(昭和 24 年 4 月造船協会春季講演会に於て講演)

船舶の動搖造波抵抗に関する研究

(其の一 T. H. Havelock の方法の一解釋と其の擴張)

正員 工學士 菱 田 敏 男*

Abstract

A Study on the wave-making resistance for the rolling of Ships
(I-A view on the T. H. Havelock's method and its Extension)

By Toshio Hishida, *Kogakushi Member*

In the Dr. T. H. Havelock's method on computation of a wave height at a fluid surface produced by a periodic motion of a doublet D in two dimensions, a supplementary velocity potential φ_1 in the first approximation, with which the conditions at the free surface are satisfied, has a term representing a image doublet D referred to the free surface. φ_1 does not satisfy the condition in vicinity of D , but gives disturbance.

The surface of a body moving in the fluid may be replaced by a suitable arrangement of doublets on the periphery. When considering a body tied up in one sheet with its image referred to a surface which will be supposed to be a free surface henceforth, and giving a required normal velocity distribution along the lower half of the periphery, φ_1 corresponding to the motion, now, does not contain a term like $\bar{D}$ which contributes to the boundary conditions. And disturbance at the boundary produced by φ_1 will be moderately decreased.

In this view and after Dr. Havelock, If φ_0 be a velocity potential for the motion of the fluid, the free surface of which is neglected for a while, and if $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, the conditions for the free surface to be satisfied by φ are,

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \text{at } y=0, \\ \text{or } & \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = - \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \right) \equiv \phi(x) e^{i\sigma t} (\text{say}), \\ & \frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \text{at } y=0,$$

where the axis x is on the free surface and the y vertical upwards; t time, g acceleration due to gravity, η the displacement of the free surface, $2\pi/\sigma$ the period of the motion, and μ a coefficient of the resistance proportional to the velocity.

The required φ_1 & η are

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \left(\int_{-\infty}^{x_1} + \int_{x_2}^\infty \right) \frac{\phi(\xi) e^{i\sigma t} e^{k y} \cos k(x-\xi)}{gk - \sigma^2 + i\mu\sigma} d\xi, \\ \eta &= \frac{i}{\pi} \int_0^\infty dk \left(\int_{-\infty}^{x_1} + \int_{x_2}^\infty \right) \frac{\phi(\xi) e^{i\sigma t} k \cos k(x-\xi) d\xi}{\sigma(gk - \sigma^2 + i\mu\sigma)} - \int \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)_{y=0} dt, \end{aligned}$$

in which the progressive waves are included as follows;

$$\begin{aligned} \eta &= \left(\int_{-\infty}^{x_1} + \int_{x_2}^\infty \right) \frac{k_0}{\sigma g} \phi(\xi) \cos\{k_0(x-\xi) \mp \sigma t\} d\xi + \dots, \\ k_0 &= \frac{\sigma^2}{g}, \end{aligned}$$

where $-x_1$ & x_2 ($-x_1 < x_2$) are the coordinates at which the contour of the body cuts the

* 大阪工業専門学校教授

x -axis, and the double signs correspond to $x > \xi$ and $x < \xi$ respectively.

φ_0 is often obtainable with such the conformal transformation, easier than to find the distribution of doublets in the Dr. Havelock's method.

This method may be readily extended for the steady motion or the three dimensional one.

1. 緒 言

船の運動力学的性質就中横動揺に就ては既に詳しく研究されている。而して一般の耐航性を予言し若くは設計に當つて復原性能を予定する場合、船の運動理論を其の復原性に如何に結びつけるかと云うことは、極めて重要又難解の問題であり且此の種の研究の最終目的とも考えられるが、此の問題に対してさえ最近加藤弘博士¹⁾に依つて簡単且確実なる方法が提唱されている²⁾。

船の運動の量的な大きさは、外力、船の復原力及び抵抗三者の兼合に依つて決る故に、船の復原性を云々する場合には常に抵抗の性質特に其の値が問題となる。動揺抵抗に関しても従来研究は少くないが、多くは概括的なうらみをなせしめず又殊にその求値法は専ら模型実験に依る以外に良法はないようである。動揺抵抗を造波、形状（船体の側背に wake を作る為の抵抗）、摩擦及び附加物殊に bilge keel による抵抗に可分のものとするならば、後の二者に就ては加藤弘博士³⁾に依つて便利な実験式が与えられているが、尙前二者は模型実験に依らなければならない。模型実験の方法は総合的であり最も確実ではあるが、更に比較的簡単な計算法があるならば、其の性質を調べる上にも又設計等の実用上にも便利であると考えられる。

本研究は此の問題に対して小さき一步を踏出さんとするものであり、先ずその内全抵抗の大半を占める造波抵抗の略算法を取扱つたものである。動揺造波抵抗に就ては既に Dr. Havelock^{4), 5), 6), 7)} 加藤弘博士³⁾等の研究があるが、本研究は主として事等の研究を基礎としている。

2. 本報の概説

水中にある物体の週期運動に依る造波抵抗従つて生成波の波高を求める計算法には、Dr. Havelock の近似法^{4), 5), 7)}があることは周知のことである。之等の算法の基礎となる理論は、深さ無限なる水中の任意の点にある一つの doublet, D より出発する。先ず自由表面を無視した時の速度 potential を φ_0 とする。 φ_0 は水底に於ける条件は自ら満足しているが明かに自由表面の条件を満足させない。そこでこの条件を満す為に一の函数 φ_1 を附加する。その結果 D の位置の近傍に於ては φ_1 に依つて φ_0 の値が攪乱されるが、其の位置の深さが生成波の波長に比し深ければ深い程其の程度は小さく、自由表面の極く近くにある場合を除いては無視し得ることが多い。このような場合には $\varphi_0 + \varphi_1$ を以て求むる速度 potential の第1近似とする。而して φ_1 の中には、 D と自由表面に関して鏡像なる doublet $\bar{D}$ に相当する項を含む。

水中に在る任意の物体は、其の境界を適当なる強さの分布を持つ doublets を以て置換えることが出来るから、即ち各 doublet による $\varphi_0 + \varphi_1$ を重疊して其の場合の第1近似を得るのであるが（例えば Dr. Havelock は楕円柱の動揺による生成波高を此の方法で求めている⁷⁾）、 φ_0 に対する doublets の分布を考える際 $\bar{D}$ に相当する項をも考慮に入れて、之を物体表面の条件に有用に寄与させるならば、 φ_1 の中には最早 $\bar{D}$ に相当する項を含まず、攪乱は一般に減少する。故に次のことが云える。

無限に広い水域に、一の閉曲線を準線とする柱状体があるとしその外側の領域を考える。この曲線は smooth curve でなくともよいが、唯少く共一の対称軸を有するとする。対称軸は後に自由表面にとられる。此の仮定に依つて問題の一般性を失ふぬことは今後自ら明かとなる。此の境界の対称軌の一半に沿うて所要の法線速度分布を与え、其の他半には前者と鏡像な分布を与える。勿論この半周に亘る速度の積分は0でなければならない。斯様な境界条件を満足する速度 potential φ_0 は等角写像等の方法によつて比較的簡単に求まる場合が多い。次に自由表面を考えて、其所の条件を満す様な附加速度 potential φ_1 を求める。若し φ_1 による柱状体境界の攪乱が小さいならば $\varphi_0 + \varphi_1$ を以て第一近似とすることが出来る。而してこの φ_1 による攪乱は Dr. Havelock の方法より一般に小さく、 φ_0 を求める場合同氏の方法の如く doublets の分布を探る困難はない。

又此の方法は定常運動にも或は三次元の場合にも原理的に直に拡張可能である。

3. Dr. Havelock の方法の一解釈と其の拡張

先ず二次元週期運動の場合より始める。無限に広い流体中に x, y 直交軸をとる。 x 軸は後に自由表面に取られ、其の時 y 軸は鉛直上向であるとする。 x 軸に関して対称な位置 $P(a, -b)$ 及び $P'(a_1, b)$ に互に鏡像なる doublets があり強さ $2\pi \cos \sigma t$ なる時、速度 potential φ_0 は周知の如く

$$\varphi_0 = e^{i\sigma t} \left[\frac{(x-a)\sin \alpha - (y+b)\cos \alpha}{(x-a)^2 + (y+b)^2} + \frac{(x-a)\sin \alpha + (y-b)\cos \alpha}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \right] \quad (1)$$

但し $\alpha - \frac{\pi}{2}$ は P 点の doublet 軸と x の軸とのなす角であり t は時間である。又函数は凡て実部を取るものとする。今圧力を p 、流体の密度を ρ 、重力加速度を g とし、Dr. Havelock に倣つて速度に比例する抵抗を仮定しその係数を μ 、自由表面の変位を η とすれば、其所の条件は

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gy + \mu \varphi = 0 \quad \text{at } y = \eta$$

$$\left. \begin{aligned} \text{及び} \quad & -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t}; \\ \text{或は} \quad & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{at } y=0 \quad (2)$$

第 1 図

茲に φ は φ_0 と自由表面条件を満す為の附加速度 potential φ_1 との和

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \quad (3)$$

である。 φ_1 を決める為 (1) 式を書直し且 φ_1 及び η を次の如く仮定する。

$$\begin{aligned} \varphi_0 = e^{i\sigma t} & \left[\sin \alpha \int_0^8 e^{-k(b+y)} \sin k(x-a) dk + \sin \alpha \int_0^{\infty} e^{-k(b-y)} \sin k(x-a) dk \right. \\ & \left. - \cos \alpha \int_0^{\infty} e^{-k(b+y)} \cos k(x-a) dk + \cos \alpha \int_0^{\infty} e^{-k(b-y)} \cos k(x-a) dk \right] \end{aligned} \quad (4)$$

但し $b \pm y > 0$.

$$\varphi_1 = 2e^{i\sigma t} \int_0^{\infty} F(k) e^{-k(b-y)} \{ \sin \alpha \sin k(x-a) - \cos \alpha \cos k(x-a) \} dk, \quad (5)$$

$$\eta = 2e^{i\sigma t} \int_0^{\infty} f(k) e^{-kb} \{ \sin \alpha \sin k(x-a) - \cos \alpha \cos k(x-a) \} dk. \quad (6)$$

F, f は (2) 式に依つてこれから決定されるべき函数である。(4), (5) 及び (6) 式を (2) 式に代入して次式を得る。

$$F(k) = \frac{\sigma^2 - i\mu\sigma}{gk - \sigma^2 + i\mu\sigma}, \quad f(k) = k \frac{\mu + i\sigma}{gk - \sigma^2 + i\mu\sigma} \quad (7)$$

之等を (5), (6) 式に代入し contour integration に依つて変形し実部を取り $\mu \rightarrow 0$ ならしめると次のようになる。

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \pm 2\pi k_0 e^{-k_0(b-y)} \sin\{\alpha + k_0(x-a) \mp \sigma t\} \mp 2k_0 \cos \sigma t \\ & \times \int_0^{\infty} \frac{k_0 \sin\{\alpha \mp k(b-y)\} \pm k \cos\{\alpha \mp k(b-y)\}}{k^2 + k_0^2} e^{\mp k(x-a)} dk \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \eta = & \frac{2\sigma}{g} \left[-k_0 \pi e^{-k_0 b} \cos\{\alpha + k_0(x-a) \mp \sigma t\} \pm k_0 \sin \sigma t \right. \\ & \left. \times \int_0^{\infty} \frac{k_0 \sin(\alpha \mp kb) \pm k \cos(\alpha \mp kb)}{k^2 + k_0^2} e^{\mp k(x-a)} dk - \sin \sigma t \frac{(x-a) \sin \alpha - b \cos \alpha}{(x-a)^2 + b^2} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

但し $k_0 = \frac{\sigma^2}{g} = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ は生成波の波長で、複号は上より夫々 $x-a > 0$ 及び $x-a < 0$ に対応する (以下同じ)。

尙 (4) 式は $b \pm y = 0$ 即ち $b=0, y=0$ の場合には成立しないが、この場合は (8) 及び (1) を (2) に代入して満足することを検することが出来る。若し p' の doublet がない時は (1) 式右辺の第 2 項はそのまま (8) 式 φ_1 の右辺に移り附加函数の一部となる。又 p' に強さの符号のみ異なる doublet があれば (1) 式右辺の第 2 項は 2 倍になつて φ_1 の中へ移る。然し何れの場合も η の式は同じである。

流体中に於て運動する物体はその境界を適当な強さの分布を持つ doublets を以て置換えることが出来る。故に (1) 式の右边を以て其の境界上の一の doublet と看做し、之に自由表面なき場合に取りべき強さ $M(s)$ (s は境界周辺に沿う長さ) を冠して、境界の x 軸より上又は下の半周に沿い一定方向の s に関する積分演算を施せばそれは自由表面なき場合に、今行いたる半周と鏡像なる半周を合した一つの閉曲線を境界とする物体が、 x 軸に関して鏡像なる周辺法線速度分布を以て運動する場合の速度 potential を与える。而して同じ物体が、 x 軸を自由表面とする領域にて同じ運動をなす場合の附加速度 potential 及び自由表面の変位の第1近似は夫々 (8) 及び (9) 式の右边に全く同じ演算を行えばよい。(1) 式右边の第2項の符号を変じたる場合も上と同様であり、又其の第2項なき場合は将来自由表面下に想定すべき物体境界の全周に沿う積分を行わねばならぬ。此の最後の場合は Dr. Havelock の方法である。

さて此の三者の相違は次の如くである。附加函数 ϕ_1 は物体境界条件を満たしていない故に、 ϕ_0 に依つて正確に定められた条件を攪乱する働きをなす。故に Dr. Havelock の場合は、自由表面下の doublet を物体の全周に沿い積分することは同時に ϕ_1 の中の鏡像 doublet に対して同じ積分を施すことを意味し鏡像 doublet は全然攪乱のみに与える。換言すれば x 軸下である物体が運動する場合及び x 軸上で同じ物体が対称な位置で対称な運動をする場合の互に独立な二つの Sheets を重ねたことであつて、之は二つの物体が同時に対称な運動をなす場合とも異なるものである。之に反し第一の方法では既に鏡像 doublet も x 軸下の境界条件に寄与するものとして分布函数 $M(s)$ を決められている故に、攪乱は (8) 式右边のもののみとなり、一般に攪乱は減少する。従つて実際の物体境界の法線速度分布は両者全く別なものであり当然自然表面の変位も異つてくる。而してそれは函数 $M(s)$ の相違と攪乱の差異に帰因する。第二の方法も同様のことが云え攪乱は更に大きくなる。

鏡像 doublet を有効に物体境界条件に与えしめるものとして x 軸下半の周辺に沿う積分演算を施し、同じ演算を (9) 式の右边に行つて η を求めるとは次記の手法と同等である。自由表面なき流体中に於て与えられた物体と x 軸に関して鏡像なる形状を有する物体を合した物体が、その下半の周辺上に将来自由表面下に於て必要な法線速度分布を与えられ、且その上半には x 軸に関して之と対称な周辺速度分布を与えられた場合の速度 potential を ϕ_0 とし、尙自由表面条件を満たす為の附加速度 potential の第1近似を ϕ_1 とする時、 $\phi = \phi_0 + \phi_1$ は (2) 式を満足すべきである。即ち

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \mu \frac{\partial \phi_1}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_0}{\partial y} + \mu \frac{\partial \phi_0}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= - \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - \frac{\partial \phi_0}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \text{ at } y=0 \quad (10)$$

上の第1式右边を $\phi(x)e^{i\sigma t}$ と置けば、この条件を満たす ϕ_1, η は容易に次の如く書ける。

$$\phi_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \left(\int_{-\infty}^{-x_1} + \int_{x_2}^\infty \right) \frac{\phi(\xi) e^{i\sigma t} e^{ky} \cos k(x-\xi) d\xi}{gk - \sigma^2 + i\mu\sigma}, \quad (11)$$

$$\eta = \frac{i}{\pi} \int_0^\infty dk \left(\int_{-\infty}^{-x_1} + \int_{x_2}^\infty \right) \frac{\phi(\xi) e^{i\sigma t} k \cos k(x-\xi) d\xi}{\sigma(gk - \sigma^2 + i\mu\sigma)} - \int \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial y} \right)_{y=0} dt \quad (12)$$

(10) 式の第1式右边第項は無くても同じであり、又今の場合 $(\partial \phi_0 / \partial y)_{y=0} = 0$ である故、

$$\phi(x) e^{i\sigma t} = - \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial t^2} \right)_{y=0} \quad (13)$$

$-x_1, x_2$ は物体周辺が x 軸を切る点の座標で $-x_1 < x_0$ とする。或は進行波は (12) 式にて

$$\eta = -\frac{k_0}{\sigma g} \left(\int_{-\infty}^{-x_1} + \int_{x_2}^\infty \right) \phi(\xi) \cos\{k_0(x-\xi) \mp \sigma t\} d\xi + \dots \quad (14)$$

の中に含まれる。但し上式では復号は上より夫々 $x > \xi$ 及び $x < \xi$ に対応する。更に $x > x_2$ なる x の一点に於ては

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{k_0}{\sigma g} \left(\int_{-\infty}^{-x_1} + \int_{x_2}^x \right) \phi(\xi) \cos\{k_0(x-\xi) - \sigma t\} d\xi + \frac{k_0}{\sigma g} \int_x^\infty \phi(\xi) \cos\{k_0(x-\xi) + \sigma t\} d\xi + \dots \\ &= -\frac{k_0}{\sigma g} \left(\int_{-\infty}^{-x_1} + \int_{x_2}^\infty \right) \phi(\xi) [\cos(k_0 x - \sigma t) \cos k_0 \xi + \sin(k_0 x - \sigma t) \cdot \sin k_0 \xi] d\xi + (\text{定常波の項}) \quad (15) \end{aligned}$$

となり、特に $x_1 = x_2 = \frac{B}{2}$ (B は物体の自由表面に於ける幅) で、 $\phi_{x=0} = -\phi_{x>0}$ の場合 (例えば y 軸に関して対称な物体が y 軸上の一点の周りに動揺する場合や y 軸の左右に x 軸に平行に動揺する場合等) には、

$$\mu = \frac{2k_0}{\sigma g} \sin(k_0 x - \sigma t) \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \phi(\xi) \sin k_0 \xi d\xi + (\text{定常波}) \quad (16)$$

となる。

例えば水面下の単一 doublet に対しては、鏡像 doublet を考慮して (1) 式或は (4) 式がそのまま使え、簡単の為に (4) にて $a=0, \alpha=-\frac{\pi}{2}$ とおき ϕ を作ると、

$$\phi = 2\sigma^2 x / (x^2 + b^2) \cdot$$

$$\therefore \eta = \frac{4k_0\sigma}{g} \int_0^\infty \frac{\xi}{\xi^2 + b^2} \sin k_0 \xi \cdot d\xi \cdot \sin(k_0 x - \sigma t) = \frac{4k_0\sigma}{g} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot e^{-k_0 b} \sin(k_0 x - \sigma t)$$

となり (9) 式と全く一致する。

Dr. Havelock の方法で与えられた物体の周辺法線速度に対して doublet の分布を探することは一般に困難であるが、上の方法に依れば ϕ 従つて φ_0 を求めることは等角写像等の便宜に依り比較的簡単に求まる場合が多いのである。

自由表面に対して対称な周辺法線速度分布を与えることは面倒であるが、その上下に於て符号のみ異なる法線速度を与えれば簡単である場合にも、鏡像 doublet の 2 倍に相当する誤差を許せば上と同様にして η を求めることが出来る。但し此の場合は (10) 式の第 1 式右辺は第 1 第 2 項共に一般に 0 ではない。又周辺の各点が互に相対変位をなすような運動の場合にも、更に三次元の場合にも上の方法は直に拡張可能である。

尙此の方法は原理的には定常運動の場合にも適用し得るが、この時は $\mathbf{p}$ 及び $\mathbf{p}'$ に互に強さの符号のみ異なる doublets を考えねばならない。運動は x 方向の様な運動以外は考えられないから、その速度を U とすると自由表面条件は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\ \eta &= -\frac{U}{g} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \text{ at } y=0 \quad (17)$$

$$\varphi_0 = -\frac{ie^{i\alpha}}{(x-a)+i(y+b)} + \frac{ie^{i\alpha}}{(x-a)+i(y-b)}$$

$$= -e^{i\alpha} \int_0^\infty [\exp\{i(x-a)-(y+b)k\} - \exp\{i(x-a)-(b-y)k\}] k dk \quad (18)$$

但し最後の式では $b \pm > 0$.

$$\varphi_1 = 2e^{i\alpha} k_1 \int_0^\infty \frac{\exp\{i(x-a)-(b-y)k\}}{k-k_1+i\mu} dk$$

$$= 4\pi k_1 \exp\{-k_1(b-y)+\mu(x-a)\} \sin\{k_1(x-a)+\mu(b-y)+\alpha\}$$

$$+ 2k_1 \int_0^\infty \frac{-k_1 \sin\{\alpha+k(b-y)\} + (k-\mu) \cos\{\alpha+k(b-y)\}}{k_1^2 + (k-\mu)^2} e^{k(x-a)} dk, (x < a),$$

$$\text{及び } 2k_1 \int_0^\infty \frac{k_1 \sin\{\alpha-k(b-y)\} + (k+\mu) \cos\{\alpha-k(b-y)\}}{k_1^2 + (k+\mu)^2} e^{-k(x-a)} dk, (x > a) \quad (19)$$

$$\text{但し } k_1 = \frac{g}{U^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (20)$$

$$\eta = -\frac{4\pi k_1^2 U}{g} e^{-k_1 b} \cos\{k_1(x-a)+\alpha\} + \dots, (x < a) \quad (21)$$

従つて自由表面を無視した時の φ_0 が求まつている時は、

$$-\left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\right)_{y=0} = \psi(x) \quad (22)$$

とおけば

$$\varphi_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \left(\int_{-\infty}^{-x_1} + \int_{x_2}^\infty \right) \frac{\psi(\xi) \exp\{ky + ik(x-\xi)\}}{k-k_1+i\mu} d\xi \quad (23)$$

$$\eta = \frac{iU}{\pi g} \int_0^\infty dk \left(\int_{-\infty}^{-x_1} + \int_{x_2}^\infty \right) \frac{\psi(\xi) e^{ik(x-\xi)}}{k-k_1+i\mu} d\xi$$

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{2U}{g} \left(\frac{-x_1}{-\infty} + \int_{x_2}^{\infty} \right) \psi(\xi) \cos \{k_1(x+\xi) d\xi + (\text{定常波}), (x < \xi); \\ & \text{及び} \quad (\text{定常波のみ}), (x > \xi) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

となる。然し此の場合は φ_0 が物体の上下両半で速度が互に逆向に取られた時に初めて鏡像 doublet を有用に利用出来るのである。

4. 攪乱の大きさ

φ_1 による攪乱の大きさを調べる為に、一の周辺曲線上 P, P' の前後短い長さ δs の上に、曲線に直角な軸を持つ doublets が並んでいるとする。 s を δs の中点 $(a, -b)$ より周辺の内部を左に見て進む向きに測った曲線の長さとし、(1) 及び (5) 式に於て $a, -b$ の代りに夫々 $a+s \cos \alpha, -b+s \sin \alpha$ と書き、且

$$\left. \begin{aligned} x-a &= r \cos \theta \\ y+b &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

において δs の間積分をし再び之を φ_0, φ_1 と書く。然る時は先ず φ_0 第1項は

$$\begin{aligned} \varphi_0 \text{ の第1項} &= \int_{-\frac{\delta s}{2}}^{\frac{\delta s}{2}} \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{r \sin(\alpha-\theta) \cdot ds}{r^2 - 2rcos(\alpha-\theta) \cdot s + s^2} \\ &= \frac{M}{2\pi} \tan^{-1} \frac{r \sin(\alpha-\theta) \cdot \delta s}{r^2 - (\delta s/2)^2} \end{aligned} \quad (26)$$

二の積分は $\pi > \alpha - \theta > 0$ では M と全符号となるべき故に、 P 点の直ぐ外側では

$$\frac{M}{2\pi} \cdot \pi \quad (27)$$

$r = \delta s/2$ の半円上で $\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2}$ に減じ、 $r > \frac{\delta s}{2}$ では $(\delta s/r)^2$ を省略すれば

$$\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\sin(\alpha-\theta) \cdot \delta s}{r} \quad (28)$$

となり距離に逆比例して減少する。但し簡単の為に時間の項を除いてある。

φ_0 の第2項即ち P' を中心とする鏡像 doublet 群の P の位置の値は(28)式にて、 $r = 2b, \theta = \frac{\pi}{2}$ の時に相当する故

$$-\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\delta s}{2b} \cos \alpha. \quad (29)$$

ある柱状体が与えられた周辺法線速度を有する為に、周辺上の他の一対の点 $Q(a_1, -b_1)$ 及び $Q'(a_1, b_1)$ を中心とし長さ δs_1 に亘る、doublet 群が取るべき強さが M_1 であるならば、それ等が P 点の potential に有用に寄与する値は同様にして

$$\frac{M_1}{2\pi} \left[\sin(\alpha_1 - \theta_1) \frac{1}{\sqrt{(a-a_1)^2 + (b-b_1)^2}} + \sin(\alpha_1 - \theta'_1) \frac{1}{\sqrt{(a-a_1)^2 + (b+b_1)^2}} \right] \delta s_1 \quad (30)$$

茲に α_1 は Q に対する δs_1 の方向と x 軸とのなす角、 θ_1 及び $-\theta'_1$ は夫々直線 $\vec{QP}$ 及び $\vec{Q'P}$ が x 軸となす角である。

依つて P に於ける全体の potential の値は P 附近の doublets による $\frac{M}{2\pi} \cdot \pi$ と、その他の doublets による値即ち (29) 式及び (30) 式を δs 以外の所で集めた値との和となる。

次に φ_1 を調べる。この為には P 自身の近傍の doublets による攪乱及び他の部分例えば Q 附近の doublet 群に因る P 点に於ける攪乱を調べれば十分である。即ち (26) を得たと同じ演算を (8) 式に施せば、上の攪乱は夫々

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{M}{2\pi} [4\pi k_0 e^{-2k_0 b} \delta s + 2k_0 e^{-2k_0 b} |E_i(2k_0 b)| \delta s], \\ & \text{及び} \quad -\frac{M_1}{2\pi} [4\pi k_0 e^{-k_0(b_1+b)} \delta s_1 + 2k_0 e^{-k_0(b_1+b)} |E_i(k_0 b_1 + k_0 b)| \delta s_1] \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

第2図

$$E_i(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-u}}{u} du$$

の order である (附録参照)。この第 1 式は第 1 項は $\frac{M}{2\pi} \cdot \pi$ に比し十分小さい。第 2 式の第 1 項は (30) 式に対して $4\pi \cdot e^{-2k_0(b_1+b)} \cdot k_0 \sqrt{(a-a_1)^2 + (b \pm b_1)^2}$ の order であるが、生成波の波長が柱状体断面の寸法に比し大きく従つて k_0 の小さい場合 (例えば船の動揺)、(30) 式の値が P 点の potential に大きく利く $\sqrt{\quad}$ の小さい所では、 $k_0 \sqrt{\quad}$ は小さく、 $\sqrt{\quad}$ の大きい所では (30) 式の値そのものが小さい故、擾乱は k_0 が小さい程小さい。而して $\sqrt{\quad}$ の最小値は $(\delta s + \delta s_1)/2$ 、最大値は断面の最大寸法である故、 $\sqrt{\quad}$ の大きい所の (30) 式の値が P 点の potential に寄与する程度は、その小さい所に比し $(\delta s + \delta s_1)/2 \sqrt{\quad}$ の大きい値) の割である。又この擾乱は b_1+b の大きい程即ち自由表面を離れる程小さいが、 $k_0(b_1+b)$ の値は k_0 の小さい程小さく従つて減少率も緩慢である。(31) 式第 1 式第 2 項は常に 2π を超えることなく、 b の大きい所では同第 1 項と同じことが云え、 $2b$ の小さく δs の order になる所では $|2e^{-k_0 \delta s} E_i(k_0 \delta s) k_0 \delta s|$ は π に比し極めて小さい。(第 3 図)。第 2 式第 2 項は b_1+b の極めて小さい所を除いては同第 1 項と同じことが云え、其の大きさは $k_0(b_1+b)$ が 0.003 より大きければ $e^{-k_0(b_1+b)} |E_i(k_0 b_1 + k_0 b)|$ は 2π を超えることはない。 b_1+b の極めて小さい所即ち表面附近では急激に大となる。(第 3 図)。尚表面附近にて M_1 の大きい即ち概して法線速度の大きい分布をなす場合は擾乱も大きくなることは明らかである。

物体表面の速度に於ける擾乱も全く同様の手順により、又同様の傾向を有することが云える。動圧力に於ける擾乱は週期運動に於ては potential に比例する故に、之に対しても亦同様である。之を要するに ϕ_1 に依る擾乱は、物体断面の寸法が、生成波の波長に比して小さい程小さく、船の動揺に於ける如き比の場合には一般に相当に小さいことが分る。

定常運動に対しても同様にして全く同じ結論を得る。但し此の場合、断面の代表寸法を $\frac{B}{2}$ とすれば、

$$\frac{B}{2} k_1 = \frac{B}{2} \cdot \frac{g}{U^2} = \frac{\pi B}{\lambda} \text{ なる故、} \frac{B}{2} \cdot 5 \text{ m に対しては}$$

$$U \approx 7 \text{ m/sec} \approx 14 \text{ knots にて初めて } \frac{B}{2} k_1 \approx 1 \text{ となり、}$$

U が更に大きい所でなければ擾乱は望ましい程度の小ささにならないことは注意を要する。

以上は凡て P' なる鏡像 doublet も有用なものと考えた場合であるが、之が ϕ_1 の中へ入る時は之による擾乱は (29) 式及び (30) 式右辺の第 2 項等にて表わされ、自由表面附近では有用な値と同程度の大きさに達し、之を離れるに従つて減少する。而もこの擾乱は $k_0 k_1$ の支配を受けない故に、 k_0 又は k_1 の小さい場合には之に依つて擾乱は一般に増大する。

第 3 図

5. 計 算 例

I. Doublet の分布が分つている場合の例として深さ $2a$ の薄い平板の x 方向の週期運動を考え運動速度を

$$u = x_0 \sigma \cos \sigma t \quad (32)$$

とする。Dr. Havelock の方法⁷⁾では doublet の分布は $\frac{\sigma x_0}{\pi} \sqrt{a^2 - h^2}$ で積分範囲は $h = -a \sim a$ である。進行波の振幅 A_1 は

$$A_1 = 2 \pi k_0 a x_0 I_1(k_0 a) \cdot e^{-k_0 a}$$

$k_0 a$ が小さければ

$$A_1 = \pi k_0^2 a^2 x_0 (1 - k_0 a + \dots) \quad (33)$$

但し I_1 は変形 Bessel 函数である。筆者の方法では分布は $\frac{x_0 \sigma}{\pi} \sqrt{4a^2 - h'^2}$ に相当し、積分は $h' = 2a \sim 0$ で行う。この振幅を A_2 とすると

$$A_2 = \frac{2k_0^2 a^2 x_0}{g} \int_{-2a}^0 \sqrt{4a^2 - h'^2} e^{k_0 h'} dh'$$

$$= B k_0^2 a^2 x_0 \int_{\pi}^0 \sin^2 \theta \cdot e^{2k_0 a \cos \theta} d\theta = 2\pi h_0^2 a^2 x_0 \left(1 - \frac{8}{3\pi} a k_0 + \dots \right) \quad (34)$$

第 4 図

之は略々 A_1 の2倍に当る。又 (16) 式の方法に依れば次のようになる。 φ_0 は周知の如く、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= 2\sigma a x_0 e^{-\alpha} \sin \beta \cdot \cos \sigma t; \\ x &= 2a \sin h\alpha \sin \beta, \\ y &= -2a \cos h\alpha \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\text{依つて } \phi(x) = \begin{cases} 2\sigma^3 x_0 a e^{-\alpha}, & (x > 0) \\ -2\sigma^3 x_0 a e^{-\alpha}, & (x < 0) \end{cases}$$

$$\therefore A_3 = 4 k_0^2 x_0 \int_0^\infty e^{-\alpha} \sin k_0 \xi d\xi. \quad (36)$$

$$(\xi = 2a \sin h\alpha)$$

$2k_0 a = 0.4$ の場合に就き比較せば、 $A_1 = 0.10 x_0$, $A_2 = A_3 = 0.22 x_0$ となる。

II. 深さ $2a$ で鉛直な平板がその上端(水面にある)の周りに小動揺

$$\theta = \theta_0 \sin \sigma t \quad (37)$$

をなす場合。

Dr. Havelock によれば⁷⁾,

$$A_1 = \pi \theta_0 a \{k_0 a I_0(k_0 a) - 2(1 + k_0 a) I_1(k_0 a)\} e^{-k_0 a}$$

$k_0 a$ 小きければ

$$A_1 \approx \pi a^3 k_0^2 \theta_0 e^{-k_0 a}. \quad (38)$$

筆者の方法では次の通

$$z = -2ia \cos h\zeta; \quad (39)$$

或は $x = 2a \sin h\alpha \sin \beta$,

$$y = -2a \cos h\alpha \cos \beta$$

として、境界条件は

$$-\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} 2a \cdot \sin \beta = 2a\omega |\cos \beta|, \text{ at } \alpha = 0 \quad (40)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

第5図

Fourier 展開により

$$-\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 4a^2 \omega \sin \beta |\cos \beta| = \frac{4a^2 \omega}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3}\right) \sin(2n+1)\beta.$$

$$\text{故に } \varphi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} e^{-(2n+1)\alpha} \sin(2n+1)\beta \quad (41)$$

とおき $\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}$ を作り A_{2n+1} を決めると

$$A_{2n+1} = \frac{4a^2 \omega}{\pi} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right).$$

$$\therefore \varphi_0 = \frac{16a^2 \omega}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-(2n+1)\alpha} \sin(2n+1)\beta}{(4n^2-1)(2n+3)}. \quad (42)$$

$$\text{依つて振幅: } A_2 = -\frac{2k_0}{\sigma g} \cdot \frac{16\theta_0 \sigma^3 a^2}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-(2n+1)\alpha} \sin k_0 \xi d\xi}{(4n^2-1)(2n+3)}$$

$$= -\frac{32 \theta_0 k_0^2 a^2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\alpha}}{3} - \frac{e^{-3\alpha}}{15} + \frac{e^{-5\alpha}}{105} - \dots\right) \sin k_0 \xi d\xi. \quad (43)$$

但し $\xi = 2a \sin h\alpha$

$2k_0 a = 0.4$ の時は $A_1 = 0.102 \theta_0 a$, $A_2 = 0.189 \theta_0 a$.

更に $\theta_0 = 0.07 = 4^\circ$, $2a = 15 \text{ cm}$ なる場合に、之等の計算値を実験と比較せば、 $A_1 = 0.54 \text{ mm}$, $A_2 = 0.99 \text{ mm}$;

実験による振幅 = 1.04 mm (平均) である。実験に用いた板は厚さ 30 mm 長さ 1.4 m, 水面上の部分に全長に亘る剛き防塵材を附したものであるが、板厚が更に十分薄れば振幅は上記の値より多少増加し、従つて A^2 は 10% 位の誤差を有するものと推定せられる。波高の計測法等実験方法の詳細は次報に譲る。

尚上の二例の場合の φ_1 による擾乱を図示せば第6図の通りである。

III. 幅 $4a$ の薄板が水面で小動揺

$$\theta = \theta_0 \sin \sigma t$$

をなす場合。この時は

$$z = 2a \cos h \zeta;$$

或は $x = 2a \cos h \alpha \cos \beta,$

$$y = 2a \sin h \alpha \sin \beta,$$

とおけば、境界条件は

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} &= -\frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} \frac{2a \sin \beta}{2a \sin \beta} \\ &= \begin{cases} -2a\omega \cos \beta, & (0 \leq \beta \leq \pi) \\ 2a\omega \cos \beta, & (0 \geq \beta \geq -\pi) \end{cases} \text{ at } \alpha = 0 \quad (45) \end{aligned}$$

前例同様にして

$$-\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = -\frac{16a^2\omega}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4-(2n+1)^2} \cos(2n+1)\beta.$$

$$\text{故に } \varphi_0 = -\frac{16a^2\omega}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(2n+1)\alpha} \cos(2n+1)\beta}{(2n+1)\{4-(2n+1)^2\}^2} \quad (46)$$

とおけばよい。依つて振幅 A_2 は

$$A_2 = -\frac{32\theta_0 k_0^2 a^2}{\pi} \int_{2a}^{\infty} \left(\frac{e^{-\alpha}}{3} - \dots \right) \sin k_0 \xi d\xi, \quad (47)$$

但し $\xi = 2a \cos h \alpha.$

$2k_0 a = 0.4$ の時は、 $A_2 = -0.20 \theta_0 a$ となるが、之は筆者が先に求め且実験的に検証した式⁵⁾ $|A_2| = k_0 a^2 \theta_0$ と全く一致するもので先の方法に比し格段に簡単に求め得るのである。

尙前例と本例では進行波の位相が π だけ異なることは後報にも類似の性質を示す所ある一特徴と考えらる。便宜上振幅に符号を含めて之を明示した次第である。

6. 結 語

以上 Dr. Havelock の方法に一の解釈を試み、之を拡張して、自由表面を無視した場合の速度 potential が求まるならば、比較的誤差を少く生成波の波高を求める一般式を作り、二三の計算例をその或物に対しては実験と比較して示した。

終に臨み常に御指導御鞭達を賜る大阪大学原田、寺沢、笹島諸先生、東京大学加藤先生に対し謹みて感謝の意を表する次第である。

尙本研究費の一部は文部省科学研究費に依るものである。

第 6 図

第 7 図

(1) 加藤 弘：小型船の復原性能に就て，昭和 23 年造船協会春季講演会講演。

(2) 此の以前には J. Rahola の方法等も提唱されているが、之等は統計的に復原性を調べたもので運動力学的理論との結びつきはない。

(3) 加藤 弘：船の横揺に対する抵抗の性質並に相似則に就て，造船協会報，第 66 号，昭和 15 年 6 月。

(4) T. H. Havelock: Some cases of wave motion due to a submerged obstacle. Proc. of Roy. Soc. 1917.

(5) T. H. Havelock: Wave resistance. Proc. of Roy. Soc. 1927~28.

(6) T. H. Havelock: Ship waves. Proc. of Roy. Soc. 1935.

(7) T. H. Havelock: Waves produced by the rolling of a ships. Mag. and Journal of Science. April 1940. 又は造船雑纂，第 221 号

(8) 筆者：平板の動揺造波抵抗，昭和 23 年 6 月応用力学会講演会講演

附 録

(8) 式に (26) 式を得たと同じ演算を施し、 $x=a$ 、 $y=-b$ とおけば、小さい δs に対して

$$\varphi_1 = \frac{M}{2\pi} \delta s \left[\pm 2\pi k_0 e^{-2k_0 b} \sin\{\alpha + k_0(x-a) \mp \sigma t\} \mp 2k_0 \cos \sigma t \int_0^\infty \frac{k_0 \sin(\alpha \mp 2bk) \pm k \cos(\alpha \mp 2bk)}{k^2 + k_0^2} dk \right]$$

この第2項の積分を I とすると

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha (k_0 \cos 2bk + k \sin 2bk) \pm \cos(k \cos 2bk - k_0 \sin 2bk)}{k^2 + k_0^2} dk$$

$$= \pi \sin \alpha \cdot e^{-2k_0 b} \pm \cos \alpha \int_0^\infty \frac{k \cos 2bk - k_0 \sin 2bk}{k^2 + k_0^2} dk.$$

$$\text{然るに} \quad \int_0^\infty \frac{e^{i2b\kappa}}{k - ik_0} dk = \int_0^\infty \frac{e^{-2b\kappa}}{k - k_0} dk + i\pi e^{-2\kappa_0 b} = -e^{-2\kappa_0 b} Ei(2k_0 b) + i\pi e^{-2\kappa_0 b},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{i2b\kappa}}{k + ik_0} dk = \int_0^\infty \frac{e^{-2b\kappa}}{k + k_0} dk = -e^{-2\kappa_0 b} Ei(-2k_0 b).$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{k \cos 2bk}{k^2 + k_0^2} dk = -\frac{1}{2} \{e^{-2\kappa_0 b} Ei(2k_0 b) + e^{2\kappa_0 b} Ei(-2k_0 b)\},$$

$$\int_0^\infty \frac{k_0 \sin 2bk}{k^2 + k_0^2} dk = \frac{1}{2} \{e^{-2\kappa_0 b} Ei(2k_0 b) - e^{2\kappa_0 b} Ei(-2k_0 b)\}.$$

$$\therefore I = \pi \sin \alpha e^{-2k_0 b} \mp \cos \alpha e^{-2\kappa_0 b} Ei(2k_0 b).$$

故に order を考えると (31) 式の第1式を得。第2式の場合も同様であるが、この時は $\int_0^\infty$ の被積分函数には $e^{\mp(\alpha_1 - \alpha)}$ が掛るが、之は積分値の order に影響を考えない。

其の二 Bilge Keel の造波抵抗

Abstract

A study on the wave-making resistance for the rolling of ships.

(II-The wave-making resistance due to bilge keels)

By Toshio Hishida, *Kogakushi, Member*

In this report, the height of the progressive wave produced by the rolling of bilge keels is computed and amended with an experimental coefficient, under the assumption that the wave height produced by the rolling of a ship with bilge keels is the sum of the both heights due to the hull proper and the bilge keels, and reconning as a two dimensional problem in order to apply readily the method in the last report for the ordinary ones which are fitted to the parallel middle body of ships.

It is usually understood that bilge keels are responsible for the eddy-making resistance. But to the wave-making resistance, bilge keels also contribute in a moderate amount compared to that due to the middle part of the hull only. However they do not necessarily increase the resistance due to the hull, for the waves produced by the latter have often a phase difference by π to the former ones.

1. 緒 言

Bilge keel (以下 B. K. と略記する) を有する船の横動揺に依つて生ずる進行波の波高は、船本体によるものと B. K. によるそれとの和であると考え。本報告では先ず B. K. のみの波高を求める計算法を取扱う。

B. K. は多くは長さの殆ど全部が船の中央平行部にあるので、之を二次元問題と仮定すると前報の計算法が簡単に応用出来る。依つて船の中央部附近の断面形に B. K. を代表させる為の突起を附けた形が動揺する際の波高を求める算式を誘導し、之を実験と比較して修正係数(船の断面形の多少の差違に拘らずなるべく一定値なる)を求めた。

動揺抵抗に於て B. K. は主として造渦抵抗に与えるものと諒解されているが、造波抵抗に於ても船本体中央部によるそれに比すべき大きさに達することがあり、従つて船全体としては数十%の造波抵抗を B. K. が受持つ場合がある。又 B. K. は造波抵抗に関する限り常に抵抗を増大させるとは限らず却つて減少させることもある。

2. 突起を有する断面形の写像

A. 突起を有せざる断面形

中央部附近の断面形の写像函数は既に渡辺博士¹⁾によつて求められたものであるので之を拝借することにする。

$Z = x + iy$ 平面に於ける断面形の外部を $\zeta = \xi + i\eta$ 平面の単位円の外部に写像する函数は

$$\frac{Z}{M} = \zeta + \frac{2c^2 \cos 2\psi}{\zeta} - \frac{c^4}{3\zeta^3}, \quad (c < 1). \quad (1)$$

$\zeta = e^{i\alpha + i\beta}$ と書けば ζ 平面にて $\alpha = \text{const.}$ なる円が断面形に対応する。茲では $\alpha = 0$ で断面形の contour の方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{M} &= \cos \beta + 2c^2 \cos 2\psi \cdot \cos \beta - \frac{c^4}{3} \cos 3\beta, \\ \frac{y}{M} &= \sin \beta - 2c^2 \cos 2\psi \cdot \sin \beta + \frac{c^4}{3} \sin 3\beta, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

M, c 及び ψ は茲では主として図形の半幅 $\frac{B}{2}$ と吃水 d 及び彎曲部の半径 ρ に依つて決る常数であつて、後の三者が与えられれば第1図より之を求めることが出来る。但し ρ は (2) 式によつて実際に数十種の図形を画いてみて測つた値である。尚凡ての長さを表す量は $\frac{B}{2}$ にて割り無次元化してある。以下も同様である。写像形は

$\psi = \frac{\pi}{4}$ で $\frac{B}{2} = d$, d が浅くなるに従つて ψ は小さくなり、又 ρ の小さく角型に近い程 c は大きく、 c の減少と共に図形は楕円に近い形となり $c=0$ にて円となる。(2) 式に依る図形の一二の例を第2図に示した。

第 1 図

第 2 図

船底勾配や水線附近の tumblehome, flare 等迄をも考えるならば (2) 式は更に多くの高次の項を採らねばならないが、今は B.K. とそれが著いている母体の大体の形とを関係付けるだけの目的であるから、此の様な簡単な写像で十分と考える。

B. 突起を有し且 $\frac{B}{2} = d$ の場合。

此の場合の断面形の写像函数として次式を仮定する。

$$Z = M \left(\zeta - \frac{c^4}{3\zeta^3} \right) + c_1 \zeta + c_2 \frac{\partial^p}{\partial \zeta^p} \cdot \frac{1}{\zeta^m} \left(1 - \frac{n}{\zeta^4} + \frac{n^2}{\zeta^8} - \dots \right)^2 \quad (3)$$

上式にて c_1, c_2, n は次の条件によつて決る。更に多くの条件を考えるならば $\frac{c_1}{\zeta}$ の項の次え ζ^{-3}, ζ^{-7} 等の項を附加せねばならぬ。茲では図形の半幅, B.K. の深さ h 及びその先端で図形が cusp となる三条件を考える。又 $p=0, 1, 2, \dots; m=3, 7, 11, \dots$ で、 $p=0$ なる時 $|n| < 1$ なければ上式の最後の級数は図形の外側に於て明かに絶体且一様収斂である。依つて $|n| < 1$ なければ同じ領域にて $p=1, 2, \dots$ の時も絶体且一様収斂である。 p 及び m がある程度大きい程突起は鋭くなる。例えば $m=3$ で $p=0.1$ の場合を比較せば第3図の如くである。然し茲では簡単に $p=0, m=3$ として計算を進める。然る時は Contour の方程式は

$$\left. \begin{aligned} x &= M \left(\cos \beta - \frac{c^4}{3} \cos 3\beta \right) + c_1 \cos \beta + c_2 \frac{\cos 3\beta + n \cos \beta}{1 + 2n \cos 4\beta + n^2} \\ y &= M \left(\sin \beta + \frac{c^4}{3} \sin 3\beta \right) + c_1 \sin \beta - c_2 \frac{\sin 3\beta - n \sin \beta}{1 + 2n \cos 4\beta + n^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

となる。(附録 I 参照)。この場合前述の三条件は

$$\left. \begin{aligned} \beta &= 0, x=1; \text{ 或は } c_1 + c_2 \frac{1}{1+n} = 0, \\ \beta &= \frac{\pi}{4}, x = M \left(\cos \frac{\pi}{4} - \frac{c^4}{3} \cos \frac{3}{4}\pi \right) + \frac{h}{\sqrt{2}}; \\ \text{或は } c_1 - c_2 \frac{1}{1-n} &= h, \\ \text{及び } \beta &= \frac{\pi}{4}, \frac{\partial x}{\partial \beta} = -\frac{\partial y}{\partial \beta} = 0; \\ \text{或は } c_1 + c_2 \frac{n+3}{(1-n)^2} &= -M(1-c^4) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(附録 I 参照)。之より

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{h}{2}(1-h), c_2 = -\frac{h}{2}(1-n^2), \\ n &= \frac{M(1-c^4) - h}{M(1-c^4) + 3h}; h = \frac{M(1-c^4)(1-n)}{1+3n} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

普通 $M(1-c^4) > h$ であるから $n > 0$ 。又 $h \rightarrow 0$ の時 $n \rightarrow 1$ となるから、(5) 式最後の式左辺第 2 項の外は消え、此の項のみが有限で $-M(1-c^4)$ を与える。即ち(4)式の c_2 の項は主として図形の彎曲部に cusp を附ける働きをなし、其の結果多少乱される元図形の寸法を c_1 の項にて修正していると見ることが出来る。

C. 突起を有し且比 d/B の一般なる場合。

この場合は(3)式に更に $\zeta^{-1}, \zeta^{-5}, \dots$ 等の項を附加して同じく三種の条件従つて 6 の条件式により夫等の係数を決定することが出来る筈である。然し茲では更に簡單化して B の場合と全く同じ二種の項を母体の方程式に附加してみる。即ち

$$\left. \begin{aligned} Z &= M \left(\zeta + 2c^2 \cos 2\psi \cdot \frac{1}{\zeta} - \frac{c^4}{3\zeta^3} \right) + c_1 \zeta + c_2 \frac{1}{\zeta^3} \left(1 - \frac{n}{\zeta^4} + \frac{n^2}{\zeta^8} - \dots \right); \\ \text{或は } x &= M \left(e^\alpha \cos \beta + 2c^2 \cos 2\psi e^{-\alpha} \cos \beta - \frac{c^4}{3} e^{-3\alpha} \cos 3\beta \right) + c_1 e^\alpha \cos \beta \\ &\quad + c_2 (e^{-3\alpha} \cos 3\beta - n e^{-7\alpha} \cos 7\beta + \dots), \\ y &= M \left(e^\alpha \sin \beta - 2c^2 \cos 2\psi e^{-\alpha} \sin \beta + \frac{c^4}{3} e^{-3\alpha} \sin \beta \right) + c_1 e^\alpha \sin \beta \\ &\quad - c_2 (e^{-3\alpha} \sin 3\beta - n e^{-7\alpha} \sin 7\beta + \dots). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

又 $\alpha=0$ にて

$$\left. \begin{aligned} x &= M \left(\cos \beta + 2c^2 \cos 2\psi \cos \beta - \frac{c^4}{3} \cos 3\beta \right) + c_1 \cos \beta + c_2 \frac{\cos 3\beta + n \cos \beta}{1 + 2n \cos 4\beta + n^2}, \\ y &= M \left(\sin \beta - 2c^2 \cos 2\psi \sin \beta + \frac{c^4}{3} \sin 3\beta \right) + c_1 \sin \beta - c_2 \frac{\sin 3\beta - n \sin \beta}{1 + 2n \cos 4\beta + n^2}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

c_1, c_2 , 及び n は(6)式の値を用いる。図形の半幅、吃水は所期の寸法になっているが、突起は常に $\beta = \frac{\pi}{4}$ の所に出来、其の向きは亦母体図形の Contour normal よりややそれ、其の深さは h より極く僅か異り、且最早 cusp を画かず先端に極く小さい丸味を持っているが(附録 II 参照)、普通の船の中央部附近の肥え方と吃水の変化の範囲に於ては其の位置、向き共に左程不都合はない。此の一二の例は第 2 図の通りである。依つて(7)及び(8)式を用いて今後の計算を進めることにする。尙 c_1, c_2, n の曲線を第 4 図に示す。

第 4 図

第 5 図

3. 生成波の波高 (小動揺の場合)

船が、水線下 a なる深さの点 G の周りに鉛直よりの傾向 θ が

$$\theta = \theta_0 \sin \sigma t \quad (9)$$

なる小動揺をなす場合、依つて生ずる進行波の方程式は、前報の如く自由表面を一時無視した時の速度potential φ_0 が、特に自由表面に関して対称に求められている時には

$$\eta = \frac{2k_0}{\sigma g} \left(\frac{B}{2} \right)^2 \int_0^\infty \phi(\xi) \sin k_0 \xi \cdot p \xi \cdot \sin(k_0 x - \sigma t) \quad (10)$$

である。茲で η は自由表面の変位、 x, y 座標軸は Z 平面と同じく、 t 時間、 g 重力加速度で

$$\text{実部} [\phi(x)e^{i\sigma t}] = - \left(\frac{\partial^2 \varphi_0(x, y, t)}{\partial t^2} \right)_{y=0}, \quad k_0 = \frac{\sigma^2}{g} \cdot \frac{B}{2} \quad (11)$$

である。

そこで (7) 式を用いて φ_0 を求める。断面形の周辺に於て φ_0 が満足すべき条件は、その外向法線 ν の方向余弦を l, m とすれば

$$-\frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} \equiv v_\nu = \omega \begin{cases} -yl - al + xm, & y < 0, \\ yl - al - xm, & y > 0; \end{cases} \quad (12)$$

$$\omega = \theta_0 \sigma \cos \sigma t = \omega_0 \cos \sigma t. \quad (13)$$

或は $\frac{dZ}{d\xi} \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{q}$ と書けば、 $\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} \right)_{\alpha=0} = q \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0}$; $l = q \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0}$, $m = q \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0}$ であるから

$$-\frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} \equiv v_\nu' = \omega \begin{cases} -y \frac{\partial x}{\partial \alpha} - a \frac{\partial x}{\partial \alpha} + x \frac{\partial y}{\partial \alpha}, & -\pi \leq \beta \leq 0, \\ y \frac{\partial x}{\partial \alpha} - a \frac{\partial x}{\partial \alpha} - x \frac{\partial y}{\partial \alpha}, & \pi \geq \beta \geq 0, \end{cases} \quad \alpha=0 \quad (14)$$

となる。(7) 式より

$$\begin{aligned} \left(-y \frac{\partial x}{\partial \alpha} - a \frac{\partial x}{\partial \alpha} + x \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} &= - \left[\{ M(1-2c^2 \cos 2\psi) + c_1 \} \sin \beta + \frac{Mc^4}{3} \sin 3\beta - c_2 \frac{\sin 3\beta - n \sin \beta}{1+2n \cos 4\beta + n^2} \right] \\ &\times \left[\{ M(1-2c^2 \cos 2\psi) + c_1 \} \cos \beta + Mc^4 \cos 3\beta - c_2 \frac{(6n-n^3) \cos \beta + (3-2n^2) \cos 3\beta + 3n^2 \cos 5\beta - n \cos 7\beta}{(1+2n \cos 4\beta + n^2)^2} \right] \\ &+ \left[\{ M(1+2c^2 \cos 2\psi) + c_1 \} \cos \beta - \frac{Mc^4}{3} \cos 3\beta + c_2 \frac{\cos 3\beta + n \cos \beta}{1+2n \cos 4\beta + n^2} \right] \\ &\times \left[\{ M(1+2c^2 \cos 2\psi) + c_1 \} \sin \beta - Mc^4 \sin 3\beta + c_2 \frac{-(6n-n^3) \sin \beta + (3-2n^2) \sin 3\beta - 3n^2 \sin 5\beta - n \sin 7\beta}{(1+2n \cos 4\beta + n^2)^2} \right] \\ &- a \left[\{ M(1-2c^2 \cos 2\psi) + c_1 \} \cos \beta + Mc^4 \cos 3\beta - c_2 (3 \cos 3\beta - 7n \cos 7\beta + \dots) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

(附録 I 参照)。茲で c_1, c_2 の自乗及相乗項は小さいので無視すると、

$$\text{前式} = 4 \left(M + c_1 - \frac{Mc^4}{3} \right) Mc^2 \cos 2\psi \cdot \sin 2\beta - \frac{4}{3} (M + c_1) Mc^4 \sin 4\beta - aM \cos \beta$$

$$\begin{aligned}
& +2aMc^2 \cos 2\psi \cdot \cos \beta - aMc^4 \cos 3\beta - ac_1 \cos \beta + c_2 a(3 \cos 3\beta - 7n \cos 7\beta + \dots) \\
& + 4c_2 \left\{ (1-2n-2n^2+n^3)Mc^2 \cos 2\psi \sin 2\beta + (1-n^2) \left(M + \frac{nMc^4}{3} \right) \sin 4\beta - n(1+n)Mc^2 \cos 2\psi \sin 6\beta \right\} \\
& \div (1+2n \cos 4\beta + n^2)^2
\end{aligned} \quad (16)$$

上式中 $nMc^4/3$ は M に対して省略出来る。(14) 式の条件に対して Fourier 展開を行えば

$$v'_n = \sum_m m (H_m + K_m) \cos m\beta - c_2 a(7n \cos 7\beta - 11n^2 \cos 11\beta + \dots) \quad (17)$$

($m=1, 3, 5, \dots \infty$)

$$\left. \begin{aligned}
H_m &= \frac{1}{m} \left\{ L_m \frac{4}{3} M^2 c^4 - M_m 4 \left(1 - \frac{c^4}{3} \right) M^2 c^2 \cos 2\psi - N_m (aM - 2aMc^2 \cos 2\psi) - P_m aMc^4 \right. \\
K_m &= \frac{1}{m} \left\{ L_m \frac{4}{3} Mc^4 c_1 - M_m 4 Mc^2 c_1 \cos 2\psi - N_m c_1 a + P_m 3c_2 a \right. \\
&\quad - 4Mc_2 \frac{2}{\pi} (1-n^2) \int_0^\pi \frac{\sin 4\beta \cos m\beta d\beta}{(1+2n \cos 4\beta + n^2)^2} \\
&\quad - 4Mc_2 c^2 \cos 2\psi \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{(1-2n-n^2+n^3) \sin 2\beta - n(1+n) \sin 6\beta}{(1+2n \cos 4\beta + n^2)^2} \cos m\beta d\beta \\
L_m &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin 4\beta \cos m\beta d\beta = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{8}{16-m^2}, \quad M_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin 2\beta \cos m\beta d\beta = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{4}{4-m^2} \\
N_m &= \begin{cases} 1 \dots m=1, \\ 0 \dots m \geq 3, \end{cases} \quad P_m = \begin{cases} 1 \dots m=3, \\ 0 \dots m=1, 5, 7, \dots \end{cases}
\end{aligned} \right\} \quad (18)$$

依つて φ_0 を次の如く置けば (14) 式は満足される。

$$\varphi_0 = \omega \left[\sum_m (H_m + K_m) e^{-m\alpha} \cos m\beta - c_2 a (ne^{-7\alpha} \cos 7\beta n^2 - e^{-11\alpha} \cos 11\beta + \dots) \right] \quad (19)$$

$$\text{従つて } \phi e^{i\sigma t} = - \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} \right)_{\beta=0} = \omega_0 \sigma^2 e^{i\sigma t} [\text{同上}]_{\beta=0}. \quad (20)$$

$$\text{故に } \eta = \frac{2k_0^2}{\sigma} \omega_0 \frac{B}{2} \int_1^\infty [\text{同上}]_{\beta=0} \sin k_0 \xi d\xi \cdot \sin(k_0 x - \sigma t). \quad (21)$$

但し (7) より

$$\xi = M \left(e^\alpha + 2c^2 \cos 2\psi \cdot e^{-\alpha} - \frac{c^4}{3} e^{-3\alpha} \right) + c_1 e^\alpha - c_2 (e^{-3\alpha} - ne^{-7\alpha} + \dots). \quad (22)$$

更に小さい項を省略し (附録 III 参照), 船本体による波を η_H , B. K. によるそれを η_K とすれば

$$\eta_H = \frac{2k_0^2}{\sigma} \cdot \frac{B}{2} \omega_0 \int_1^\infty \left(\sum_m H_m e^{-m\alpha} \sin k_0 \xi d\xi \right) \cdot \sin(k_0 x - \sigma t). \quad (23)$$

$$\text{及び } \eta_K = \frac{2k_0^2}{\sigma} \cdot \frac{B}{2} \omega_0 \left[\left(\frac{1+M}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} - k_0 \right) K_1 + \left(\frac{1+M}{2} \right)^3 k_0 \left(1 - \frac{k_0}{2} \right) K_3 + \left(\frac{1+M}{2} \right)^5 k_0 K_5 \right] \\
\times \sin(k_0 x - \sigma t) \quad (24)$$

茲に, K_m はその中の c_1, c_2, n を B. K. の深さ h で書きかえて,

$$\left. \begin{aligned}
K_1 &= M^2(1-c^4) \left[f_{11}(h) + f_{12}(h) \cdot c^4 - f_{13}(h) \cdot \frac{a}{M} + 4c^2 \cos 2\psi \cdot f_{14}(h) \right. \\
&\quad \left. = M^2(1-c^4) \left(f_{11} + f_{12}c^4 - f_{13} \cdot \frac{a}{M} \right) + M(1-c^4)(1-d)f_{14}, \right. \\
(\because (8), (6) \text{ 式により, } \alpha_{\beta=0} - \gamma_{\beta=\frac{\pi}{2}} &= 1-d = 4Mc^2 \cos 2\psi) \\
K_3 &= M^2(1-c^4) \left[f_{31}(h) + f_{32}(h)c^4 - f_{33}(h) \cdot \frac{a}{M} \right], \\
K_5 &= -M^2(1-c^4) \cdot f_{51}(h);
\end{aligned} \right\} \quad (25)$$

但し

$$\left. \begin{aligned}
f_{11}(h) &= \frac{4}{\pi} \frac{(1-n)(1-n^2)^2}{1+3n} \int_0^\pi \frac{\sin 4\beta \cos \beta d\beta}{(1+2n \cos 4\beta + n^2)^2}, \quad f_{12} = \frac{32}{45\pi} \cdot \frac{(1-n)^2}{1+3n}, \\
f_{13}(h) &= -\frac{(1-n)^2}{2(1+3n)},
\end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 f_{14} &= -\frac{1}{6\pi} \cdot \frac{(1-n)^2}{1+3n} + \frac{1}{\pi} \frac{(1-n)^2(1+n)}{1+3n} \\
 &\times \int_0^\pi \frac{(1-2n-2n^2+n^3)\sin 2\beta - h(1+h)\sin 6\beta}{(1+2n\cos 4\beta+n^2)^2} \cos \beta d\beta, \\
 f_{31} &= \frac{4}{3\pi} \frac{(1-n)(1-n^2)^2}{1+3n} \int_0^\pi \frac{\sin 4\beta \cos 3\beta d\beta}{(1+2n\cos 4\beta+n^2)^2}, \quad f_{32} = \frac{32}{63\pi} \cdot \frac{(1-n)^2}{1+3n}, \\
 f_{33} &= \frac{(1-n)^2(1+n)}{2(1+3n)}, \quad M(1-c^4) = \frac{h}{1+3n},
 \end{aligned} \tag{26}$$

之等 $f(h)$ は $\frac{h}{M(1-c^4)}$ の基線上に第6及び第7図に示され容易に K_m を計算することが出来る。

第 6 図

第 7 図

η_H 及び η_K は主として H_1 及び K_1 によつて決る。 K_1 は之等の図よりも明かな如く普通の重心位置従つて a の変化の範囲では常に正である。然るに H_1 は吃水と $a = \overline{OG}$ との関係で正ともなり負ともなり得る。従つてこの両者による合成波高即ち造波抵抗は B. K. によつて増大するとは限らず寧ろ逆の状態に在る場合が多い。蓋し、B. K. が水面に近づく向きに揺れる場合には、B. K. は常に水を水面へ押し上げんとする傾向を有するに反し船体は、其の舷側は B. K. と同じ働をなすが船底部はその逆の方向を有する為、吃水の浅い程重心の低い程後者の効果が大きい。例えば A 模型船(後述)の場合は $d \approx 0.7$ にて $\eta_H \approx 0$ であり、 d が之より浅ければ、若し B. K. が附いておればその η_K と反対の符号となる。第1表及び第8図は同模型船の $a=0$ に於ける(23)式による計算値と後述の方法による実験結果を併記し上の性質を検証したものである。因に本例に於ける $d \approx 0.7$ の場合の如くある動揺週期に対する基本波の波高が0の時は、恰も第二高調波が基本であるかの如き現象を呈し、一週期の間の波形は二波を並べたような形となる。例えば加藤弘博士³⁾の実験による C 模型船の如きはそれである。又一般に基本波の振幅0なる場合にも第二高調波のそれは有限である。之等船本体による造波抵抗の性質に就ては、詳細は後報に譲り茲では上の一特質を記するに留める。尙 (24) 式の表わす諸種の性質に就ては次節に譲る。

第 8 図

4. 生成波の波高(動揺角相当大なる場合)

船の動揺が問題となるのは揺れ角の相当大きい場合であるから次に其の補正を行う。

(X, Y) 及び x 軸に關し之に對称の位置に互に鏡像にして強さ $2\pi \cos \sigma t$ doublets がある場合、(X, Y) にある doublet の速度 potential は

$$D = \cos \sigma t \left[\frac{x-X}{(x-X)^2 + (y-Y)^2} \cos \gamma + \frac{y-Y}{(x-X)^2 + (y-Y)^2} \sin \gamma \right] \tag{27}$$

但し γ はその doublet の軸が x 軸となす角(第9図)である。之に対する進行波は

第 1 表

$\frac{B}{2}=20\text{ cm}, \rho=\frac{1}{4}, a=0; T=1.35\text{ 秒}, k_0=0.441; \theta_0=4^\circ$						
d		0.9	0.7	0.5	0.335	0
M		1.10	.968	.832	.720	
c		.815	.802	.772	.731	
ψ (度)		43.8	41.5	37.5	32.0	
H_1	$\frac{64}{45\pi}M^2c^4$	.242	.176	.112	.067	
	$-\frac{32}{3\pi}M^2\left(1-\frac{c^4}{3}\right)c^2\cos 2\psi$	-.084	-.216	-.318	-.375	
	和	.158	-.040	-.206	-.308	
H_3	$\frac{64}{63\pi}M^2c^4$	.176	.126	.080	.048	
	$\frac{32}{15\pi}M^2\left(1-\frac{c^4}{3}\right)c^2\cos 2\psi$	.017	.043	.064	.075	
	和	.193	.169	.144	.123	
H_5	$-\frac{64}{135\pi}M^2c^4$	-.081	-.059	-.037	-.022	
	$\frac{32}{105\pi}M^2\left(1-\frac{c^4}{3}\right)c^2\cos 2\psi$	.002	.006	.009	.011	
	和	-.079	-.053	-.028	-.011	
$\int_1^\infty e^{-\alpha} \sin k_0 \xi d\xi$	数 値 積 分 値	1.18	1.10	1.01	.93	
	$\frac{1+M}{2}\left(\frac{\pi}{2}-k_0\right)$	1.19	1.11	1.03	.97	
$\int_0^\infty e^{-3\alpha} \sin k_0 \xi d\xi$	数 値 積 分 値	.36	.32	.27	.22	
	$\left(\frac{1-M}{2}\right)^3\left(1-\frac{k_0}{2}\right)k_0$	.36	.32	.26	.21	
$\int_0^\infty e^{-5\alpha} \sin k_0 \xi d\xi$	数 値 積 分 値	.16	.12	.10	.08	
	$\left(\frac{1+M}{2}\right)^5 \cdot \frac{k_0}{3}$	.18	.13	.10	0.07	
$H_1 \int_1^\infty$		.187	-.044	-.206	-.286	
$H_3 \int_1^\infty$		.069	.054	.039	.025	
$H_5 \int_1^\infty$		-.012	-.006	.003	-.001	
和		.244	.004	-.170	-.262	
振 幅 (mm)	計 算 値	1.36	0.02	-0.95	-1.46	-1.13*
	実 験 値	1.28	0	1.90	1.25	1.13*
備 考	* 前報計算例 III による。但し B/2=15 cm の平板。					

$$\eta = -\frac{2\pi k_0 \sigma}{g} e^{k_0 Y} \sin\{\sigma t - k_0(x - X) - \gamma\}, \quad (x > X) \quad (28)$$

更に y 軸に關し対称な位置 $(-X, Y)$ にその軸の向きのみが $\pi - \gamma$ に変る doublet がある場合には、合成波は

$$\eta = \frac{4\pi k_0 \sigma}{g} e^{k_0 Y} \cos(k_0 X - \gamma) \sin(k_0 x - \sigma t) \quad (29)$$

今 (24), (29) 両式を比較するに, (X, Y) を例えば B. K. の深さの中心の座標, γ をその点に於ける B. K. 表面の法線が x 軸となす角と考えるならば, 一般の深さの小さい B. K. は適当な強さを有する一対の doublet と同等であると看做することが出来る。故に B. K. の如く (X, Y) 及び γ に対して平均の値を与えても左

程無理ではないと考えられる場合に於ては, doublet がその位置を週期的に変ずる時の進行波と, B. K. が大きく揺れる時のそれとは同じ性質であると仮定する。そこで先ず doublet が B. K. の平均位置にあり, 動揺中心 G の周りに角速度 ω を以て相当大きく揺れる場合を考える。この時 X, Y, γ は時間の函数となり

$$\left. \begin{aligned} X &= r \cos(\delta_0 + \theta), \\ -Y &= r \sin(\delta_0 + \theta) + a, \quad a = OG, \\ \gamma &= \gamma_0 + \theta, \\ \theta &= \theta_0 \sin \sigma t, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

但し符号は第 9 図の通りである。之等を (27) 式に代入し θ に関して maclaurin 展開を行う。この際自由表面条件を満す為便宜上形式的に

$$D = \cos \sigma t \left[\cos \gamma \int_0^\infty e^{-k(y-Y)} \sin k(x-X) dk + \sin \gamma \int_0^\infty e^{-k(y-Y)} \cos k(x-X) dk \right] \\ (y - Y > 0)$$

と書けるから, 之によると

$$D = \int_0^\infty e^{-k(y-Y_0)} \left[\sin k(x-X_0) \left\{ \cos \gamma_0 \cos \sigma t + \frac{\theta_0}{2} (-\sin \gamma_0 + k r \sin(\gamma_0 + \delta_0)) \sin 2\sigma t \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\theta_0^2}{8} (-\cos \gamma_0 + 3kr \cos(\gamma_0 + \delta_0) - k^2 r^2 \cos(\gamma_0 + 2\delta_0)) \cos 3\sigma t + \dots \right\} \right. \\ \left. + \cos k(x-X_0) \left\{ \sin \gamma_0 \cos \sigma t + \frac{\theta_0}{2} (\cos \gamma_0 - k r \cos(\gamma_0 + \delta_0)) \sin 2\sigma t \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\theta_0^2}{8} (-\sin \gamma_0 + 3kr \sin(\gamma_0 + \delta_0) - k^2 r^2 \sin(\gamma_0 + 2\delta_0)) \sin 3\sigma t + \dots \right\} \right] dk \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{然るに } \cos \sigma t \int_0^\infty e^{-k(y-Y_0)} k^n \sin k(x-X_0) dk \text{ に対しては } \eta &= -ck_0^{n+1} e^{k_0 Y_0} \sin\{\sigma t - k_0(x-X_0)\}, \\ \cos \sigma t \int_0^\infty \quad \quad \quad \cos k(x-X_0) dk \quad \quad \quad \eta &= ck_0^{n+1} e^{k_0 Y_0} \cos\{ \quad \quad \quad \}, \\ \sin \sigma t \int_0^\infty \quad \quad \quad \sin k(x-X_0) dk \quad \quad \quad \eta &= ck_0^{n+1} e^{k_0 Y_0} \cos\{ \quad \quad \quad \}, \\ \sin \sigma t \int_0^\infty \quad \quad \quad \cos k(x-X_0) dk \quad \quad \quad \eta &= ck_0^{n+1} e^{k_0 Y_0} \sin\{ \quad \quad \quad \}, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$n=0, 1, 2, \dots; \quad c; \quad \text{常数}$

であり, 又 σ が n 倍になれば $k_0 = \frac{\sigma^2}{g}$ は n^2 倍になることに注意して (31) 式に対する波の方程式を作れば,

$$\eta = -\cos \gamma_0 e^{k_0 Y_0} \sin\{\sigma t - k_0(x-X_0)\} + 4\theta_0 \{-\sin \gamma_0 + 4k_0 r \sin(\gamma_0 + \delta_0)\} e^{4k_0 Y_0} \cos\{2\sigma t - 4k_0(x-X_0)\} \\ + \frac{27}{8} \theta_0^2 \{-\cos \gamma_0 + 27k_0 r \cos(\gamma_0 + \delta_0) - 81k_0^2 r^2 \cos(\gamma_0 + 2\delta_0)\} e^{9k_0 Y_0} \sin\{3\sigma t - 9k_0(x-X_0)\} \\ + \sin \gamma_0 e^{k_0 Y_0} \cos\{\sigma t - k_0(x-X_0)\} + 4\theta_0 \{\cos \gamma_0 - 4k_0 r \cos(\gamma_0 + \delta_0)\} e^{4k_0 Y_0} \sin\{2\sigma t - 4k_0(x-X_0)\} \\ - \frac{27}{8} \theta_0^2 \{-\sin \gamma_0 + 27k_0 r \sin(\gamma_0 + \delta_0) - 81k_0^2 r^2 \sin(\gamma_0 + 2\delta_0)\} e^{9k_0 Y_0} \cos\{3\sigma t - 9k_0(x-X_0)\} \\ + \dots \quad (33)$$

但し共通の常数を省略してある。(−X, Y) の doublet に対しては X_0, γ_0 及び δ_0 の符号を変えればよい。そのようにして合成波の方程式を作れば

$$\begin{aligned} \eta = & \cos(\gamma_0 - k_0 X_0) e^{k_0 Y_0} \sin(k_0 x - \sigma t) - 4\theta_0 \{ \cos(\gamma_0 - 4k_0 X_0) - 4k_0 r \cos(\gamma_0 + \delta_0 - 4k_0 X_0) \} \\ & \times e^{4k_0 Y_0} \sin(4k_0 x - 2\sigma t) + \frac{27\theta_0^2}{8} \{ \cos(\gamma_0 - 9k_0 X_0) - 27k_0 r \cos(\gamma_0 + \delta_0 - 9k_0 X_0) \} \\ & + 81k_0^2 r^2 \cos(\gamma_0 + 2\delta_0 - 9k_0 X_0) \} e^{9k_0 Y_0} \sin(9k_0 x - 3\sigma t) + \dots \end{aligned} \quad (34)$$

故に微小動揺の波が $\sin(k_0 x - \sigma t)$ なる時、角度相当大なる場合のそれは、前者の振幅が 0 でなければ (34) 式の右辺を $\cos(\gamma_0 - k_0 X_0) e^{k_0 Y_0}$ で割つたものとなる。而して此の級数は明かに収斂である。依つて B. K. による進行波は之と (24) 式を組合せて、動揺角度相当大なる場合迄次式で表わす。

$$\begin{aligned} \eta_k = & 2k_0^2 \theta_0 \cdot \frac{B}{2} \left[\left(\frac{1+M}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} - k_0 \right) K_1 + \left(\frac{1+M}{2} \right)^3 k_0 \left(1 - \frac{k_0}{2} \right) K_3 + \left(\frac{1+M}{2} \right)^5 k_0^3 K_5 \right] \\ & \times \left[\sin(k_0 x - \sigma t) - 4\theta_0 \frac{\cos(\gamma_0 - 4k_0 X_0) - 4k_0 r \cos(\gamma_0 + \delta_0 - 4k_0 X_0)}{\cos(\gamma_0 - k_0 X_0)} e^{3k_0 Y_0} \sin(4k_0 x - 2\sigma t) \right. \\ & + \frac{27\theta_0^2}{8} \cdot \frac{\cos(\gamma_0 - 9k_0 X_0) - 27k_0 r \cos(\gamma_0 + \delta_0 - 9k_0 X_0) + 81k_0^2 r^2 \cos(\gamma_0 + 2\delta_0 - 9k_0 X_0)}{\cos(\gamma_0 - k_0 X_0)} \\ & \left. \times e^{9k_0 Y_0} \sin(9k_0 x - 3\sigma t) + \dots \right] \end{aligned} \quad (35)$$

上式より次のことが分る。

B. K. の微小動揺による波高は船の寸法の 3 乗と振幅の 1 乗に比例し週期の略々 4 乗に逆比例する。

f_{11}, f_{12} 等従つて K_m は凡て実際の $h/M(1-c^4)$ の範囲ではその二次式；

$$K_m = M^2(1-c^4) \{ A(h/M(1-c^4))^2 + B(h/M(1-c^4)) \}$$

の形にて近似し得るが、係数 A, B は f_{14} の場合の外は凡て正である故、 h が増せば波高は急激に増大する。 f_{14} の影響は他項に比して小さい。

$f_{11}, f_{12}, f_{31}, f_{32}$ の項は主として船体の肥瘠の影響を、 f_{13}, f_{33} の項は船の重心位置、 f_{14} は吃水の影響を代表するものと看做し得るが、この初の場合は、同じ吃水でも船が瘠せて居り即ち ρ が大きい程、 M は余り変らぬが c^4 が非常に小さくなる故 K_m は減少し波高は低くなる。而して之は主として船が瘠せている程動揺中心より B. K. に至る距離が小さくなるによるものと考えられる。重心位置に対しても同じ見方が出来、重心は高い程、即ち、 $\overline{OG} = a < 0$ の方が波高は大きくなる。然し吃水は浅い程波高は高いがその率は小さい。蓋し d が減れば、B. K. が水面に近づく為に波高を増す傾向と、同じ $\overline{OG}$ に対して B. K. が G に近付き波高を減ずる傾向とが共存する為であろう。又吃水変化による $f_{11}, f_{12}, f_{31}, f_{32}$ の変化は小さい。

又 (34) 式より一對の B. K. による生成波は、その span と動揺週期及び B. K. の向きによつて互に干渉し合い単一な B. K. の場合の $\cos(\gamma_0 - k_0 X_0)$ 倍となる。

動揺が大となれば、sdan, 週期、自由表面及び重心位置に対する関係位置と向きに応じ種々複雑なる高次の波が現れ波形は歪型となり、振幅の増加と共にその見掛の波高は振幅の 1 乗より大なる程に一般に増大する。高次の波の振幅は B. K. の位置が浅い程急激に増大し従つて動揺振幅の大きい所では吃水が浅くなれば B. K. による造波抵抗は一般に急激に増大する。

5. 実験に依る修正

上に求めた式は、波高を求める基礎式が近似式であり、B. K. を代表する突起は実際の B. K. より鈍い形であり、又大きい動揺に対しては B. K. を単純な doublet と看做している等の仮定を含む。此の内特に第 2 の仮定に依つて (35) 式の値は実際より小さいことが予想せられる。依つて (35) 式の性質を検し且量的に真に近づく為の修正係数(船型、B. K. の大きさ等になるべく無関係に略々一定なる)を求むべく次の如き実験を行つた。

実験は大阪工業専門学校動揺試験水槽⁴⁾にて行ひ、波形波高は第 10 図の方法で測つた。図は波の峯に平行な鉛直面内を表わし、100 watt 電球 L より發する光は水面にて反射し、slit S , 暗箱 B 及び三連電磁 oscillograph の optical box P を経て回転 film F の上に投射す。波面の変位は $\frac{b}{a} \cdot \frac{2c}{c+d} \cos 30^\circ = \frac{2b}{c+d} \cos^2 30^\circ$ 倍 ($\eta \ll c^2$) に拡大される。 b, c, d を変えることにより拡大率を伸縮し得るが、 P 内の cylindrical lens c の焦点距離の関係上、約 10 倍迄が実用となる。又第 11 図は模型船揺動装置の概略で、揺動の mode は正確には単弦運動でなく高

次の mode を含むが之による影響は無視し得る。(附録 IV 参照)。模型船は動揺中心を通る線上両端面より出た pivot によつて支持されている。又波の測定は、定常波を避ける為模型船より遠く離れた位置、pivot の線より 1.37 m の所で行つた。(附録 V 参照)

第 10 図

第 11 図

実験は第一に B 模型船に第 12 図の如き断面を有する真鍮板製 B.K. を装着して B.K. のみの波高を求めた B 模型船は半径 22.5 cm の円壙で長さ 1.8 m 木製ワニス塗である。B.K. は何れも鉛直より 45° の所に flange を下に向けて取付られた。動揺週期 T' は深さ 28 mm の B.K. に対しては 1.35 及 1.20 秒、深さ 18 mm に対しては 1.20 秒を基準とし、週期の僅かの狂い(実際は 0.02 秒以下)は見掛の振幅が週期の 4 乗に逆比例するものとして補正し、振幅は約 16° 迄約 4° 置きに行つた。此の見掛の振幅は (35) 式による計算と共に第 2 表に、波形の比較は其の一二の例を第 13 図に示す。一つの実測値は何れも各数回以上の平均を示す。之より修正係数 c として一応

$$c = 1.72$$

(36)

を得。更に之を (35) 式による見掛けの波高に乗じて θ_0 の基線上に書き実測値と比較せば第 12 図の通りである。

次に c の値が船体との相互干渉ある場合にも何の程度の近似を与えるかを検する為、A 模型船にの 18 mm の B.K. を着けた場合を調べた。A 模型船は幅 40 cm、長さ 1.8 m、bilge の半径 5 cm、rise of floor なき柱状側壁船で木製ワニス塗である。B.K. は bilge circle の中央に flange を下に向けて取付け吃水 18 cm、 $OG = 3.8$ cm、及び吃水 10 cm、 $OG = -2$ cm なる二種の状態にて基準週期何れも 1.35 秒にて行われた。吃水 18 cm. の方は $\eta_H = 0$ となる様 OG を調整されたものである。この場合の B.K. のみによる見掛の波高の計算値に c を乗じた値と、模型船が B.K. を着けた時と着けない時との実測波高の差とを比較せば第 3 表の如くである。今の場合動揺角度大なる時の比較は無意味である故 $\theta_0 = 4^\circ$ の場合を示してある。之らにより、(35) 式の波形及び θ_0 と見掛の波の振幅との関係も実験と略々一致し又修正係数として $c = 1.72 \approx \sqrt{3}$ としても大過なきことを知る。

第 12 図

第 13 図

第 2 表

$\frac{B}{2} = 22.5\text{cm}, d=1, \rho=1, a=0, M=1, c=0,$				
$\gamma_0 = \delta_0 = \frac{\pi}{4}, x = 173\text{ cm}$				
h	0.125	0.125	0.080	
T (秒)	1.35	1.20	1.20	
k_0	0.499	0.631	0.631	
r	1.061	1.061	1.045	
$X_0 = -Y_0$	0.750	0.750	0.740	
$\theta_0 \sin(4k_0x - 2\sigma t)$ の係数	-1.92	-2.19	-2.21	
$\theta_0^2 \sin(9k_0x - 3\sigma t)$ の係数	2.65	0.27	0.25	
見掛の波高 (mm) 計 算 値	$\theta_0 = 4^\circ$	0.64	0.98	0.46
	8°	1.34	2.22	1.04
	12°	2.18	3.81	1.79
	16°	3.18	5.68	2.67
同 上 実 測 値	4°	.95	1.52	.70
	8°	2.25	3.90	1.49
	12°	4.00	6.60	3.15
	16°	5.51	9.62	4.59
見掛の波高の 計 算 値 $\times 1.72$ (mm)	4°	1.09	1.67	0.79
	8°	2.29	3.80	1.78
	12°	3.73	6.51	3.06
	16°	5.44	9.70	4.56

第 3 表

$\frac{B}{2} = 20\text{ cm}, \rho = \frac{1}{4}; h = 0.09,$			
$X_0 = 0.96, \gamma_0 = \frac{\pi}{4}; T = 1.35\text{ 秒}$			
$\theta_0 = 4^\circ, k_0 = 0.441$			
d	0.9	0.5	
a	0.19	-0.10	
r	1.175	1.100	
$-Y_0$	.850	.450	
δ_0	.953	1.047	
M	1.10	.832	
c	.815	.772	
$h/N(1-c^4)$	.147	.168	
波高計算値(mm)	+ .44	+ .40	
同上 $\times 1.72$	+ .76	+ .69	
実測波高 (mm)	船体のみ	≈ 0	-1.15
	B.K. 附	+ .70	- .47
	差	+ .70	+ .68

6. 減衰角の算式

合成波

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \sin(n^2 k_0 x - n\sigma t) + B_n \cos(n^2 k_0 x - n\sigma t)\}, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (37)$$

が、基本波の半週期 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\sigma}$ の間に持去る勢力 E_w は周知の如く

$$E_w = \frac{\rho_w g \lambda}{8} \sum_n \frac{A_n^2 + B_n^2}{2}, \quad \left(\lambda: \text{基本波の波長} \right) \quad (38)$$

ρ : 水の密度

故に船体中央部による波が求つてゐるならば、之に添字 H, B, K . によるそれには K を付して区別すると、船の半週期の間の勢力は両舷にて

$$E_w = \frac{\rho_w g \lambda}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(A_{Hn} + A_{Kn})^2 + (B_{Hn} + B_{Kn})^2}{n}. \quad (39)$$

一方その間の造波抵抗による減衰角を $\Delta\theta_w$, 平均振幅を θ_m , 排水量を W とすれば

$$(W \cdot GZ)_{\theta_m} \cdot \Delta\theta_w = E_w, \quad \text{or} \quad \Delta\theta_w = E_w / (W \cdot GZ)_{\theta_m}. \quad (40)$$

B.K. に対する A_{Kn} 等を再記せば

$$\left. \begin{aligned}
 A_{K1} &= \sqrt{3l} B \theta_m k_0^2 \left[\left(\frac{1+M}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} - k_0 \right) K_1 + \left(\frac{1+M}{2} \right)^3 k_0 \left(1 - \frac{k_0}{2} \right) K_3 + \left(\frac{1+M}{2} \right)^5 k_0 K_5 \right], \\
 l &: B.K. \text{の長さ}, \\
 A_{K2} &= -4 \theta_m e^{3k_0 Y_0} \frac{\cos(\gamma_0 - 4k_0 X_0) - 4k_0 r \cos(\gamma_0 + \delta_0 - 4k_0 X_0)}{\cos(\gamma_0 - k_0 X_0)} \cdot A_{K1} \\
 A_{K3} &= \frac{27\theta_m^2}{8} e^{8k_0 Y_0} \frac{\cos(\gamma_0 - 9k_0 X_0) - 27k_0 r \cos(\gamma_0 + \delta_0 - 9k_0 X_0) + 81k_0^2 r^2 \cos(\gamma_0 + 2\delta_0 - 9k_0 X_0)}{\cos(\gamma_0 - k_0 X_0)} A_{K1}, \\
 &\dots\dots\dots; \\
 B_{Kn} &= 0; \\
 K_1 &= M^2(1-c^4) \left(f_{11} + f_{12} \cdot c^4 - f_{13} \cdot \frac{a}{M} \right) + M(1-c^4)(1-d)f_{14}, \\
 K_3 &= M^2(1-c^4) \left(f_{31} + f_{32} \cdot c^4 - f_{33} \cdot \frac{a}{M} \right), \quad K_5 = -M^2(1-c^4)f_{51}; \\
 k_0 &= \frac{2\pi^2 B}{g T^2}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k_0}.
 \end{aligned} \right\} (41)$$

依つて船の $B, d, W, \bar{O}G = a, \rho$ 及び復原性曲線, $B.K.$ の位置, 向き, 深さ及び長さで動揺週期が与えられれば第1図より M, C を求め, 第6, 7図より f も読みて A_n を計算することが出来る。

7. 結 語

以上 $B.K.$ に依る生成波の振幅を求める算式を誘導し, 又主として次の性質が判明した。

- (1) $B.K.$ による造波抵抗は船本体によるそれに比すべき大きさとなることがある。
- (2) 造波抵抗に於ては $B.K.$ は必ずしも船本体によるそれを増大させるとは限らない。
- (3) $B.K.$ による造波抵抗は主として船が肥えている程又重心が高い程大きく, $B.K.$ の深さが増せば急激に増大する。大動揺角にては吃水が浅くなれば見掛の波高は急激に増大する。
- (4) $B.K.$ による動揺振幅大なる場合の波高は, その一乗より大なる冪にて増加する。

終に臨み常に御指導御鞭達を賜る大阪大学原田, 寺沢, 笹島諸先生, 東京大学加藤先生に対し謹しみて感謝の意を表すると共に, 貴重な御研究の一端を使用させて頂いた笹島先生, 模型船其他の実験資材を御貸し下さった大阪大学造船学科教室, 本実験に終始協力された萱原博美君に対し厚く御礼申上げる次第である。

尙本研究費の一部は文部省科学研究費によるものである。

* 大阪工業専門学校教授

- (1) 渡辺恵弘; 横動揺に於ける船の見掛の慣性力率に就て, 造協会報第 52 号, 昭和 8 年
- (2) 此の最後の級数は阪大助教授笹島秀雄先生の御研究を其のままお借りしたものである。之を実際的に計算可能な範囲で数個の項で置換えると, 断面の形は $B.K.$ の深さに略々同じ振幅を持った corrugated hull のようになってしまう。
- (3) 加藤 弘; 船の横揺に対する抵抗の性質並に相似則に就て, 造協会報第 66 号, 昭和 15 年。
- (4) 筆者; 大阪工業専門学校の新動揺試験水槽に就て, 造協雑纂第 276 号。

附 録

$$\text{I. } e^{-3(\alpha+i\beta)} - ne^{-7(\alpha+i\beta)} + n^2 e^{-11(\alpha+i\beta)} - \dots = \frac{e^{-3(\alpha+i\beta)}}{1+ne^{-4(\alpha+i\beta)}} = \frac{e^{-3(\alpha+i\beta)} + ne^{(\alpha+i\beta)}}{1+2n \cosh 4(\alpha+i\beta) + n^2}.$$

此の実部及び虚部を取り $\alpha=0$ とおけば (4) 式右辺の末項を得。上式を β に就き微分せば

$$-i(3e^{-3(\alpha+i\beta)} - n7e^{-7(\alpha+i\beta)} + \dots) = -i \frac{(3e^{-3(\alpha+i\beta)} - ne^{-7(\alpha+i\beta)})(1+2ne^{4(\alpha+i\beta)} + n^2 e^{8(\alpha+i\beta)})}{(1+2n \cosh 4(\alpha+i\beta) + n^2)^2},$$

此の実部及び虚部をとり, $\alpha=0$ とおけば (15) 式右辺中第 2, 第 4 の [] の中の c_2 の項の形となり, 更に $\beta = \frac{\pi}{4}$ とおけば (5) 式の第 3 式左辺第 2 項の形を得。

II. (8) 式各右辺を $\beta = \frac{\pi}{4}$ の近傍で Taylor 展開し, β の増分を 4β とせば

$$x\left(\frac{\pi}{4} + \Delta\beta\right) = x\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{2}{\sqrt{2}} Mc^2 \cos 2\psi \cdot \Delta\beta + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ -M(1+2c^2 \cos 2\psi + 3c^4) - c_1 + c_2 \frac{n^2 + 22n + 9}{(1-n)^3} \right\} \Delta\beta^{-2} + \dots,$$

$$y\left(\frac{\pi}{4} + \Delta\beta\right) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{2}{\sqrt{2}} Mc^2 \cos 2\psi \cdot \Delta\beta + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ -M(1-2c^2 \cos 2\psi + 3c^4) - c_1 + c_2 \frac{n^2 + 22n + 9}{(1-n)^3} \right\} \Delta\beta^{-2} + \dots$$
 故にこの曲線は $\beta = \frac{\pi}{4}$ にて x 軸となす角 $\frac{\pi}{4}$ なる直線に切し且この直線の上側にある。而して (6) により上

第 14 図

の { } の中は夫々 $\mp 2Mc^2 \cos 2\psi - 4Mc^4 - M(1-c^4) \frac{23n^2 + 30n + 11}{(1+3n)(1-n)}$ となり、この第 1 項は $(1-d)/2$ であつて他項に比して極めて小さく、従つて β が $\frac{\pi}{4}$ より極く僅か小さい共で x, y は 0 となる。而してその β は y の方が x より極く僅か $\beta = \frac{\pi}{4}$ に近い。そしてこの点より β の小さい所では x, y 共に減少する。即ち曲線は $\beta = \frac{\pi}{4}$ の近傍で図の如き形となる。

III. (22) 式にて c_1, c_2 の項は省略出来る。そして α が小さい間は $\xi \doteq e^\alpha$, 大きくなれば $\xi \doteq Mc^\alpha$ となる。故に積分 $I_m = \int_1^\infty e^{-m\alpha} \sin k_0 \xi d\xi = (M')^m \int_1^\infty \frac{\sin k_0 \xi}{\xi^m} d\xi$ となる。但し M' は M と 1 との間のある数である。 k_0 は小さい故同じ k_0 に対しては、 m が大きい程 I_m の値は α の小さい所で大勢が決する故 1 に近いと考えられる。上の積分を行へば

$$\begin{aligned}
 I_m &= (M')^m k_0^{m-1} \int_{k_0}^\infty \frac{\sin \lambda d\lambda}{\lambda^m} = (M')^m k_0^{m-1} \left[\sin k_0 \left(\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{k_0^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)(m-2)(m-3)} \cdot \frac{1}{k_0^{m-3}} + \dots \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cos k_0 \left(\frac{1}{(m-1)(m-2)} \cdot \frac{1}{k_0^{m-2}} - \frac{1}{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)} \cdot \frac{1}{k_0^{m-4}} + \dots \right) + \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m-1} \left(\frac{\pi}{2} - Si(k_0) \right) \right], \\
 Si(k_0) &= \int_0^{k_0} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda.
 \end{aligned}$$

今簡単に $M' = \frac{1+M}{2}$ とし、 k_0^3 以上を省略せば

$$I_1 \doteq \frac{1+M}{2} \left(\frac{\pi}{2} - k_0 \right), \quad I_3 \doteq \left(\frac{1+M}{2} \right)^3 \left(1 - \frac{k_0}{2} \right) k_0, \quad I_{m \geq 5} \doteq \left(\frac{1+M}{2} \right)^m \frac{k_0}{m-2}.$$

之は例えば第 1 表の如く $m=1, 3$ では良い近似を与えるが、 $m \geq 5$ では M' は更 1 に近い方がよい。

一方 K_m は m と共に次の様に変化する。先ずその中の積分を考える。 $J = \frac{1}{m} \int_0^\pi \frac{\sin \mu\beta \cos m\beta d\beta}{(1+2n \cos 4\beta + \eta^2)^2}$
 $= \frac{2}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \mu\beta \cos m\beta d\beta}{(1+2n \cos 4\beta + \eta^2)^2}$ ($\mu=2, 4, 6$; $m=1, 3, 5, \dots$) の被積分函数は分母の影響で $\beta = \frac{\pi}{4}$ の近傍で非常に絶体値が大きく之は n が 1 に近い程著しい。依つて J の値は主として $\beta = \frac{\pi}{4}$ の近傍のみで大勢が決る。故に $\mu=2, 6$ の場合 m の小さい間は $\frac{1}{m}$ の割で減少し m の増加と共に次第に急激に更に大きい割合で減ずる。故に η の式中この J の利き方は $m \geq 3$ では $m=1$ の時の 1 に対し大略 $\frac{k_0}{m} \cdot \frac{1}{m-2}$ であり、然もこの項そのものが小さい故 f_{m4} は $m \geq 3$ では省略出来る。 $\mu=4$ の時は

$$J = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin 4\beta \cdot (\cos \beta - \sin \frac{m\pi}{2} \sin m\beta) d\beta}{(\quad \quad \quad)^2}$$

と書けるから、 $\beta = \frac{\pi}{4}$ の近傍で Taylor 展開を行うと、 n が 0 に近くなければ、 $\Delta\beta$ を小さい角として

$J \doteq \int_{\Delta\beta}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4\beta \cdot \sin \frac{m\pi}{4} \cdot d\beta}{(\quad \quad \quad)}$ 故に J の値は m が小さい間は略々同じで、 m が増せば初は徐々に次第に急激に減少する。而してこの項は η の式中主要な項である故、 n が 1 に近い所では $m=7$ 位迄を取らねばならない。然し $m=5$ に於ても f_{51} が η の式の中で利くのは $m=1$ の 1 割足らずである故、 $I_{m \geq 5} \doteq \left(\frac{1+M}{2} \right)^m \frac{k_0}{m-2}$ は m が大きい時は M' が $\frac{M+1}{2}$ より 1 に近いことを考慮して之を更に $I_{m \geq 5} = \left(\frac{1+M}{2} \right)^5 \frac{k_0}{m-2}$ とし、

$\sum_{m=5}^{\infty} \int_1^{\infty} f_{m1} e^{-m\alpha} \sin k_0 \xi d\xi = \left(\frac{1+M}{2} \right)^5 f_{51} \cdot k_0$ と置く。この誤差は無視し得る程度である。

其の他の項に就ても同様にして小さい項を捨てると (26) 式のものだけが残る。尚以上の積分は数値積分を行つて求め又上の性質を確めた。

IV. 模型船の櫓上端の水平変位 s は crank の腕に比し主連桿の長さが十分長い故(第11図), $s = s_0 \sin \sigma t$ と置ける。然る時模型船の揺れ角は

$$\theta = \tan^{-1} \frac{s_0}{R} \sin \sigma t = \frac{s_0}{R} \sin \sigma t + \frac{1}{12} \left(\frac{s_0}{R} \right)^3 \sin \sigma t + \dots,$$

$$\therefore \omega' = \frac{d\theta}{dt} = \theta_0 \sigma \cos \sigma t + \frac{1}{4} \theta_0^3 \sigma \cos 3\sigma t + \dots = \omega_0 \left(\cos \sigma t + \frac{\theta_0^2}{4} \cos 3\sigma t + \dots \right)$$

但し $\theta_0 = \frac{s_0}{R}$, $\omega_0 = \theta_0 \sigma$. 故に (27) 式の $\cos \sigma t$ の代りに上式 () を置けば (35) 式に於ける変化は初めて $\sin(9k_0 x - 3\sigma t)$ の項にて現れ, 其の前の分子 $\cos(\gamma_0 - 9k_0 X_0)$ が 3 倍になる。之は同分子の他項に比して無視し得る。更に高次の項に於ける変化も同様である。

V. 水中 (X_0, Y_0) に $2\pi \cos \sigma t$ なる強さの doublet がある場合, η は $x > X_0$ にて, $k'_0 = \frac{\sigma^2}{g}$ と書いて

$$\eta = -\frac{2\pi k'_0 \sigma}{g} e^{k'_0 Y_0} \sin \left\{ \sigma t - k'_0 (x - X_0) \right\} - \frac{2\sigma}{g} \frac{x - X_0}{(x - X_0)^2 + Y_0^2} \sin \sigma t$$

$$+ \frac{2k'_0 \sigma}{g} \sin \sigma t \int_0^{\infty} \frac{k'_0 \cos k Y_0 - k \sin k Y_0}{k^2 + k_0'^2} e^{-k(x - X_0)} dk,$$

$$\text{or } \eta = \frac{2\sigma}{g X_0} \left[-\pi k'_0 X_0 e^{k'_0 Y_0} \sin \{ \sigma t - k'_0 (x - X_0) \} - \left\{ \frac{(x - X_0) X_0}{(x - X_0)^2 + Y_0^2} - k'_0 X_0 \int_0^{\infty} \right\} \sin \sigma t \right]$$

今 $X_0 = Y_0 = 15$ cm, $k'_0 X_0 = \frac{1}{2}$, $x = 173$ cm として定常波と進行波の振幅の比を計算し $\frac{(x - X_0)}{X_0}$ の基線上に画けば, 第15図の如く測定位置 $x = 173$ cm にては定常波は進行波の 1% を出でない。依つて B. K の場合にも $x = 173$ cm では先ず定常波は含まれていないと考えられる。(終)

第 15 図