(昭和 24 年 4 月造船協会春季講演会に於て講演)

衝撃を受ける矩形板に就て

正員 工學士 金 澤 武¹⁾正員 工學士 石 井 正 夫²⁾

Abstract

On The Rectangular Plates Under Lateral Impact.

By Takeshi Kanazawa, *Kogakushi, Member*Masao Ishii, *Kogakushi, Member*

The rectangular plates under lateral impact of an isosceles triangular type were studied analytically. The maximum deflections and the maximum bending moments under various impact durations, and their ratios to those under statical loads, etc. were evaluated numerically. Thus many interesting characters of the behavior of the rectangular plates under impact were brought to light.

§ 1. 緒 言

機械及び構造物の衝撃を受ける部分に対しては、従来の静力学的立場よりの設計法では不十分であり、是非共動力学的観点に力脚した設計法によらねばならぬことは誰しも認める所である。従つて衝撃問題は 19 世紀後半以来数多くの研究が発表されたのであるが、本協会に於ても九州大学の渡辺教授、栖原助教授によつて梁の横衝撃が論ぜられ³⁾、又著者等の一人は周辺固定円形板に衝撃が加えられた場合についての解析を発表したことがある⁴⁾。

此の度はその解法を一般化すると共に、周辺支持の矩形板について計算する機会を得たので茲に発表する次第である。もとより解法については一般によく行われている外力を規準函数の級数に展開する方法で目新しい所はないが、之より更に進んでその変位、曲げモーメントの分布について計算し、衝撃中心点、衝撃作用範囲、衝撃時間等と板の自然動数との間の関係を解明し、必ずしも基本振動型に対応する成分のみでは変位、曲げモーメントを近似出来ないことを示したものである⁵⁾。之の拙ない論分が幾分でも衝撃の性質理解に資する所があれば幸である。

§ 2. 衝撃によつて板に生ずる変位の一般解及び三角型衝撃荷重による時間函数の特性

辺の長さ a, b , 厚さ h , 単位体積当りの重量 γ , 曲げ剛性 D なる矩形板に第 1 図の斜線を施した部分 A に衝撃荷重が加えられた時に生ずる変位は一般に次式であたえられる⁶⁾。

$$w = \frac{g}{\gamma h} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\iint_A \mathcal{U}(\xi, \eta) \varphi_{m,n}(\xi, \eta) d\xi \cdot d\eta}{\lambda_{m,n}} \varphi_{m,n}(x, y) \int_0^t q_0(\tau) \sin \{ \lambda_{m,n} t - \tau \} d\tau \quad (1)$$

茲に $\mathcal{U}(x, y)$, $q_0(t)$: 衝撃荷重

$\varphi_{m,n}(x, y)$: 法化された m, n 次の規準函数

$\lambda_{m,n}$: 矩形板の m, n 次の自然円振動数

である。

第 1 図

1) 東京大学第一工学部助教授

2) 東京大学第一工学部大学院学生

3) 渡辺恵弘, 栖原二郎 : 衝撃を受ける梁に就て, (昭和 19 年 4 月)

4) 金沢 武 : 円形弾性板の強制振動に就て, (昭和 19 年 11 月 (第一報), 昭和 21 年 11 月 (第二報))

5) 前掲, 渡辺, 栖原両氏の論文では之等の関係はあまり明瞭にされて居ない様である。梁の場合についても本論文と同様にして之等の関係を求めることが出来る。之については目下検討中である。

6) 附録 1 参照

扱て衝撃荷重の型は衝撃の種類によつて種々なる場合が考えられるが、此所ではその時間的变化を、

$$q_0(t) = \begin{cases} \frac{t}{\beta} & ; 0 \leq t \leq \beta \\ \frac{2\beta - t}{\beta} & ; \beta \leq t \leq 2\beta \\ 0 & \end{cases} \quad (2)$$

第2図

と仮定すると、(1)式の時間に関する積分は、

$$\begin{aligned} \Xi_{m,n} &= \int_0^t q_0(\tau) \sin \{ \lambda_{m,n}(t-\tau) \} d\tau \\ &= \frac{1}{\lambda_{m,n}} \left\{ \left[\frac{t}{\beta} - \frac{\sin(\lambda_{m,n} t)}{\beta \lambda_{m,n}} \right] K(t) - 2 \left[\frac{t-\beta}{\beta} - \frac{\sin(\lambda_{m,n} t - \beta)}{\beta \lambda_{m,n}} \right] K(t-\beta) \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{t-2\beta}{\beta} - \frac{\sin(\lambda_{m,n} t - 2\beta)}{\beta \lambda_{m,n}} \right] K(t-2\beta) \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

茲に $K(t)=0$; $t \leq 0$, $K(t)=1$; $t > 0$

$$\text{今} \quad \Phi_{m,n}(t) = \lambda_{m,n} \Xi_{m,n}(t) \quad (4)$$

とおくと (1) は、

$$w = \frac{g}{\gamma h} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\iint_A \mathfrak{U}(\xi, \eta) \varphi_{m,n}(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\lambda_{m,n}^2} \varphi_{m,n}(x, y) \Phi_{m,n}(t) \quad (5)$$

となる。

之の式によつて、衝撃によつて生ずる変位は、基準函数 $\varphi_{m,n}(x, y)$ に比例する項と、衝撃時間 2β 、板の円振動数 $\lambda_{m,n}$ 及び t の函数である $\Phi_{m,n}(t)$ なる時間函数の積で示されるものの和で示されることが知れる。

そこで先づ時間函数 $\Phi_{m,n}(t)$ の性質について吟味することにしよう。 $\Phi_{m,n}(t)$ は $\beta \lambda_{m,n}$ 及び t/β の函数であると考えて、計算により⁸⁾ $\Phi_{m,n}(t)$ の最大値を生ずる時刻 t/β と $\beta \lambda_{m,n}$ ⁹⁾ の関係を示すと第3図が得られる。之によると $\beta \lambda_{m,n} \leq 1.57$ ならば対応する振動成分の最大値は、 $t/\beta \geq 2$ 、即ち衝撃終了後に生じ、 $\beta \lambda_{m,n} \geq 1.57$ ならば $1.0 \leq t/\beta < 2.0$ 、即ち衝撃荷重が最大値に達した後消滅するまでの間に生ずる。

又 $t/\beta \leq 1.0$ では最大値が現れないのは当然である。又 $\beta \lambda_{m,n} \rightarrow \infty$ とすると $\Phi_{m,n}(t)$ を最大にする時刻 t/β は1に近づくことは、斯様な場合には荷重が殆ど静的に作用したことになることを考えれば理解されるであろう。

次に第4図には、 $\Phi_{m,n}(t)$ の最大値 $\Phi_{m,n}(t)_{\max}$ と $\beta \lambda_{m,n}$ の関係を示してある。 $\beta \lambda_{m,n} = 2.8$ の時に $\Phi_{m,n}(t)_{\max}$ の最大値、 $\text{Max}[\Phi_{m,n}(t)_{\max}]$ は1.52となり、之の生ずる時刻は第3図より $t/\beta \approx 1.5$ 、即ち衝撃が大体2/3終了した時である。又 $\beta \lambda_{m,n} \rightarrow \infty$ の時に $\Phi_{m,n}(t)_{\max} \rightarrow 1.0$ となることも前と同様当然である。

7) ある物体の打撃による衝撃の場合には、衝撃荷重は近似的に之の様な型になることが実験的にも求められている。(例えば熊井豊二、日本航空学会誌、昭和19年3月、第107号参照)、又菅井栄松氏(航研報告第227号)は之の様な三角形荷重を考え(3)を計算し、更に第4図の $0 \leq \beta \lambda_{m,n} \leq 5$ の範囲について同じ結果を求められている。併し茲では更に詳しく詳しく検討することにする。猶ほ前掲渡辺、栖原両氏の論文では衝撃力を次の二つの型、

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad q_0(t) &= \sin(\omega t); \quad \left(0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}\right) & q_0(t) &= 0; \quad \left(\frac{2\pi}{\omega} \leq t\right) \\ \text{(ii)} \quad q_0(t) &= 1 - \frac{\omega t}{\pi}; \quad \left(0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}\right) & q_0(t) &= 0; \quad \left(\frac{2\pi}{\omega} \leq t\right) \end{aligned}$$

に仮定している。

8) 附録II参照

9) 衝撃力の作用時間を仮に外力の周期(T_0)の1/2とすれば、之の量は板の自然振動周期 $T_{m,n}$ と T_0 の比で示される。即ち、

$$\beta \lambda_{m,n} = \frac{\pi}{2} \frac{T_0}{T_{m,n}}$$

10) 衝撃終了後に最大値を生ずる様な場合には、之の時は既に外力が作用して居ないのである故、衝撃終了後の $\Phi_{m,n}(t)$ の波型は $T=2\pi/\lambda_{m,n}$ なる周期をもつものである。第3図に示したのは $|\Phi_{m,n}(t)|$ の最大値をあたえる最初の時刻を示し、第4図には之の $|\Phi_{m,n}(t)|_{\max}$ の値を示してある。

第 3 図

第 4 図

次に衝撃終了後に生ずる $\Phi_{m,n}(t)_{\max}$ の値を計算し、 $\beta\lambda_{m,n}$ との関係を示すと第 5 図が得られる。之の時は、 $\beta\lambda_{m,n} \rightarrow \infty$ とすれば $\Phi_{m,n}(t)_{\max} \rightarrow 0$ となる。更に $\beta\lambda_{m,n} \approx 6.2, 12.4$ 等を満足する振動成分は衝撃終了後非常に小さくなることは興味あることである。

第 5 図

$\Phi_{m,n}(t)$ と $\beta\lambda_{m,n}$ の関係を種々の t/B の値に対して求めておけば、之を用いて後述する如く、任意の時刻に於ける変位及び曲げモーメントが計算出来る。第 6 図には特に $t/B=1.0, 1.5, 2.0$ について示してある。

第 6 図

$\beta\lambda_{m,n} \rightarrow \infty$ とすると、

$$t/B=1.0 \text{ では, } \Phi_{m,n}(t) \rightarrow 1.0$$

$$t/B=1.5 \text{ では, } \Phi_{m,n}(t) \rightarrow 0.5$$

$$t/B=2.0 \text{ では, } \Phi_{m,n}(t) \rightarrow 0$$

となることが知れる。

衝撃による変位の模様については、(5) より明らから既に述べた如く、衝撃の作用点、作用範囲にも関連ある

ものである故 $\beta\lambda_{m,n}=2.8$ を満足する振動型が一番大きくあらわれるとは限らない。従つて次に之等のことについて考察を進めることにする。

§ 3. 周辺支持の矩形板の変位及び曲げモーメント

矩形板の周辺が支持されている時には、

$$\varphi_{m,n}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (6)$$

$$\lambda_{m,n} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{Dg}{\gamma h}} \quad (7)$$

である。又曲げモーメントは次の式より求まる。

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

(σ =ポアソン比)

(1°) 集中衝撃

矩形板の任意の点 (x_0, y_0) に集中して衝撃が作用する場合を集中衝撃と称すると、この時 (6), (7) を代入した (5) 式は次の如くなる。

$$w = \frac{4\mathfrak{U}}{abD\pi^4} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{n\pi}{b} y_0}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot \Phi_{m,n}(t) \quad (8)$$

特に正方形板 ($a=b$) ならば、

$$w = \frac{4\mathfrak{U}a^2}{D\pi^4} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{n\pi}{b} y_0}{(m^2+n^2)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} y \cdot \Phi_{m,n}(t) \quad (8)'$$

(8) 式より曲げモーメントを求めると、

$$M_x = \frac{4\mathfrak{U}}{ab\pi^2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \sigma \frac{n^2}{b^2} \right)}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} y \cdot \Phi_{m,n}(t) \quad (9)_1$$

$$M_y = \frac{4\mathfrak{U}}{ab\pi^2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\left(\sigma \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} y \cdot \Phi_{m,n}(t) \quad (9)_2$$

(2°) 全面衝撃

板の全面に亘つて強さ一様な衝撃を受ける場合を全面衝撃と称すれば、(5) 式内の $\iint_A \varphi_{m,n}(\xi, \eta) d\xi \cdot d\eta$ なる積分は (6) 式より、

$$\int_0^a \int_0^b \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{m\pi}{a} \xi \cdot \sin \frac{n\pi}{b} \eta \cdot d\xi \cdot d\eta = \frac{8\sqrt{ab}}{m, n\pi^2} \quad (m, n = \text{奇数})$$

$$= 0 \quad (m, n = \text{偶数})$$

となり、結局

$$w = \frac{16\mathfrak{U}}{D\pi^6} \sum_{m,n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y}{m \cdot n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \Phi_{m,n}(t) \quad (10)$$

特に正方形板 ($a=b$) ならば、

$$w = \frac{16\mathfrak{U}a^4}{D\pi^6} \sum_{m,n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} y}{m \cdot n (m^2 + n^2)^2} \Phi_{m,n}(t) \quad (10)'$$

又曲モーメントは、

$$M_x = \frac{16\mathfrak{U}}{\pi^4} \sum_{m,n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \sigma \frac{n^2}{b^2}\right)}{m \cdot n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot \Phi_{m,n}(t) \quad (11)_1$$

$$M_y = \frac{16\mathfrak{U}}{\pi^4} \sum_{m,n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\left(\sigma \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}{m \cdot n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot \Phi_{m,n}(t) \quad (11)_2$$

(3°) 部分衝撃

第7図の如く一様の衝撃力を矩形部分に受ける時には、

$$\begin{aligned} & \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\mu}^{y_0+\mu} \frac{2}{ab} \sin \frac{m\pi}{a} \xi \sin \frac{n\pi}{b} \eta d\xi d\eta \\ &= \frac{8\sqrt{ab}}{m \cdot n \pi^2} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{m\pi}{a} \delta \sin \frac{n\pi}{b} \mu \end{aligned}$$

となり、

$$w = \frac{16\mathfrak{U}}{D\pi^6} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{m\pi}{a} \delta \sin \frac{n\pi}{b} \mu}{m \cdot n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot \Phi_{m,n}(t) \quad (12)$$

特に $a=b$ のときは、

$$w = \frac{16\mathfrak{U}a^4}{D\pi^6} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{n\pi}{a} y_0 \sin \frac{m\pi}{a} \delta \sin \frac{n\pi}{a} \mu}{m \cdot n (m^2 + n^2)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} y \cdot \Phi_{m,n}(t) \quad (12)'$$

曲げモーメントは、

$$M_x = \frac{16\mathfrak{U}}{\pi^4} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \sigma \frac{n^2}{b^2}\right)}{m \cdot n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{m\pi}{a} \delta \sin \frac{n\pi}{b} \mu \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot \Phi_{m,n}(t) \quad (13)_1$$

$$M_y = \frac{16\mathfrak{U}}{\pi^4} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\left(\sigma \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}{m \cdot n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{m\pi}{a} \delta \sin \frac{n\pi}{b} \mu \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot \Phi_{m,n}(t) \quad (13)_2$$

なる式で示される。

§4 衝撃によつて生ずる板の変位の特性

扱て衝撃によつて生ずる各成分間の関係を定性的に考察する為に、先に述べた第4図に於て、第8図の如く

$$\Phi_{m,n}(t)_{\max} = \frac{1}{2} \beta \lambda_{m,n} \quad (0 \leq \beta \lambda_{m,n} \leq 3)$$

$$\Phi_{m,n}(t)_{\max} = \frac{3}{2} \quad (3 \leq \beta \lambda_{m,n})$$

と簡単化して考えれば¹¹⁾、先に述べた変位の各成分の最大値間には次の如き関係が成立する。

(1°) 集中衝撃

第8図

11) 之の様な簡単化は図より明らかな如く $\beta \lambda_{m,n} \geq 3$ に対しては大きすぎる。図の鎖線で示した如く、

$$\Phi_{m,n}(t)_{\max} = \left(3 - \frac{1}{2} \beta \lambda_{m,n}\right); \quad (3 \leq \beta \lambda_{m,n} \leq 4), \quad \Phi_{m,n}(t)_{\max} = 1; \quad (4 \leq \beta \lambda_{m,n})$$

とすれば更により近似が得られるが、簡単な為之の様に考える。

$$\left. \begin{aligned} w_{m,n \max} &\propto \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{n\pi}{b} y_0}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} ; & (0 \leq \beta_{\lambda_{m,n}} \leq 3) \\ w_{m,n \max} &\propto \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{n\pi}{b} y_0}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} ; & (3 \leq \beta_{\lambda_{m,n}}) \end{aligned} \right\} \quad (8)''$$

(2°) 全面衝撃

$$\left. \begin{aligned} w_{m,n \max} &\propto \frac{1}{m \cdot n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} ; & (0 \leq \beta_{\lambda_{m,n}} \leq 3) \\ w_{m,n \max} &\propto \frac{1}{m \cdot n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} ; & (3 \leq \beta_{\lambda_{m,n}}) \end{aligned} \right\} \quad (10)''$$

(3°) 部分衝撃

$$\left. \begin{aligned} w_{m,n \max} &\propto \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{m\pi}{a} \delta \sin \frac{n\pi}{b} \mu}{m \cdot n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} ; & (0 \leq \beta_{\lambda_{m,n}} \leq 3) \\ w_{m,n \max} &\propto \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{m\pi}{a} \delta \sin \frac{n\pi}{b} \mu}{m \cdot n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} ; & (3 \leq \beta_{\lambda_{m,n}}) \end{aligned} \right\} \quad (12)''$$

第9図

之等の式よりいずれの場合でも $\beta_{\lambda_{m,n}} \geq 3$ の方が $0 \leq \beta_{\lambda_{m,n}} \leq 3$ の場合よりも (衝撃の鈍い方が鋭い場合よりも) 高次振動の割合が小さいことが知れる。今 $a=b$ (正方形板) とし, 集中衝撃の場合に衝撃点を夫々, ① $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, ② $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{3}\right)$, ③ $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$, ④ $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{6}\right)$, ⑤ $\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right)$ と変化せしめた場合と, 全面衝撃を受けた場合とについて $0 \leq \beta_{\lambda_{m,n}} \leq 3$ なる鋭い衝撃について基本振動の振幅の最大値に対する高次振動の最大振幅の比を上式より求めると第1表の如くなる。

猶 $m, n \rightarrow \infty$ とすれば $w_{m,n \max} \rightarrow 0$ となることは何如に鋭い衝撃をあててもあまり高次の振動は生じないことを示すものである。これは実際上は減衰作用等の作用によつても当然のことであろう。

第1表 (1° 振動数の大きさに配列した。2° $(w_{3.1}^{1.3})_{\max}$ ect. は大なる方の値をとつてある)

位 置	集 中 衝 撃					全面衝撃
	① $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$	② $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{3}\right)$	③ $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$	④ $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{6}\right)$	⑤ $\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right)$	
$(w_{2.1}^{1.2})_{\max} / (w_{1.1})_{\max}$	0	0.4000	0.4000	0.6950	0.6950	0
$(w_{2.2})_{\max} / (w_{1.1})_{\max}$	0	0	0.2500	0	0.7520	0
$(w_{3.1}^{1.3})_{\max} / (w_{1.1})_{\max}$	0.2000	0.2000	0	0.4000	0.4000	0.0666
$(w_{3.2}^{2.3})_{\max} / (w_{1.1})_{\max}$	0	0.1540	0	0.2670	0.5350	0
$(w_{4.1}^{1.4})_{\max} / (w_{1.1})_{\max}$	0	0.1176	0.1176	0.2018	0.2018	0
$(w_{3.3})_{\max} / (w_{1.1})_{\max}$	0.1111	0	0	0.2222	0.4444	0.0123

以下順を追って各衝撃型の場合の特性を比較検討する。

(1°) 集中衝撃 ((8), (8)', (8)'' 式より)

i) 衝撃作用点に対応する振動型の節線上にあれば, その振動型は生じない。((8) 式)

ii) 衝撃作用点が周辺に近く, a/b の値が 1 以外の時は必ずしも基本振動が一番大きく現れるとは限らない。

又その大きさの順序は全面衝撃の場合の如く, 振動数の増大と共に小さくなるのではなく, x_0, y_0 の値で種々に変り得る。之のことは言い換れば全面衝撃に比し高次振動の影響が大きいことになる。第 1 表, (8)'' 式)

iii) 正方形板では恒に基本振動が一番大きくあらわれる。((8)' 式)

iv) 正方形板で, 衝撃の強さを種々に変えた時に生ずる $w_{\max}$ の値は第 2 表の如くなる。((8)' 式)

第 2 表 (単位: $w_{\max} / \frac{49la^2}{D\pi^4}$)

$\beta\lambda_{1,1}$	0	1.0	2.0	2.8	4.0	6.0	8.0	∞
①	0	0.237 0.257*	0.365 0.361	0.389 0.350	0.369	0.275	0.279	0.270
②	0	0.213 0.222	0.312 0.310	0.335 0.290	0.319	0.245	0.246	0.239
③	0	0.191 0.205	0.267 0.266	0.286 0.250	0.277	0.210	0.207	0.208
④	0	0.134 0.142	0.178 0.183	0.195 0.175	0.190	0.144	0.141	0.142
⑤	0	0.071 0.083	0.090 0.093	0.098 0.088	0.098	0.075	0.073	0.075

(* 値が 2 段に互つて書いてあるのは上段は $1 \leq t/\beta \leq 3$ の間に生ずる $w_{\max}$ の値を, 下段は衝撃終了後各成分の時間因数の最大値が重つた場合の $w_{\max}$ の値である。)

之を第 10 図に示してある。即ち図の実線が生じ得べき最大変位を示すものである。これに依れば全体を通じて $w_{\max}$ の最大値は $\beta\lambda_{1,1}=2.8, x_0=y_0=\frac{a}{2}$ の $\frac{t}{\beta} \approx 1.5$ に生じその値は $0.389 \frac{49la^2}{D\pi^4}$ で, 静荷重の場合 ($\beta\lambda_{1,1} \rightarrow \infty$) との値の比は,

$$\frac{\text{Max}[w_{\max-\text{dynamical}}]}{w_{\max-\text{static}}} \approx 1.44$$

である。之の値は衝撃点が周辺に近づくにつれて, 高次振動の影響の為に減少するが, あまり大きな変化はない。

第 10 図

第 3 表

衝 撃 点	①	②	③	④	⑤
$\frac{\text{Max}[w_{\max-\text{dyn.}}]}{w_{\max-\text{static.}}}$	1.44	1.40	1.37	1.37	1.30

又衝撃によつて生ずる最大変位として $w_{1,1 \max}$ のみを採つた場合は, 例えば中央衝撃では $\text{Max}[w_{1,1 \max}] =$

$0.380 \cdot \frac{4\mathcal{U}a^2}{D\pi^4}$ でその誤差は 3% を越えないが、衝撃点が周辺に近くなり且つ衝撃が鋭くなるとこのことは言えなくなる。例えば衝撃点 ⑤ $\beta\lambda_{1,1}=1.0$ の場合には $w_{1,1,\max}=0.058 \cdot \frac{4\mathcal{U}a^2}{D\pi^4}$ であり、之のみでは近似出来ない。

$\text{Max}[w_{\max}]$ の生ずる $\beta\lambda_{1,1}$ の値は衝撃点が周辺に近づくにつれて次第に大なる値へ移行する。又、その生ずる位置は衝撃点が中央のときは恒に中央であるが、衝撃点が中心以外のときは、衝撃点と板の中心を結んだ線上に現れ、衝撃が鋭い程、中心に対して衝撃点の反対側に生じその中心との距離は大となる。逆に衝撃が次第に鈍くなると衝撃点の方に移動して $\beta\lambda_{1,1}=\infty$ (静的) の場合の $w_{\max}$ の点に近づく。之等のことは衝撃点が中心より遠い所にあればある程顕著になる。この関係を図示すると第 11 図の如くである。之等のことも、高次振動の影響と考えられる。例えば衝撃点 ⑥ の場合に $w_{\max}$ の生ずる位置は次の如くである。

- The point of Impact
- The point of $w_{\max}$ staticl
- The point of $w_{\max}$ dynamical
- The direction of movement of $w_{\max}$ dynamical, when $\beta\lambda_{1,1}$ tends to 0
- The direction of movement of $w_{\max}$ dynamical, when $\beta\lambda_{1,1}$ tends to ∞

第 11 図

v) $\nu \equiv \frac{a}{b}$ の値が変化した場合の $w_{\max}$ は次の如くなる。但し衝撃点は $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ 、即ち中心衝撃である。
(8) 式

第 5 表 (単位 ; $w_{\max} / \frac{4\mathcal{U}a^2}{D\pi^4}$) (* 第 2 表参照)

$\beta\lambda_{1,1}$	0	1.0	2.0	2.8	4.0	6.0	8.0	∞
$\nu=1$	0	0.237 0.257 *	0.365 0.361	0.389 0.350	0.369	0.275	0.279	0.270
$\nu=2$	0	0.0694 0.0913	0.1132 0.1161	0.1317 0.1132	0.125	0.0961	0.0857	0.0974
$\nu=3$	0	0.0353 0.0437	0.0519 0.0522	0.0548 0.0455	0.0536	0.0439	0.0409	0.0441

又之を図に示すと第 12 図の如くなる。静荷重時の最大撓みと $\text{Max}[w_{\max-\text{dyn.}}]$ の比は次の如くで $\nu=1$ 以外では次第に減少するものである。

第 6 表

ν	1	2	3
$\frac{\text{Max}[w_{\max-\text{dyn.}}]}{w_{\max-\text{static.}}}$	1.44	1.35	1.25

之の線果及び iv) の結果より矩形板の他の衝撃点の場合も推察することが出来る。

(2°) 全面衝撃 ((10), (10)', (10)'' 式より)

- m, n が共に奇数である様な振動形以外は表われない。((10) 式)
- 恒に基本振動の振幅が一番大きく生じ、以下 m, n の増加と共に小さくなる。特に衝撃が鋭いとき ($\beta\lambda_{m,n} \div 3$) では之の傾向が著しい((10)'' 式)。斯くて之の場合は集中衝撃に比して高次の影響は非常に小さい(第 1 表)。
- 最大変位が一番大きくなるのは $\beta\lambda_{1,1}=2.8$, $t/\beta=1.5$ で板の中央に生ずる((10)'' 式)。 $a=b$ なる正方形板では、

第 12 図

$$\text{Max}[w_{\text{max-dyn.}}] = 0.382 \cdot \frac{16\mathcal{M}a^4}{D\pi^6}$$

$$w_{\text{max-static.}} = 0.257 \cdot \frac{16\mathcal{M}a^4}{D\pi^6}$$

従つて、 $\frac{\text{Max}[w_{\text{max-dyn.}}]}{w_{\text{max-static.}}} \approx 1.49$ 。之は中央集中衝撃の場合 (1.44) に比し少し大きい。このことは集中衝撃の場合に比し高次振動の影響が更に小さいためであり、之の時は $w_{1.1 \text{ max}}$ のみで近似せしめて十分であることは勿論である。(10) 式)

(3°) 部分衝撃 ((12), (12)', (12)'' 式による)

部分衝撃は δ, μ 共に 0 に収斂せしめれば集中衝撃になり、又衝撃範囲を板の全面に亘らせれば全面衝撃になる故、其等に共通な性質は勿論之の場合にも有しており、異なる性質のものはその中間の性質を有すると考えられる。

さきに述べた積分、

$$J = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\mu}^{y_0+\mu} \varphi_{m,n}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{8\sqrt{ab}}{m \cdot n\pi^2} \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{m\pi}{a} \delta \sin \frac{n\pi}{b} \mu$$

なる項による特性がある。

i) $\varphi_{m,n}(x, y)$ の曲線が、矩形板の平面との間にはさむ部分の体積が 0 になる様な場合、即ち x 方向、又は y 方向に正の波と負の波を全体として同数含む様な作用範囲の場合 (第 13 図) には対応する振動型は生じない。(12) 式)

ii) $\varphi_{m,n}(x, y)$ の曲線と矩形板の平面との間にはさまれた体積が最大になる場合、即ち x, y 両方向に完全な波を奇数個含む様な作用範囲の場合 (第 13 図) には対応する振動型の値 (但し時間函数は除く) は最大となる。(12) 式)

iii) 特に $a=b$ の正方形板の場合、衝撃中心点の板の中央にとり、作用範囲 (δ) を種々に変化せしめた時 (第 14 図) に最大変位が最大になる。 $\beta\lambda_{1,1} = 2.8, t/\beta \approx 1.5$ の時の値を $4\mathcal{M}\delta^2 \equiv F$ とおいて計算すると第 7 表及び第 15 図の如くなる。(12) 式)

即ち衝撃力が等しい時には全面に分布せしめた方が、中央に集中せしめた場合に比し、 $\text{Max}[w_{\text{max-dyn.}}]$ の値は約 0.41 倍に減少する。

第 13 図

第 14 図

第 15 図

第 7 表 (単位: $w_{\text{max}} / \frac{4Fa^4}{D\pi^6}$)

δ	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$
$\text{Max}[w_{\text{max-dyn.}}]$	0.389	0.343	0.260	0.155
備 考	中央集中 衝 撃	部 分 衝 撃	全 面 衝 撃	

§ 5. 衝撃によって生ずる板の曲げモーメントの特性

変位で述べたことと同様に $\Phi_{m,n}(t)_{\text{max}}$ を仮定すれば、

(1) 集中衝撃 :

$$\left. \begin{aligned} M_{x,m,n \max} &\propto \frac{\frac{m^2}{a^2} + \sigma \frac{n^2}{b^2}}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{n\pi}{b} y_0 ; (0 \leq \beta \lambda_{m,n} \leq 0.3) \\ M_{x,m,n \max} &\propto \frac{\frac{m^2}{a^2} + \sigma \frac{n^2}{b^2}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{n\pi}{b} y_0 ; (3.0 \leq \beta \lambda_{m,n}) \end{aligned} \right\} (9'')_1$$

(2) 全面衝撃 :

$$\left. \begin{aligned} M_{x,m,n \max} &\propto \frac{\frac{m^2}{a^2} + \sigma \frac{n^2}{b^2}}{m \cdot n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} ; (0 \leq \beta \lambda_{m,n} \leq 3.0) \\ M_{x,m,n \max} &\propto \frac{\frac{m^2}{a^2} + \sigma \frac{n^2}{b^2}}{m \cdot n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} ; (3 \leq \beta \lambda_{m,n}) \end{aligned} \right\} (11'')_1$$

(3) 部分衝撃 :

$$\left. \begin{aligned} M_{x,m,n \max} &\propto \frac{\frac{m^2}{a^2} + \sigma \frac{n^2}{b^2}}{m \cdot n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{m\pi}{a} \delta \sin \frac{n\pi}{b} \mu ; (0 \leq \beta \lambda_{m,n} \leq 3.0) \\ M_{x,m,n \max} &\propto \frac{\frac{m^2}{a^2} + \sigma \frac{n^2}{b^2}}{m \cdot n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \sin \frac{m\pi}{a} \delta \sin \frac{n\pi}{b} \mu ; (3 \leq \beta \lambda_{m,n}) \end{aligned} \right\} (13'')_1$$

なる式が得られる。但し $M_{y,m,n \max}$ は分子の $\left(\frac{m^2}{a^2} + \sigma \frac{n^2}{b^2}\right)$ の代りに $\left(\sigma \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$ とおいたもので表わせる故ここでは式を省略しておいた。変位の場合と同様な計算を $M_{x,m,n \max}$ について行くと第8表が得られる。

第8表 $\left(\sigma = \frac{1}{3}\right)$

	集 中 衝 撃					全 面 衝 撃
位 置	① $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$	② $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{3}\right)$	③ $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$	④ $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{6}\right)$	⑤ $\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right)$	
$(M_{1.2}^{2.1})_{\max} / (M_{1.1})_{\max}$	0	1.30	1.30	2.25	1.50	0
$(M_{2.2})_{\max} / (M_{1.1})_{\max}$	0	0	1.00	0	3.00	0
$(M_{3.1}^{1.3})_{\max} / (M_{1.1})_{\max}$	1.40	1.40	0	2.80	2.80	0.467
$(M_{3.2}^{2.3})_{\max} / (M_{1.1})_{\max}$	0	1.14	0	2.07	4.15	0
$(M_{4.1}^{1.4})_{\max} / (M_{1.1})_{\max}$	0	1.44	1.44	2.50	2.50	0
$(M_{3.3})_{\max} / (M_{1.1})_{\max}$	1.00	0	0	2.00	4.00	0.111

但し $(w_{2.1}^{1.2})_{\max}$ の意味は第1表と同じである。

(1°) 集中衝撃 ((9)₁, (9)₂, (9'')₁ 式により)

$0 \leq \beta \lambda_{m,n} \leq 3$ の場合,

i) $M_{x,m,n \max}$, $M_{y,m,n \max}$ の値は $m=n$ では等しい。((6)₁ 式, (9)₂ 式)

ii) $\frac{n}{b} / \frac{m}{a}$ が増大すれば $M_{x,m,n \max}$ は減少する。例えば $\frac{a}{b}$ が同一ならば, 同一 n に対して m が増

す程 $M_{x,m,n \max}$ は大となり、同一 m に対して n が増す程 $M_{x,m,n \max}$ は小となる。 $((9'')_1$ 式, 第8表)

iii) $\frac{m}{a} / \frac{n}{b}$ が増大すれば $M_{y,m,n \max}$ は減少する。

iv) $\frac{m}{a} / \frac{n}{b} \geq 1$ に従つて $M_{x,m,n \max} \geq M_{y,m,n \max}$ となる。 $((9)_1, (9)_2, (9'')_1$ 式)

v) ii) で述べたことにより、例えば正方形板ならば $\left(\frac{M_{1,2}}{M_{1,1}}\right)_{\max}^{2,1}$ の値は恒に 1 より大になる(第8表)。即ち鋭い衝撃では高次の成分の方が恒に基本成分によるものより大となるのである。

$\beta\lambda_{m,n} \geq 3$ の場合

vi) m, n が共に大ならば衝撃点の如何に拘らず $M_{x,m,n \max}, M_{y,m,n \max}$ は 0 に収斂する。 $((9'')_1$ 式)

vii) 但し m, n が左程大でないときは、たとえ中央衝撃でもいずれの $M_{x,m,n \max}$ が最大になるかは a/b の値で異なる。 $((9'')_1$ 式) 但し正方形板では $M_{x,1,1 \max} (M_{y,1,1 \max})$ が最大になる。 $((9'')_1$ 式)

viii) 次に衝撃の鋭さを種々に変じた時の $M_{x \max}$ を計算すると第9表及び第16図が得られる。但し衝撃点は板の中央で $a=b$ とする。

第9表 $\left(\text{単位}; \cdot M_{x \max} / \frac{4\eta}{\pi^2}, \sigma = \frac{1}{3}\right)$

$\beta\lambda_{1,1}$	0	1.0	2.0	2.8	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	10.0	∞
$M_{x \max}$	0	0.444 0.375*	0.625 0.548	0.700 0.481	0.745	0.744	0.696	0.649	0.688	0.701	0.607

(* 第2表参照)

此の時は最大値の生ずる位置は変位と同じく板の中央であるが、その生ずる時刻は、衝撃が同一の時の最大変位が生ずる時刻とは異なる。例えば $\beta\lambda_{1,1}=2.8$ では変位が最大になるのは $t/\beta \approx 1.5$ 時であるが、モーメントが最大になるのは $t/\beta \approx 1.2$ である。

又 $\text{Max}[M_{x \max}]$ は $\beta\lambda_{1,1} \approx 4.5, t/\beta \approx 1.1$ で生ずる。之の値の静荷重に対する $M_{x \max \text{ static}}$ の比をとると、

$$\frac{\text{Max}[M_{x \max \text{ dyn.}}]}{M_{x \max \text{ static}}} \approx 1.23$$

であり、変位の場合に比して値は小さい。更にこの時は曲げモーメントの最大値は恒に衝撃中に生ずる。 $(\beta\lambda_{1,1}=1.0$ の時でも $M_{x \max}$ を生ずる時刻は $t/\beta \approx 1.12$ である。) 以上述べた如く変位と種々の性質が異なるのは高次振動が大きく現れることによるものである。

(2°) 全面衝撃 $((11)_1, (11)_2, (11'')_1$ 式による)

$\beta\lambda_{m,n} \leq 2.8$ の場合

i) $\sigma > 1/4$ ならば $M_{1,1, \max}$ がすべての a/b に対して最大になる¹²⁾。 $((11'')_1$, 第8表)

ii) $\sigma < 1/4$ ならばいずれの成分が最大になるかは a/b の値で異なる。 $((11'')_1$ 式) 併し $a=b$ の時は σ の値如何に拘らず $M_{x,1,1 \max}$ が最大になる¹²⁾。

iii) $\frac{m}{a} / \frac{n}{b} \geq 1$ に従つて $M_{x,m,n \max} \geq M_{y,m,n \max}$ となる。

$\beta\lambda_{m,n} \geq 3$ の場合

iv) m, n が非常に大きくなれば $M_{x,m,n \max} \rightarrow 0, M_{y,m,n \max} \rightarrow 0$ となる。最もこのことは $0 \leq \beta\lambda_{m,n} \leq 3$ に対しても言える。

v) m, n が共にあまり大でないときは、 a/b の値でいずれの成分が最大になるか異なる。但し $a=b$ では $M_{x,1,1 \max} (M_{y,1,1 \max})$ が最大となる。

vi) 如何なる衝撃の場合にも集中衝撃の場合に比して高次成分の影響は一般に小さくなる。

vii) $a=b$ の時は $M_{x \max}$ (又は $M_{y \max}$) は $\beta\lambda_{1,1}=2.8, t/\beta=1.5$ でその生ずる位置は $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ である。

第16図

12) $M_{y,m,n \max}$ については i), ii) は夫々 $\sigma < 1/4, \sigma > 1/4$ の場合に成立する。

第 10 表 $\left(\text{単位 ; } M_{x \max} / \frac{16\eta}{\pi^4}, \sigma = \frac{1}{3} \right)$

$\beta\lambda_{1,1}$	0	1	2	2.8	4	∞
$\frac{M_{x \max}}{(M_{y \max})}$	0	0.320	0.505	0.526	0.476	0.382

之より $\frac{\text{Max}[M_{x \max \text{-dyn.}}]}{M_{x \max \text{-static.}}} = 1.38$ となり, 集中衝撃の場合より大きい。これは vi) に述べた高次振動の影響が小さいことによるものである。

(3°) 部分衝撃 ((13)₁, (13)₂, (13') 式より)

i) 変位の場合と全く同じことが言えるが, 高次振動の影響が大きくなる。

ii) 変位の場合と同様に $a=b$, $x_0=y_0=\frac{a}{2}$, $\delta=\mu=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ の場合の $M_{x \max}$ ($M_{y \max}$) を求めると, それは $\beta\lambda_{1,1}=2.8$, $t/\beta \approx 1.5$ の時に $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ の点に生ずる。(第 11 表, 第 17 図)

第 11 表

$\left(\text{単位 ; } M_{x \max} / \frac{4F}{\pi^2}, F=4\eta\delta^2, \sigma = \frac{1}{3} \right)$

δ	0	1/6	1/3	1/2
$\text{Max}[M_{x \max \text{-dyn.}}]$	0.745	0.507	0.342	0.213
$\frac{\text{Max}[M_{x \max \text{-dyn.}}]}{M_{x \max \text{-static.}}}$	1.23	1.27	1.33	1.38

第 17 図

モーメントは全面に分布せしめた方が最大値は約 0.29 倍に減少する。

最後に変位と曲げモーメントの特性の相違は先にも述べた如く, 変位に比し高次振動の影響大なる為であること繰返し述べておく。

§ 6 衝撃による変位の時間的経過の例題

最後に衝撃による変位の時間的経過の例題として, 正方形板に集中衝撃を受けた場合について,

(a) $\beta\lambda_{1,1}=2.8$, 即ち最大変位を示す場合

(b) $\beta\lambda_{1,1}=0.157$, 即ち非常に鋭い衝撃が加わった場合

について夫々, (i) $x_0=y_0=\frac{a}{2}$, (ii) $x_0=y_0=\frac{a}{4}$ の時に対して計算し, 之と第 18 図 (a) (b), 第 19 図 (a) (b)

第 18 図 (a)

第 18 図 (b)

第 19 図

に平面図及び対角線に沿つての断面について示してある。猶、図中点線は静的変位を示すものである。此等より $\beta\lambda_{1,1}=2.8$ の時は (i) では殆ど高次成分はあらわれず、(ii) に於ても衝撃の始めでは高次成分が大きく出るが、すぐに基本振動が優勢になる¹³⁾。又 $\beta\lambda_{1,1}=0.157$ では高次振動の影響が更に著しいことが知れる¹⁴⁾。

§ 7. 結 語

以上で単一二等辺三角形の衝撃力を受けた時の矩形板の変位の一般解を求め、特に周辺支持の場合について、集中、全面、部分と種々型の衝撃を受けた時の変位及び曲げモーメントの特性について種々考案を行つた。その結果衝撃作用点、衝撃作用範囲及び衝撃時間等と生ずる最大変位及び最大曲げモーメントとの関係を明らかにした。その結果衝撃の鋭い場合、衝撃点周辺に近い場合、 a/b が大 (又は小) なる場合については基本振動成分のみで最大変位、最大曲げモーメントを近似することの不可なることを示した。之等の結果が衝撃を受ける種々

13) $\text{Max}[w_{\text{max}}]$ が生ずるのは $t/b \approx 1.5$ の時である。

14) $\text{Max}[w_{\text{max}}]$ の生ずるのは $t/b > 2.0$ である。

の部材の動力学的設計に対して何らかの資料となれば目的は十分に達せられたものと言える。最後に種々御鞭達下された吉識教授に厚く感謝の意を表するものである。(24—1—25)

附 録

1 運動方程式及びその解

本文 §2 の記号に依れば運動方程式は次の如くなる。

$$w(x, y; t) = -\frac{\gamma}{g} h \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w(\xi, \eta; t)}{\partial t^2} K(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta + \iint_A q(\xi, \eta; t) K(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta \quad (1)$$

但し $K(\xi, \eta; x, y)$ は点 (ξ, η) に単位力が作用した時の (x, y) 点の撓みをあたえる影響函数である。今法化された規準函数を $\varphi_{m,n}(x, y)$ とすれば

$$w = \sum_{m,n=1}^{\infty} \varphi_{m,n}(x, y) T_{m,n}(t) \quad (2)$$

$$q = \sum_{m,n=1}^{\infty} \varphi_{m,n}(x, y) \alpha_{m,n}(t) \quad (3)$$

$$\text{及び} \quad K(\xi, \eta; x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{m,n}(x, y) \varphi_{m,n}(\xi, \eta)}{\lambda_{m,n}^2} \quad (4)$$

なる展開が可能である。但し λ_{mn}^2 は $K(\xi, \eta; x, y)$ に属する固有値であり、

$$\alpha_{m,n} = \iint_A q(x, y; t) \varphi_{m,n}(x, y) dx dy \quad (3')$$

である。(2), (3), (4) を (1) に代入し $\varphi_{m,n}(x, y)$ の直交性、法化条件を考えれば、 $T_{m,n}(t)$ に関する次の式が得られる。

$$\frac{d^2 T_{m,n}(t)}{dt^2} + \frac{g}{\gamma h} \lambda_{m,n}^2 T_{m,n}(t) = \frac{g}{\gamma h} \alpha_{m,n}(t) \quad (5)$$

初期条件として $t=0$; $w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$ i. e. $T_{m,n} = \frac{dT_{m,n}}{dt} = 0$ とすれば、(5) より $T_{m,n}(t)$ が求まり、従つて (2) より

$$w = \frac{g}{\gamma h} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{m,n}(x, y)}{\lambda_{m,n}} \int_0^t \alpha_{mn}(\tau) \sin \{\lambda_{mn}(t-\tau)\} d\tau \quad (6)$$

$$\text{但し} \quad \lambda_{mn} = \sqrt{\frac{g}{\gamma h}} \lambda_{m,n}$$

今衝撃外力が $q = \mathfrak{A}(x, y) \cdot q_0(t)$ なるものとすれば、

$$w = \frac{g}{\gamma h} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\iint_A \mathfrak{A}(\xi, \eta) \varphi_{m,n}(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\lambda_{m,n}} \varphi_{m,n}(x, y) \int_0^t q_0(\tau) \sin \lambda_{mn}(t-\tau) d\tau \quad (7)$$

なる式が得られる(本文中 (1) 式)。

II $\Phi_{m,n}(t)_{\max}$ について

$\Phi_{m,n}(t)$ を時間 t/β について偏微分すれば $\Phi_{m,n}(t)_{\max}$ を生ずる t/β の値が $\beta\lambda_{m,n}$ の函数として求まる。即ち

1° $0 \leq t/\beta \leq 1$ では最大値はあらわれない。

2° $1 \leq t/\beta \leq 2$ では、

$$\frac{t}{\beta} = \frac{1}{\beta\lambda_{m,n}} \left\{ \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{5-4\cos\beta\lambda_{m,n}}} - \sin^{-1} \frac{2\cos\beta\lambda_{m,n}-1}{\sqrt{5-4\cos\beta\lambda_{m,n}}} \right\} \quad (1)$$

3° $2 \leq t/\beta$ では、

$$\frac{t}{\beta} = \frac{1}{\beta\lambda_{m,n}} \tan^{-1} \frac{1-2\cos\beta\lambda_{m,n}+\cos 2\beta\lambda_{m,n}}{2\sin\beta\lambda_{m,n}-\sin 2\beta\lambda_{m,n}} \quad (2)$$

より t/β が求まり、従つて $\Phi_{m,n}(t)$ が求まる(本文中 第3図, 第4図, 第5図)。