac{p}{\omega}\pi} \cos\left(\overline{\omega - \nu_{ns} \cdot mk} + \frac{\pi}{\omega} - \delta_1\right) - \cos(\overline{\omega - \nu_{ns} \cdot mk} - \delta_1) \right\} \sin(\nu_{ns}t - m\omega k) \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{p^2 + (\omega + \nu_{ns})^2}} \left[\left\{ e^{-\frac{p}{\omega}\pi} \cos\left(\overline{\omega + \nu_{ns} \cdot mk} + \frac{\pi}{\omega} - \delta_2\right) - \cos(\overline{\omega + \nu_{ns} \cdot mk} - \delta_2) \right\} \sin(\nu_{ns}t + m\omega k) \right. \right. \\ \left. \left. - \left\{ e^{-\frac{p}{\omega}\pi} \sin\left(\overline{\omega + \nu_{ns} \cdot mk} + \frac{\pi}{\omega} - \delta_2\right) - \sin(\overline{\omega + \nu_{ns} \cdot mk} - \delta_2) \right\} \cos(\nu_{ns}t + m\omega k) \right] \right] \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2\nu_{ns}} \left[\frac{1}{\sqrt{p^2 + (\omega - \nu_{ns})^2}} \left[\{e^{-pt} \sin(\overline{\omega - \nu_{ns} \cdot t} - \delta_1) - e^{-\nu_{ns}t} \sin(\overline{\omega - \nu_{ns} \cdot mk} - \delta_1)\} \right. \right. \\ \times \cos(\nu_{ns}t - m\omega k) + \{e^{-pt} \cos(\overline{\omega - \nu_{ns} \cdot t} - \delta_1) - e^{-\nu_{ns}t} \cos(\overline{\omega - \nu_{ns} \cdot mk} - \delta_1)\} \sin(\nu_{ns}t - m\omega k) \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{p^2 + (\omega + \nu_{ns})^2}} \left[\{e^{-pt} \cos(\overline{\omega + \nu_{ns} \cdot t} - \delta_2) - e^{-\nu_{ns}t} \cos(\overline{\omega + \nu_{ns} \cdot mk} - \delta_2)\} \sin(\nu_{ns}t + m\omega k) \right. \right. \\ \left. \left. - \{e^{-pt} \sin(\overline{\omega + \nu_{ns} \cdot t} - \delta_2) - e^{-\nu_{ns}t} \sin(\overline{\omega + \nu_{ns} \cdot mk} - \delta_2)\} \cos(\nu_{ns}t + m\omega k) \right] \right] \quad (15) \end{aligned}$$

特に $k = \pi/\omega$ の場合には連続衝撃の型は衝撃力の 0 の区間が一点になつて第2図1-7に示した様な型になる。第2図1-7は $\omega/\nu_{ns} = 3, 2, 3/2, 1, 3/4, 1/2, 1/4$, $p/\nu_{ns} = 3, 2, 3/2, 1, 3/4, 1/2, 1/4$ の場合についてであるが、 ω/ν_{ns} が小なる程、 p/ν_{ns} が大なる程衝撃の型は Flat になつて行くことが判る。最も ω/ν_{ns} , p/ν_{ns} が或る程度以上になれば最早衝撃とは云えなくなるのである。この場合の時間因数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{m-1} \frac{e^{-\nu_{ns}t}}{2\nu_{ns}} \left[-\frac{1}{\sqrt{p^2 + (\omega - \nu_{ns})^2}} \left\{ e^{-\frac{p}{\omega}\pi} \sin\left(\nu_{ns}t - m + 1 - \frac{\nu_{ns}}{\omega}\pi - \delta_1\right) \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sin \left(\nu_{ns} t - m \frac{\nu_{ns}}{\omega} \pi - \delta_1 \right) \left\{ - \frac{1}{\sqrt{p^2 + (\omega + \nu_{ns})^2}} \left\{ e^{-\frac{p}{\omega} \pi} \sin \left(\nu_{ns} t - m + 1 \frac{\nu_{ns}}{\omega} \pi + \delta_2 \right) \right. \right. \\
& + \sin \left(\nu_{ns} t - m \frac{\nu_{ns}}{\omega} \pi + \delta_2 \right) \left. \right\} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2 \nu_{ns}} \left[\frac{1}{\sqrt{p^2 + (\omega - \nu_{ns})^2}} \left\{ (-)^m e^{-p t} \sin (\omega t - \delta_1) \right. \right. \\
& - e^{-m \frac{p}{\omega} \pi} \sin \left(\nu_{ns} t - m \frac{\nu_{ns}}{\omega} \pi - \delta_1 \right) \left. \right\} - \frac{1}{\sqrt{p^2 + (\omega + \nu_{ns})^2}} \left\{ (-)^m e^{-p t} \sin (\omega t + \delta_2) \right. \\
& + e^{-m \frac{p}{\omega} \pi} \sin \left(\nu_{ns} t - m \frac{\nu_{ns}}{\omega} \pi + \delta_2 \right) \left. \right\} \left. \right] \quad (16)
\end{aligned}$$

となる。

但し (15), (16) で

$$\left. \begin{aligned} \tan \delta_1 &= -\frac{p}{\omega - \nu_{ns}}, \\ \tan \delta_2 &= -\frac{p}{\omega + \nu_{ns}} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

である。(15), (16) に ν_{ns}^2 を掛けたものを ${}_2\Xi_{m,n,s}(p, \omega, \nu_{ns}, t)$, ${}_2\Xi'_{m,n,s}(p, \omega, \nu_{ns}, t)$ で表わすと、この時の変位 w は次の如くに求まる。

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{(n-1)} \frac{A a_0}{G \rho h a^2} \Omega_{ns}(k_s^{(n)}, \varepsilon, a_0) \Gamma_{ns}(k_s^{(n)} r) \cos(n\theta) \left\{ \begin{aligned} & {}_2\Xi_{m,n,s}(p, \omega, \nu_{ns} \cdot t) \\ & {}_2\Xi'_{m,n,s}(p, \omega, \nu_{ns} \cdot t) \end{aligned} \right. \quad (18)$$

茲に $\sum_{m=0}^{m-1}$ なる記号は (15), (16) に於て $(m-1)k + \frac{\pi}{\omega} \leq t \leq mk$ の時は第1項のみをとることを示し、(即ち $\sum_{m=0}^{m-1}$ と同じである) $mk \leq t \leq mk + \frac{\pi}{\omega}$ の時には (15), (16) の第2項をも採ることを示すものである。

(ii) 偏心集中外力の場合 (強さ $\mathfrak{A}$)

$\lim_{a_0 \rightarrow 0} A \pi a_0^2 \equiv \mathfrak{A}$ とし、猶

$$a_0 J_1(k_s^{(n)} a_0) = \frac{1}{2} k_s^{(n)} a_0^2 + 0(a_0^4)$$

$$a_0 I_1(k_s^{(n)} a_0) = \frac{1}{2} k_s^{(n)} a_0^2 + 0(a_0^4)$$

なることを考慮すれば容易に次の式が得られる。

(a) 三角型衝撃 :

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{A} g}{G \rho 2 \pi h a^2} \Omega'_{ns}(k_s^{(n)}, \varepsilon) \Gamma_{ns}(k_s^{(n)} r) \cos(n\theta) {}_1\Xi_{ns}(\beta, \nu_{ns} \cdot t) \quad (19)$$

(b) 連続衝撃 :

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{(n-1)} \frac{\mathfrak{A} g}{G \rho 2 \pi h a^2} \Omega'_{ns}(k_s^{(n)} \varepsilon) \Gamma_{ns}(k_s^{(n)} r) \cos(n\theta) \left\{ \begin{aligned} & {}_2\Xi_{m,n,s}(p, \omega, \nu_{ns} \cdot t) \\ & {}_2\Xi'_{m,n,s}(p, \omega, \nu_{ns} \cdot t) \end{aligned} \right. \quad (20)$$

但し

$$\Omega'_{ns}(k_s^{(n)} \varepsilon) \equiv \frac{\delta_n}{2 k_s^{(n)3} J_n(k_s^{(n)} a) I_n(k_s^{(n)} a)} \{ J_n(k_s^{(n)} \varepsilon) I_n'(k_s^{(n)} a) - I_n(k_s^{(n)} \varepsilon) J_n'(k_s^{(n)} a) \} \quad (21)$$

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 2 & (n \neq 0) \end{cases}$$

である。

(iii) 扱て上に求めたものはいずれも衝撃的荷重の場合についてのものであるが、偏心強制外力が調和的である場合には既に第1報で求めた時間因数、即ち

$${}_3\Xi_{ns}(\omega, \nu_{ns}, t) = -\frac{\nu_{ns}^2}{\omega^2 - \nu_{ns}^2} \left[\frac{\omega}{\nu_{ns}} \sin \nu_{ns} t - \sin \omega t \right] \quad (22)$$

を夫々 ${}_1\Xi_{n,s}$, ${}_2\Xi_{m,n,s}$, ${}_2\Xi'_{m,n,s}$ の代りに代入すればよい。即ち $\theta=0$, $r=\varepsilon$ なる点を中心に半径 a_0 なる円内に一様なる強さで外力が作用する時は、

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A a_0 g}{G \rho h a^2} \Omega_{ns}(k_s^{(n)}, \varepsilon, a_0) \Gamma_{ns}(k_s^{(n)} r) \cos(n\theta) {}_3\Xi_{ns}(\omega, \nu_{ns}, t) \quad (23)$$

となり、又集中強制外力の時は、

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{A}_{gs}}{Gp \cdot 2\pi h a^2} \frac{\Omega'_{ns}(k_s^{(n)}, \varepsilon)}{\Gamma_{ns}(k_s^{(n)} r) \cos(n\theta)} {}_3\Xi_{ns}(\omega, \nu_{ns}, t) \quad (24)$$

となる。

§3. 数 値 計 算 例 (変位)

前節で得た結果について数値計算を試みることにする。簡単な為に $a=1$ とすると、

$$J_n(k) I_n'(k) - I_n(k) J_n'(k) = 0$$

の根は次表の如くなる。

$s \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6
1	3.190	4.612	5.904	7.143	8.345	9.524	10.687
2	6.306	7.800	9.197	10.537	11.833	13.121	
3	9.425	10.958	12.402	13.795			
4	12.577	14.108					
5	15.716						

上表で $\square$ 内のものは Janke Emde の Funktion tafeln より採用し、 $\equiv$ のものは著者が新しく求めたもので、それ以外のは Carrington の論文*より採つたものである。

之等の根を用いて Γ_{ns} , Ω_{ns} , Ω'_{ns} を計算すれば第1表, 第2表, 第3表の如くなり、之を graph で示したものが夫々第3図, 第4図1-8, 第5図である。但し以下すべて円板の半径 a を1とする。

又時間因数 ${}_1\Xi_{ns}(\nu_{ns}, \beta, t)$ は既に第1報で求めてあるのでここでは省略し、連続衝撃、特に $k=\pi/\omega$ の場合即ち第2図1-7に示した衝撃型に対応する ${}_2\Xi_{m,n,s}(p, \omega, \nu_{ns}t)$ を図示したものが第6図1-7であり、更に p/ω , ω/ν_{ns} による時間因数の max を示すと第7図の如くなる。 $p/\nu \rightarrow 0$ ならば $\omega/\nu=1$ の時に ∞ になることは当然である。

以上の計算結果を用いれば、三角型衝撃、又は連続衝撃を任意の点にうけた時の任意の時刻に於ける変位の模様を図示することが出来る。一例として第8図1-3, 第9図1-2に三角型単独衝撃 $\nu_{0.1}\beta=3$ が $\varepsilon=0, 0.4, 0.7$ の点に作用した時の $t=\frac{1}{2}\beta, \beta, \frac{3}{2}\beta, 2\beta$ に於ける変位を、衝撃点と中心を結ぶ直径に沿つての横断面図及び平面図を示してある。之等によると衝撃を受けた時には最大変位は衝撃点に生ずるが、時間の経過と共に最低次の振動が大きくなり、最大変位は中央に移つて行くことが判る。 $\nu_{0.1}\beta=3$ の場合では $t=\frac{3}{2}\beta$ で最大変位があらわれて居るけれども、衝撃が鋭くなればこの値は異つて来るが、衝撃波の伝播状況は前と同じことが推論出来る。更に図より偏心が大になる程短時間の中に最大変位は衝撃点より離れて行くことや、衝撃波が周辺で反射して来る有様が知られる。

扱て衝撃ではなくして、周期的強制外力 $\sin \omega t$ が作用するとき、或る時間後には自由振動は粘性のため消失して強制振動のみが残る。この時外力の周期がある次数の自由振動の周期と一致すれば所謂共鳴の現象を起してその振動は他の振動に比して非常に大きくなるのである。但し自由振動の周期に一致しなくともそれに近くなればその振動はやはり大きくなるのである。斯くて或る強制外力の下ではその周期に近い自然振動が比較的大きく出て来るのである。今振動数を大きさの順にならべると、第4表の如くなる。但し $(n, s+1)$ は n =節直径の数, s =節円の数であり、※は根の値が正確に出て居ないものである。

表より (2.2) と (0.3), (0.3) と (5.1), (3.2) と (6.1), (2.3) と (0.4) 等の根の値が他のものに比して相接近して居ることが判る。又 n, s が共に大となれば根 k は

$$k \doteq \frac{\pi}{2} (n+2s+2)$$

* H. Carrington : "The Frequency of Vibration of Flat Circular plates Fixed at the Circumference" Phil. Mag. [6] 50, 1925. p.1261—1264.

** 実際は粘性のために高次の振動は非常に速に消えてしまうものと考えられる。

となる。即ち節直径二つ取去る代りに節円一つを導入しても k の値は不変である。従つて斯様な組合せの n, s に対して二種の振動が共存し得るのである。その観点に立つて R. C. Colwell, J. K. Stewart 及び A. W. Friend は、円形膜の Chladni 図形を求めて居る。併し上記の法則は少くとも振動数の大なる場合にしか正当ではないことは表を見れば明らかなことである。併しながら周期的強制外力の周期が上に示した如き相接近した振動数に近ければ、之等の振動は他のものに比して非常に大きくあらわれるのである。

即ちこの場合の Chladni 図形は

$$\left. \begin{aligned} A \Omega_{0,3} \Gamma_{0,3} - B \Omega_{5,1} \Gamma_{5,1} \cos 5 \theta &= 0 \\ A \Omega_{3,2} \Gamma_{3,2} \cos 3 \theta - B \Omega_{6,1} \Gamma_{6,1} \cos 6 \theta &= 0 \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

等より求まる。之等を図示すれば第10図1-3の如くなる。

A, B の比をかえることに依り Chladni 図形の移動が生ずる。又強制外力の偏心の影響は結局 A/B の比をかえたことにすぎないことが判り、特に外力が一方の自由振動形の節円上に作用するときは該振動は生じないことも知れる。之は極めて当然のことである。

§4. 数値計算例 (曲げモーメント)

次に曲げモーメントを計算して見よう。半径方向及び θ 方向の曲げモーメントの式は、

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -\frac{\rho G}{g} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\} \\ M_\theta &= -\frac{\rho G}{g} \left\{ \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

である。茲に G は剛性率, σ はポアソン比をあらわすものである。変位の式を上式に代入して計算すると、曲げモーメントに係する項は $\Gamma_{ns}(k_s^{(n)}, r) \cos(n\theta)$ のみであり、

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sigma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right\} \Gamma_{ns}(k_s^{(n)}, r) \cos(n\theta) \\ &= \left[(1-\sigma) \left\{ \frac{J_n''(k_s^{(n)} r)}{J_n'(k_s^{(n)} a)} - \frac{I_n''(k_s^{(n)} r)}{I_n'(k_s^{(n)} a)} \right\} \frac{1}{k_s^{(n)}} - \sigma k_s^{(n)} \left\{ \frac{J_n(k_s^{(n)} r)}{J_n'(k_s^{(n)} a)} + \frac{I_n(k_s^{(n)} r)}{I_n'(k_s^{(n)} a)} \right\} \right] \cos(n\theta) \\ & \left\{ \sigma \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \Gamma_{ns}(k_s^{(n)}, r) \cos(n\theta) \\ &= \left[(\sigma-1) \left\{ \frac{J_n''(k_s^{(n)} r)}{J_n'(k_s^{(n)} a)} - \frac{I_n''(k_s^{(n)} r)}{I_n'(k_s^{(n)} a)} \right\} \frac{1}{k_s^{(n)}} - k_s^{(n)} \left\{ \frac{J_n(k_s^{(n)} r)}{J_n'(k_s^{(n)} a)} + \frac{I_n(k_s^{(n)} r)}{I_n'(k_s^{(n)} a)} \right\} \right] \cos(n\theta) \end{aligned}$$

なる故、今

$$\chi_{ns}(k_s^{(n)} r) \equiv \frac{1}{k_s^{(n)2}} \left\{ \frac{J_n''(k_s^{(n)} r)}{J_n'(k_s^{(n)} a)} - \frac{I_n''(k_s^{(n)} r)}{I_n'(k_s^{(n)} a)} \right\} \quad (27)$$

$$\chi'_{ns}(k_s^{(n)} r) \equiv \left\{ \frac{J_n(k_s^{(n)} r)}{J_n'(k_s^{(n)} a)} + \frac{I_n(k_s^{(n)} r)}{I_n'(k_s^{(n)} a)} \right\} \quad (28)$$

とおけば、変位の式中

$$\Gamma_{ns}(k_s^{(n)} r) \frac{1}{k_s^{(n)}} \cos(n\theta)$$

の代りに、

$$M_r : -\frac{\rho G}{g} \{ (1-\sigma) \chi_{ns}(k_s^{(n)} r) - \sigma \chi'_{ns}(k_s^{(n)} r) \} \cos(n\theta) \equiv \mathfrak{M}_r(k_s^{(n)} r) \cos(n\theta) \quad (29)$$

$$M_\theta : -\frac{\rho G}{g} \{ (\sigma-1) \chi_{ns}(k_s^{(n)} r) - \chi'_{ns}(k_s^{(n)} r) \} \cos(n\theta) \equiv \mathfrak{M}_\theta(k_s^{(n)} r) \cos(n\theta) \quad (30)$$

とおけばよいことになる。

(29), (30) で $\sigma = \frac{1}{3}$ と仮定し、 $\mathfrak{M}_r / -\frac{\rho G}{g}$, $\mathfrak{M}_\theta / -\frac{\rho G}{g}$ を計算すれば第5表, 第6表の如くなり、之を図示すれば第11図, 第12図の如くなる。従つて之等と前に求めた Ω_{ns} , Ω'_{ns} , ${}_2\Xi_{m,n,s}$ 等の値を用いれば任意の時刻に於ける任意の点の曲げモーメントの値が求められるのである。

* R. C. Colwell, J. K. Stewart, & A. W. Friend : Philosophical Magazine, Jan. 1939.

表を見ると中心に於て値を有するのは、節直径のない振動及び節直径2本の振動のみであることが知れる。このことは一見奇妙に見えるが、次の如くにして推察了解出来るのである。即ち M_r , M_θ は何れも χ_{ns} , χ'_{ns} の二部分よりなつて居るが、前者は $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$ に比例し、後者は $w - 2 \frac{I_n(k_s^{(n)} r)}{I_n'(k_s^{(n)} a)}$ に比例するものである。節直径を有する振動では恒に $w_{r=0}=0$, $I_n(k_s^{(n)} r)_{r=0}=0$ となり、従つて $\chi'_{nsr=0} \equiv 0$ となる。併し節直径のない振動では $w_{r=0} \neq 0$, $I_n(k_s^{(n)} r)_{r=0}=1$ なる故、 $\chi'_{nsr=0} \neq 0$ である。次に χ_{ns} について考えると、各振動図形は第13図に示す如くである。図より奇数個の節直径を持つた振動は相対する領域がすべて反対符号をもち、丁度 $r=0$ で変曲点となり、 $d^2 w / dr^2 = 0$ になつて居り、従つて曲げモーメントの値は0となるのである。次に節直径が偶数個の場合には、相対する領域が同じ符号を持ち中心は変曲点にならず、極小を示す如き点となるのである。併しこの時は振動が高次になるにつれて、 $r=0$ に於ける変位への接線の次数が次第に増加して行き、節直径4本以上の振動では $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \equiv 0$ になるのである。斯くてこの場合には節直径2本の時のみ $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \neq 0$ となる。以上のことより節直径なしの振動及び節直径2本の振動のみが中心に於て、曲げモーメントの値を有することが理解されると考えられる。

又表に見る如く曲げモーメントに關する M_r , M_θ の値は Γ_{ns} の場合と異り、振動の次数が上つても左程急激には減少することなく、従つて任意の衝撃を受けた場合の曲げモーメントの変化の様子は更に高次の振動まで計算を行わなければ不明である。併しある振動数の強制外力をうけて振動して居る場合には、それに近い振動数の振動が大きく現れることは前にも述べたが、之に対する曲げモーメントの図形を画くと第14図1-2の如くなる。一般に各次数の自由振動に対応する曲げモーメントの最大値は、節直径のない振動では中心に表われるが*他の節直径のある振動では夫々の振動によつて異なる。従つて上述の強制振動中にあらわれるモーメントの最大値をあたえる点はその振動を構成する振動の種類及びそれ等の比によつて異なるのである。

§5. 結 語

以上第1報に引続き周辺固定された円形弾性板の偏心強制外力、及び偏心衝撃の場合について計算を行つて見たのであるが、その結果として得られたことは大体次の如きものである。

(1) 偏心及び外力の作用範囲の影響(時間因数の影響は考へない) 偏心を有しない場合には、節直径のない振動のみが現れる。併してこの場合には節直径及び節円なしの基本振動が外力の作用範囲如何に不拘恒に一番優勢である。他の節円を有する振動は、外力の作用範囲に依つて大きさが異り、且つ節円の数に等しい数の或る作用範囲の値の時に0となる。即ちこの作用範囲 a_0 の値は $\Gamma_{ns}(k_s^{(n)} r)$ の max. の点に相当する r の値に等しい。或いは云いかえれば、円板の自由振動の各振動の撓み曲線が max. を示す様な r の値に一致する点までが外力の作用範囲であれば、その振動は生じないのである。(但し中心 $r=0$ の点は除く)

外力が偏心を有する如になると、節直径を有する振動も生じて来る。併し偏心の小さい間は節直径をもつた高次の振動も小さいが、偏心が大になるにつれて高次振動も大きくあらわれて来る。同数の節直径を持つた振動を比較して見ると、節円のないものが一番大きく節円を有する振動は外力の偏心量、作用範囲の如何によつて異なるが、それ等の大きさは振動性を示しながらも、高次になるにつれて小さくなることが云える。又前と同じく節円を有する振動が0になる如き外力の作用範囲の数は、一般に節円の数と一致する。併し外力の作用範囲 a_0 が大きくなれば之等の中表われてこないものがある。更に同じ偏心を有する外力の場合には外力の作用範囲が大となればなる程高次の振動は小さくなる。

(2) 今上に述べたことは、すべて各次数の振動に應ずる時間因数を考慮に入れない場合について述べたものであり、従つて強制振動で外力の周期と各振動の振動数との間に或る一定の関係があると、その振動は大きくあらわれる。外力が単なる調和的外力であれば、外力の振動数と板の自然振動数と一致すれば該振動は最大になるが、三角衝撃、連続衝撃の場合には本文中に述べた様な関係を有する振動が時間因数は最大となる。

(3) 三角形単独衝撃について計算を行つた結果次のことが明かになつた。即ち衝撃開始直後は高次の振動の影響が著しいが、時間の経過と共に基本振動が優勢になる。従つて最大変位点は衝撃直後は外力の作用点にあるが、次第に中央へうつる。又衝撃が鋭ければ鋭い程衝撃開始直後は高次の振動が優勢になる。

(4) 振動数が極く近い様な自然振動が存在する(振動数が大になれば $k \doteq \frac{\pi}{2}(s+2n+2)$ を満足する振動が

* 但し節直径節円なしの振動に対応する M_r は周辺で最大値をとる。

これである。)。故に強制外力によつて之等が他のものに比して非常に大きく、組合わさつて誘起される場合がある。このときはそれに対応して美麗な Cladni 図形が得られる。

(5) 曲げモーメントは、節直径なしの振動及び節直径2本の振動のみが中心で値を有し、その他のものはすべて中心では0である。モーメントの最大値は振動によつて異なるが、節直径のない振動について見ると節円のない振動の M_r のみが周辺で最大値をとり、其の他はすべて中心で最大値をとる。又変位と同様時間因数を考慮外におけば振動が高次になる程モーメントの値も小さくなるが、変位の場合程急速ではない。従つて任意の衝撃を受けた時の模様を知るには更に高次の振動まで計算する必要がある。

(6) 曲げモーメントについても(4)の場合に対応して Chladni 図形がかかる。この時のモーメントの最大値を示す点は誘起される振動によつて異なる。

終りに臨み本論文の御指導御鞭達を賜つた吉識教授に厚く御礼申し上げます。

第 2 図 1

第 2 図 2

第 2 図 3

第 2 図 4

第 2 図 5

第 2 図 6

第 2 図 7

第 4 図 1

第 3 図

第 4 図 2

第 4 図 3

第 4 図 4

第 4 図 5

第 4 図 6

第 4 圖 7

第 4 圖 8

第 5 圖

第 6 圖 1

第 6 圖 2

第 6 圖 4

第 6 圖 3

第 6 図 5

第 6 図 7

第 7 図

第 6 図 6

第 8 図 1

第 8 図 2

第 8 図 3

$$\varepsilon = 0.4 \quad \cos 5\theta = 0$$

$$A\Omega_{03}\Gamma_{03} - B\Omega_{22}\Gamma_{22}\cos 2\theta = 0 \quad A\Omega_{03}\Gamma_{03} - B\Omega_{22}\Gamma_{22}\cos 2\theta + C\Omega_{51}\Gamma_{51}$$

第 10 図 2

$$A\Omega_{23}\Gamma_{23}\cos 2\theta - B\Omega_{04}\Gamma_{04} = 0$$

第 10 図 3

第 11 図

第 12 図

Table 2-1 $\Omega ns(\beta^2, \epsilon, a_0)$

β^2	ϵ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
β^2	0	0.1525	0.0926	0.1215	0.0790	0.0904	0.0702	0.0510	0.0310	0.0169	0.0062
	1	0.1285	0.0256	0.1160	0.1042	0.0875	0.0609	0.0509	0.0315	0.0173	
	2	0.1213	0.1169	0.1195	0.0980	0.0835	0.0659	0.0489	0.0320		
	3	0.1118	0.1095	0.1025	0.0917	0.0779	0.0625	0.0476			
	4	0.1006	0.0986	0.0926	0.0836	0.0716	0.0586				
	5	0.0883	0.0864	0.0810	0.0747	0.0649					
	6	0.0755	0.0745	0.0706	0.0650						
	7	0.0631	0.0623	0.0593							
	8	0.0518	0.0514								
β^2	0	0.0407	0.0439	0.0310	0.0370	0.0355	0.0157	0.0202	0.0180	0.0110	0.0049
	1	0.0425	0.0385	0.0270	0.0189	0.0306	0.0197	0.0163	0.0170	0.0140	
	2	0.0323	0.0209	0.0203	0.0080	0.0252	0.0109	0.0140	0.0140		
	3	0.0200	0.0181	0.0131	0.0052	0.0210	0.0077	0.0106			
	4	0.0089	0.0081	0.0054	0.0017	0.0100	0.0049				
	5	0.0001	0.0001	0.0004	0.0001	0.0010					
	6	0.0050	0.0050	0.0045	0.0031						
	7	0.0050	0.0050	0.0045	0.0031						
	8	0.0081	0.0076	0.0069							
β^2	0	0.0279	0.0205	0.0081	0.0054	0.0112	0.0075	0.0012	0.0001	0.0010	0.0039
	1	0.0192	0.0151	0.0055	0.0036	0.0073	0.0049	0.0004	0.0001		
	2	0.0104	0.0079	0.0030	0.0019	0.0045	0.0025	0.0005	0.0003		
	3	0.0038	0.0020	0.0005	0.0002	0.0005	0.0002	0.0002			
	4	0.0037	0.0023	0.0005	0.0001	0.0016	0.0011				
	5	0.0035	0.0027	0.0009	0.0005	0.0010					
	6	0.0010	0.0007	0.0001	0.0001	0.0006					
	7	0.0014	0.0012	0.0005							
	8	0.0024	0.0020								
β^2	0	0.0157	0.0109	0.0009	0.0062	0.0026	0.0034	0.0001	0.0007	0.0055	0.0085
	1	0.0079	0.0059	0.0004	0.0010	0.0032	0.0017	0.0021	0.0000	0.0045	
	2	0.0024	0.0015	0.0000	0.0000	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	
	3	0.0025	0.0016	0.0001	0.0010	0.0005	0.0004	0.0000			
	4	0.0012	0.0008	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000				
	5	0.0007	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000					
	6	0.0007	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000					
	7	0.0010	0.0007	0.0000	0.0000	0.0000					
	8	0.0010	0.0007	0.0000	0.0000	0.0000					

Table 2-2 $\Omega ns(\beta^2, \epsilon, a_0)$

β^2	ϵ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
β^2	0	0.0099	0.0070	0.0030	0.0023	0.0029	0.0010	0.0010	0.0016	0.0020	0.0020
	1	0.0074	0.0017	0.0007	0.0006	0.0005	0.0001	0.0003	0.0003	0.0006	0.0007
	2	0.0015	0.0007	0.0005	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0005
	3	0.0007	0.0004	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002
	4	0.0007	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
	5	0.0007	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
	6	0.0004	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
	7	0.0004	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
	8	0.0003	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
β^2	0	0.0036	0.0025								
	1	0.0036	0.0025								
	2	0.0036	0.0025								
	3	0.0036	0.0025								
	4	0.0036	0.0025								
	5	0.0036	0.0025								
	6	0.0036	0.0025								
	7	0.0036	0.0025								
	8	0.0036	0.0025								
β^2	0	0.0036	0.0025								
	1	0.0036	0.0025								
	2	0.0036	0.0025								
	3	0.0036	0.0025								
	4	0.0036	0.0025								
	5	0.0036	0.0025								
	6	0.0036	0.0025								
	7	0.0036	0.0025								
	8	0.0036	0.0025								
β^2	0	0.0036	0.0025								
	1	0.0036	0.0025								
	2	0.0036	0.0025								
	3	0.0036	0.0025								
	4	0.0036	0.0025								
	5	0.0036	0.0025								
	6	0.0036	0.0025								
	7	0.0036	0.0025								
	8	0.0036	0.0025								

Table 2-3 $\Omega ns(\beta^2, \epsilon, a_0)$

β^2	ϵ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
β^2	0	0	0.0136	0.0102	0.00377	0.00831	0.00364	0.0063	0.00176	0.00520	0.00649
	1	0	0.00570	0.00308	0.00141	0.00310	0.00135	0.00251	0.000850	0.00277	
	2	0	0.00125	0.00094	0.00074	0.00075	0.00093	0.00074	0.00061		
	3	0	0.00208	0.00155	0.00056	0.00124	0.00064	0.00139			
	4	0	0.00073	0.00054	0.00022	0.00051	0.00004				
	5	0	0.00114	0.00084	0.00037	0.00092					
	6	0	0.00025	0.00014	0.00026						
	7	0	0.00082	0.00049							
	8	0	0.00074								
β^2	0	0.0049	0.01903	0.03660	0.05214	0.06014	0.05724	0.04408	0.02406	0.00949	0.0045
	1	0	0.00490	0.01685	0.03213	0.04570	0.05287	0.05093	0.04046	0.02583	
	2	0	0.00379	0.01316	0.02340	0.03560	0.04234	0.04137	0.03409		
	3	0	0.00234	0.00908	0.01762	0.02527	0.02990	0.03024			
	4	0	0.00171	0.00511	0.01085	0.01484	0.01621				
	5	0	0.00045	0.00181	0.00379	0.00599					
	6	0	0.00013	0.00042	0.00036						
	7	0	0.00037	0.00132							
	8	0	0.00030								
β^2	0	0.00492	0.01576	0.02349	0.02153	0.00942	0.00146	0.01698	0.01493	0.00664	
	1	0	0.00471	0.01110	0.01634	0.01514	0.00633	0.00478	0.01244	0.01187	
	2	0	0.00168	0.00337	0.00779	0.00726	0.00287	0.00262	0.00771		
	3	0	0.00018	0.00057	0.00082	0.00062	0.00019	0.00145			
	4	0	0.00062	0.00200	0.00306	0.00305	0.00204				
	5	0	0.00010	0.00125	0.00150	0.00360					
	6	0	0.00032	0.00109	0.00107						
	7	0	0.00007	0.00011							
	8	0	0.00019								
β^2	0	0.00552	0.01450	0.01789	0.00116	0.00983	0.00703	0.00261	0.00901	0.00517	
	1	0	0.00273	0.00716	0.00606	0.00906	0.00444	0.00380	0.00153	0.00525	
	2	0	0.00016	0.00043	0.00042	0.00004	0.00021	0.00003	0.00008		
	3	0	0.00005	0.00221	0.00029	0.00020	0.00058	0.00017			
	4	0	0.00050	0.00122	0.00124	0.00024	0.00120				
	5	0	0.00010	0.00050	0.00063	0.00010					
	6	0	0.00043	0.00116	0.00120						
	7	0	0.00010	0.00029							
	8	0	0.00010								

Table 2-5 $\Omega ns(k^n, \varepsilon, a_0)$

k^n	ε	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$k^{(1)}$	1	0	0.00026	0.00207	0.00942	0.01756	0.01732	0.00602	0.00833	0.01371	0.00768
	2	0	0.00014	0.00110	0.00503	0.00937	0.00922	0.00213	0.00400	0.00830	
	3	0	0.00002	0.00043	0.00074	0.00136	0.00120	0.00025	0.00188		
	4	0	0.00000	0.00030	0.00117	0.00257	0.00264	0.00139			
	5	0	0.00000	0.00025	0.00113	0.00216	0.00238				
	6	0	0.00000	0.00001	0.00004	0.00035					
	7	0	0.00002	0.00015	0.00064						
	8	0	0.00000	0.00005							
	9	0	0.00002								
$k^{(2)}$	1	0	0.00001	0.00049	0.00228	0.00716	0.01497	0.02270	0.02432	0.01856	0.00789
	2	0	0.00000	0.00028	0.00156	0.00492	0.01029	0.01522	0.01700	0.01305	
	3	0	0.00000	0.00013	0.00070	0.00227	0.00467	0.01067	0.01260		
	4	0	0.00000	0.00000	0.00002	0.00000	0.00023	0.00073			
	5	0	0.00000	0.00005	0.00003	0.00000	0.00014				
	6	0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000					
	7	0	0.00000	0.00000	0.00002						
	8	0	0.00000	0.00000							
	9	0	0.00000								
$k^{(5)}$	1	0	0.00006	0.00075	0.00387	0.00909	0.01156	0.00663	0.00302	0.00912	0.00354
	2	0	0.00003	0.00033	0.00121	0.00482	0.00512	0.00293	0.00134	0.00361	
	3	0	0.00000	0.00002	0.00001	0.00002	0.00030	0.00017	0.00000		
	4	0	0.00001	0.00012	0.00064	0.00149	0.00190	0.00109			
	5	0	0.00000	0.00004	0.00024	0.00047	0.00060				
	6	0	0.00000	0.00005	0.00026	0.00062					
	7	0	0.00000	0.00004	0.00023						
	8	0	0.00000	0.00001							
	9	0	0.00000								
$k^{(6)}$	1	0	0.00000	0.00010	0.00005	0.00041	0.00094	0.01703	0.02083	0.01734	0.00703
	2	0	0.00000	0.00006	0.00005	0.00025	0.00040	0.01047	0.01246	0.01149	
	3	0	0.00000	0.00002	0.00010	0.00070	0.00180	0.00333	0.00453		
	4	0	0.00000	0.00001	0.00000	0.00035	0.00099	0.00121			
	5	0	0.00000	0.00001	0.00014	0.00050	0.00129				
	6	0	0.00000	0.00001	0.00005	0.00010					
	7	0	0.00000	0.00001	0.00006						
	8	0	0.00000	0.00001							
	9	0	0.00000								

Table 3 $\Omega ns(k^n, \varepsilon)$

k^n	ε	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k^{(1)}$	1	0	0.1342	0.1315	0.1232	0.1088	0.0910	0.0709	0.0511	0.0310	0.0150	0.0045
	2	0	0.0523	0.0473	0.0354	0.0145	0.0038	0.0170	0.0221	0.0202	0.0120	0.0036
	3	0	0.0300	0.0236	0.0087	0.0058	0.0120	0.0078	0.0014	0.0006	0.0008	0.0037
	4	0	0.0191	0.0122	0.0001	0.0077	0.0032	0.0042	0.0007	0.0006	0.0050	0.0030
	5	0	0.0130	0.0065	0.0042	0.0036	0.0030	0.0020	0.0025	0.0023	0.0023	0.0025
$k^{(2)}$	1	0	0.1378	0.1069	0.0916	0.0999	0.0947	0.0778	0.0538	0.0262	0.0081	0
	2	0	0.0770	0.0435	0.0409	0.0223	0.0025	0.0220	0.0202	0.0200	0.0073	0
	3	0	0.0158	0.0108	0.0076	0.0067	0.0115	0.0043	0.0061	0.0097	0.0046	0
	4	0	0.0173	0.0139	0.0048	0.0100	0.0040	0.0089	0.0024	0.0072	0.0055	0
	5	0	0.0051	0.0199	0.0383	0.0544	0.0627	0.0596	0.0465	0.0274	0.0081	0
$k^{(5)}$	1	0	0.0055	0.0176	0.0261	0.0240	0.0102	0.0071	0.0177	0.0161	0.0060	0
	2	0	0.0067	0.0177	0.0169	0.0024	0.0110	0.0097	0.0031	0.0107	0.0061	0
	3	0	0.0006	0.0055	0.0155	0.0204	0.0403	0.0449	0.0390	0.0247	0.0082	0
	4	0	0.0011	0.0074	0.0170	0.0219	0.0156	0.0007	0.0124	0.0146	0.0064	0
	5	0	0.0017	0.0091	0.0149	0.0087	0.0049	0.0097	0.0000	0.0002	0.0050	0
$k^{(6)}$	1	0	0.0097	0.0015	0.0065	0.0177	0.0271	0.0348	0.0340	0.0233	0.0116	0
	2	0	0.0002	0.0023	0.0103	0.0192	0.0190	0.0066	0.0090	0.0147	0.0074	0
	3	0	0.0000	0.0005	0.0025	0.0080	0.0164	0.0246	0.0263	0.0214	0.0089	0
	4	0	0.0000	0.0007	0.0037	0.0080	0.0112	0.0064	0.0039	0.0107	0.0046	0
	5	0	0.0000	0.0001	0.0010	0.0045	0.0107	0.0185	0.0226	0.0186	0.0076	0

Table 4

k^n	$(n, 0+1)$	差
3.19	(0.1)	1.42
4.61	(1.1)	1.30
5.91	(2.1)	0.40
6.31	(0.2)	0.83
7.14	(3.1)	0.65
7.79	(1.2)	0.55
8.54	(4.1)	0.23
9.19	(2.2)	0.25
9.42	(0.3)	0.10

Table 5 $\frac{\partial \Omega ns}{\partial \varepsilon}$

k^n	ε	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k^{(1)}$	1	0	0.7429	0.7172	0.6393	0.5125	0.3586	0.1737	0.0102	0.2250	0.4191	0.5968
	2	0	0.5119	0.4567	0.2851	0.0657	0.1403	0.0070	0.2460	0.2132	0.0439	0.1545
	3	0	0.4015	0.2969	0.0507	0.1853	0.2440	0.3700	0.0440	0.1649	0.1313	0.0262
	4	0	0.3072	0.1920	0.0720	0.2115	0.0642	0.1011	0.1289	0.0244	0.1232	0.0261
	5	0	0.2902	0.1032	0.1632	0.1007	0.1080	0.0829	0.0865	0.0723	0.0715	0.0581
$k^{(2)}$	1	0	0.1683	0.3078	0.3935	0.4116	0.3582	0.2415	0.0776	0.1086	0.2976	0.4745
	2	0	0.2024	0.3114	0.2800	0.2406	0.0501	0.1938	0.2096	0.1016	0.0471	0.2744
	3	0	0.2168	0.2452	0.0717	0.1327	0.0908	0.0575	0.1036	0.1349	0.0020	0.1906
	4	0	0.2151	0.1412	0.0954	0.1507	0.0820	0.1317	0.1289	0.1006	0.0300	0.1454
	5	0	0.1291	0.0913	0.0100	0.1039	0.2052	0.2557	0.2343	0.0440	0.0077	0.1673
$k^{(5)}$	1	0	0.1014	0.0414	0.0938	0.2017	0.1927	0.0684	0.0884	0.1687	0.1190	0.0426
	2	0	0.0579	0.0573	0.0449	0.1475	0.0772	0.0549	0.1365	0.0504	0.0700	0.0797
	3	0	0.0294	0.0404	0.0035	0.0783	0.1547	0.1902	0.1588	0.0616	0.0969	0.2720
	4	0	0.0334	0.0009	0.1006	0.1671	0.1261	0.0884	0.1039	0.1722	0.0621	0.2006
	5	0	0.0294	0.0492	0.1385	0.0031	0.0720	0.1266	0.0850	0.1040	0.0347	0.1465
$k^{(6)}$	1	0	0.0071	0.0197	0.0155	0.0324	0.0097	0.1452	0.1497	0.0800	0.0468	0.2292
	2	0	0.0084	0.0047	0.0310	0.0086	0.1274	0.0415	0.0090	0.1156	0.0125	0.1647
	3	0	0.0027	0.0178	0.0179	0.0060	0.0460	0.0144	0.1273	0.0063	0.0375	0.1925
	4	0	0.0037	0.0019	0.0040	0.0652	0.1127	0.0692	0.0403	0.0954	0.0237	0.1505
	5	0	0.0001	0.0006	0.0004	0.0033	0.0216	0.0711	0.1112	0.0093	0.0332	0.0526

Table 6 $\frac{\partial \Omega ns}{\partial \varepsilon}$

k^n	ε	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$k^{(1)}$	1	0	0.7428	0.7265	0.6745	0.6060	0.5085	0.3926	0.2669	0.1507	0.0020	0.1308	0.2524
	2	0	0.5145	0.4705	0.3730	0.2332	0.0879	0.0201	0.0992	0.1069	0.0513	0.0252	0.1138
	3	0	0.4042	0.3352	0.1817	0.0280	0.0780	0.0777	0.0159	0.0446	0.0519	0.0039	0.0670
	4	0	0.3071	0.2520	0.0682	0.0677	0.0519	0.0529	0.0511	0.0065	0.0391	0.0156	0.0632
	5	0	0.2902	0.1781	0.0185	0.2474	0.0229	0.0849	0.2225	0.0366	0.0100	0.0203	0.0432
$k^{(2)}$	1	0	0.1010	0.1879	0.4582	0.2732	0.2606	0.1927	0.1355	0.0430	0.0500	0.1500	0.0000
	2	0	0.1233	0.1990	0.2102	0.1371	0.0403	0.0422	0.0747	0.0477	0.0409	0.0084	0.0000
	3	0	0.1341	0.1711	0.1054	0.0573	0.0177	0.0428	0.0216	0.0482	0.0109	0.0035	0.0000
	4	0	0.1350	0.1205	0.0011	0.0624	0.0116	0.0446	0.0207	0.0303	0.0133	0.0000	0.0000
	5	0	0.1292	0.1325	0.1702	0.2017	0.2335	0.2326	0.1990	0.1540	0.0719	0.0243	0.1130
$k^{(3)}$	1	0	0.1014	0.1623	0.1839	0.1508	0.0686	0.0300	0.0444	0.0601	0.0000	0.0786	0.0000
	2	0	0.0579	0.1240	0.2508	0.4680	0.1900	0.1372	0.0310	0.0855	0.0935	0.0946	0.1415
	3	0	0.0359	0.0043	0.1356	0.1750	0.2821	0.1083	0.1559	0.0788	0.0208	0.0908	0.0000
	4	0	0.0505	0.1127	0.1603	0.1697	0.1160	0.0430	0.0763	0.0369	0.0167	0.0057	0.0000
	5	0	0.0630	0.1225	0.1426	0.0797	0.0201	0.0899	0.1371	0.0385	0.0205	0.0040	0.0000
$k^{(4)}$	1	0	0.0138	0.0344	0.0793	0.1451	0.1251	0.0921	0.1672	0.1013	0.0020	0.0784	0.0000
	2	0	0.0133	0.0054	0.0880	0.1700	0.1295	0.1484	0.1338	0.0605	0.0221	0.0521	0.0000
	3	0	0.0020	0.0229	0.0452	0.0916	0.1320	0.1614	0.1535	0.1026	0.0206	0.0442	0.0000
	4	0	0.0030	0.0270	0.0779	0.1291	0.1349	0.1279	0.0701	0.0617	0.0416	0.0206	0.0503
	5	0	0.0001	0.0048	0.0473	0.0545	0.0493	0.0481	0.1431	0.0429	0.0505	0.1016	0.0000