(昭和 24 年 11 月造船協会秋季講演会に於て講演)

水中翼に及ぼす水面の影響に就て

正員 工学士 丸 尾 孟

“The effect of the surface of water on a submerged wing”

By Hajime Maruo, *Kogakushi, member*

The effect of the surface of water on a submerged wing has a practical significance because it is connected not only with the problem of the hydrofoil but with the problem of the action on the screw propeller blade moving near the surface of water. The writer investigated the action on a submerged wing considering the action of gravity on the water surface. The conclusions were so obtained as follows. When the speed of advance is not extremely low, the submerged wing receives more drag and less lift than in the unbounded fluid. The more the depth increases the more the effect decreases, and when the depth becomes larger than the breadth of the wing the effect becomes so small that it can approximately be neglected.

1. 水中を運動する翼に加わる力に対し水面が如何なる影響を及ぼすかという事は、単に水中翼の問題として実用上の意義を有するばかりでなく、水面近く作動する螺旋推進器翼の問題とも関連があり、従来にも此の問題に関するいくつかの研究が行われている。Weinig¹⁾ は 1937 年に翼による水の攪乱が極めて小さく従つて水面の変動が僅かであり、且翼の進行速度が極めて大なる為に水面に於ける重力の作用が無視出来るという仮定の下に、この問題を取扱つた。このような仮定の下では水面に於ける水の切線速度が零であるという境界条件が成立し従つて簡単に翼の水面に関する負の鏡像を考える事により問題を解決し得る。同様の条件の下に Havelock²⁾ は平板翼の二次元問題に対して更に詳細な検討を加えた。以上述べたように重力の作用を考えなければ二次元運動に対して厳密な解法がある。即ち複素函数の等角射像を応用する事により、自由表面に於て流速が一定なる条件及び翼面上に於て流れの方向が与えられるという条件が単に数学的の境界値問題として取扱う事が出来る。友近博士³⁾ は自由表面近くを一定速度で進行する平板翼に対しこの方法を用いて厳密解を求めたが、この研究では翼が水中にあるのではなく水面上の空気中にある場合を計算しているので Weinig 等の結果と直接に比較する事は出来ない。Weinig の研究は翼の深度が翼弦長に比して大なる時にのみ適用出来るものであるが、その計算結果によれば、翼の揚力係数は翼が水面に接近するにつれて減少し深度が翼弦長に等しい所で平均 5% 程少なくなつており、又揚力係数が大なる程水面の影響は顕著に現われている。上述のいずれの理論に於ても二次元運動で摩擦力を考えなければ翼は何等の抵抗をも受けないという事が特徴になつている。この事実は水面に波が発生する事を考慮しない結果に基づくものであるが、之は進行速度が極めて早い事から水面の条件に於て重力の作用が無視し得るという仮定より出て来たものである。

進行速度が大なる時は翼によつて直接に攪乱された附近の水の運動は殆ど重力の影響を受けないと考えて差支えないが、この攪乱によつて後部に表面波を生じ、この運動が翼に対して二次的な影響を及ぼす事は無視出来ない。この影響は翼自身の位置に不向きな速度を生ずると考えられ、その為翼に抵抗を与えると共に有効迎角の減少に伴い揚力を減少せしめる。しかしながら翼幅が有限なる三次元運動に於ては状況はやや異り、Weinig の研究によれば、重力の作用がない場合にも水面の影響として、翼後流の水面に関し対称なる位置に後流と同等な渦層が存在する場合に等しくなるので、この渦層により翼面上に下向きの速度が誘出せられ、その為抗力が増加し揚力は減少する。しかし重力の作用が加わることはや水面の効果が上述の渦層であらわす事が出来ないので問題は若干複雑化する。

水中翼に関連して更に実用上極めて重要な意義を有するのは螺旋推進器翼に及ぼす水面効果の問題である。一般の推進器に及ぼす水面効果の理論的研究は Dickmann⁴⁾ によつて完成されたが、彼の研究に於ては推進器が

単にその位置で水を後方に加速する機構と考えられ、その結果水面の作用は造波による勢力の損失従つて効率の低下という形をとつてあらわれて来る。即ち箇々の螺旋推進器翼の受ける作用に関しては一言も触れる所がない。之に対し前記水中翼の問題より各翼素の受ける作用を類推する事はさ程困難ではないように思われる。言う迄も無く螺旋推進器翼の運動は水面に対して非定常的であり、このような非定常運動を取扱う事は理論的に極めて大なる困難を伴うものであるから、今回は Weinig 等の行つた研究と同様に水中翼の定常運動について調査し翼に及ぼす水面効果の概略の傾向を検討する事とする。

2. 水面下一定の深さを幅の無限に大きい翼が一樣な速度で進行していると考え、翼の厚さが薄い時は翼より離れた場所に於ける流体の運動は翼の揚力の中心にある一つの渦点に基づく運動に近似せしめる事が出来る。水面下 f なる深さを、強さ Γ なる渦点が U なる一定速度で進行する場合を考え、渦の直上の水面上に原点を採り、進行方向に x 軸を、垂直上方に y 軸を採る。水は粘性の無い非圧縮性完全流体と考えれば渦点によつて起される水の運動は次式で与えられる。

$$\phi_0 = -\frac{\Gamma}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{f+y}{x} \right) \quad (1)$$

次に水面に於て速度ポテンシャルが満足すべき条件は $y=0$ に於て、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \kappa_0 \frac{\partial \phi}{\partial y} - \mu \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

但し $\kappa_0 = g/U^2$ 且 μ は仮想的な摩擦係数で最後に零と置くべきものである。

$$\int_0^\infty e^{-\alpha(f+y)} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha = \cot^{-1} \left(\frac{f+y}{x} \right)$$

なる事を考慮し、 $\phi = \phi_0 + \phi_1$

と置いて (2) を満足するように ϕ_1 を決定すれば結局

$$\phi = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left\{ \int_0^\infty e^{-\alpha(f+y)+i\alpha x} \frac{d\alpha}{\alpha} + \int_0^\infty e^{-\alpha(f-y)+i\alpha x} \frac{d\alpha}{\alpha} - 2 \int_0^\infty e^{-\alpha(f-y)+i\alpha x} \frac{d\alpha}{\alpha - \kappa_0 + i\mu} \right\} \quad (3)$$

を得る。但し今後とも複素数は実数部をとる事とする。この式の第1項は渦点により誘出される運動、第2項はその水面に関する鏡像をあらわす。第1項は水面の無い場合の運動であるが水面の存在により第2項及び第3項であらわされる運動が更に加わり翼面上に之等附加項より出て来る速度が加わる事によつて翼の揚力、抗力が変化する。この附加速度の成分を u_i, v_i とすれば、翼に対する影響は進行速度が $U - u_i$ に減少し、迎角が $v_i/(U - u_i)$ だけ増加したのと同等になるが v_i はこの際負であるから迎角が $-v_i/(U - u_i)$ だけ減少する事になる。今迎角 α で無限の流体中を進行する翼のまわりの循環を Γ_0 とし迎角が小さい時は Γ_0 は迎角に比例するから、

$$\Gamma_0 = mU\alpha \quad (4)$$

と書く。更に u_i 及び v_i は (3) 式より明かなように Γ に比例するから

$$u_i = p\Gamma \quad v_i = -q\Gamma \quad (5)$$

と書ける。水中翼は u_i, v_i の影響を受けるから翼のまわりの循環は、

$$\Gamma = m(U - u_i) \left(\alpha + \frac{v_i}{U - u_i} \right) = m(U - p\Gamma) \left(\frac{\Gamma_0}{mU} - \frac{q\Gamma}{U - p\Gamma} \right) \quad (6)$$

従つて

$$\Gamma = \frac{\Gamma_0}{1 + \frac{p\Gamma_0}{U} + mq} \quad (7)$$

翼に働く揚力は Kutta Joukowski の定理により単位翼幅につき次式であらわされる如くなる。

$$L = \rho(U - u_i) \Gamma = \frac{\rho U \Gamma_0}{1 + \frac{p\Gamma_0}{U} + mq} \left\{ 1 - \frac{p\Gamma_0}{U \left(1 + \frac{p\Gamma_0}{U} + mq \right)} \right\} \quad (8)$$

翼弦長を l とし単位翼幅当りの揚力係数を次の如くあらわす。

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 l} \quad (9)$$

更に無限流体中の翼素の揚力を L_0 、揚力係数を C_0 とする。

即ち

$$C_0 = \frac{L_0}{\frac{1}{2} \rho U^2 l} \quad (10)$$

$$L_0 = \rho U \Gamma_0$$

以上より水中翼の揚力係数と翼素固有の揚力係数との比が次の如く求まる。

$$\frac{C_L}{C_0} = \frac{1 + m q}{\left(1 + m q + \frac{p l}{2} C_0\right)^2} \quad (11)$$

さて (3) 式より,

$$p = -\frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\infty e^{-\alpha(f-y)+i\alpha x} d\alpha + 2\kappa_0 \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(f-y)+i\alpha x}}{\alpha - \kappa_0 + i\mu} d\alpha \right]_{\substack{x=0 \\ y=-f \\ \mu \rightarrow 0}}$$

しかるに,

$$\int_0^\infty e^{-2f\alpha} d\alpha = \frac{1}{2f}$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{e^{-2f\alpha}}{\alpha - \kappa_0 + i\mu} d\alpha = -e^{-2\kappa_0 f} E_i(2\kappa_0 f)$$

但し

$$E_i(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^u}{u} du$$

となる故に,

$$p = \frac{1}{4\pi f} - \frac{\kappa_0}{\pi} e^{-2\kappa_0 f} E_i(2\kappa_0 f) \quad (12)$$

次に

$$q = \frac{i}{2\pi} \left[\int_0^\infty e^{-\alpha(f-x)+i\alpha x} d\alpha + 2\kappa_0 \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(f-x)+i\alpha x}}{\alpha - \kappa_0 + i\mu} d\alpha \right]_{\substack{x=0 \\ y=-f \\ \mu \rightarrow 0}}$$

しかるに

$$R_e \lim_{\mu \rightarrow 0} i \int_0^\infty \frac{e^{-2\alpha f + i\alpha x}}{\alpha - \kappa_0 + i\mu} d\alpha = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 2\pi e^{-2\kappa_0 f} \cos \kappa_0 x & x < 0 \end{cases}$$

なる故 $x=0$ に於ては $\pi e^{-2\kappa_0 f}$ となる。従つて,

$$q = \kappa_0 e^{-2\kappa_0 f} \quad (13)$$

$U/\sqrt{g f}$ を変化させた時 $p f$ 及び $q f$ のとり値は第 1 図の曲線に示してある。平板翼に対しては,

$$m = \pi l \quad (14)$$

第 1 図

なる故

$$\frac{C_L}{C_0} = \frac{1 + \frac{\pi \kappa_1}{h} e^{-2\kappa_1}}{\left[1 + \frac{\pi \kappa_1}{h} e^{-2\kappa_1} + \frac{C_0}{2\pi h} \left\{ \frac{1}{4} - \kappa_1 e^{-2\kappa_1} E_i(2\kappa_1) \right\} \right]^2} \quad (15)$$

但し $n_1 = gf/U^2$, $h = f/l$

h の一定の値に就て C_L/C_0 の $U/\sqrt{gf}$ に対する変化は第 2 図の曲線で示してある。 $U/\sqrt{gf}$ が極めて小なる時は C_L/C_0 は 1 より大きな値をとる。之は進行速度の小なる時は重力が大きく働いて水面の変形妨げる為で、 $U/\sqrt{gf}$ が零なる極限では κ_0 が無限大となり、(3) 式に於て $k_0 \rightarrow \infty$ とすれば、

第 2 図

$$\phi = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left\{ \int_0^\infty e^{-\alpha(\tau+\nu)+i\alpha x} \frac{d\alpha}{\alpha} + \int_0^\infty e^{-\alpha(\tau-\nu)+i\alpha x} \frac{d\alpha}{\alpha} \right\} \quad (16)$$

即ち水面に関する鏡像が存在する事になり水面が剛体壁と同様な作用をなすから水面の無い場合に比して揚力が増大する。速度が上昇すると揚力は急激に減少するが、之は波の発生により翼の部分に下向き速度が生ずる為である。この値は $U/\sqrt{gf}$ が $\sqrt{2}$ の所で大体極小となるがこの値は q の極大となる点即ち造波現象の最著しい所に対応している。深度と揚力変化との関係は第 3 図に C_L/C_0 の h に対する曲線で示してある。いづれの曲線も h の増加と共に 1 に漸近するが進行速度があまり大きくないと揚力の減少はかなりの量に達する。この曲線では速度をあらわすのに $U/\sqrt{gf}$ を以てしているので深度が増加すれば $U/\sqrt{gf}$ は減少する。この曲線を見ればわかるように $U/\sqrt{gf}$ が大体 1.5 以上では $U/\sqrt{gf}$ の減少するにつれて揚力も又減少している。例えば深度が翼弦長の 4 倍即ち h が 4 なるかなり深く沈んでいる場合でも $U/\sqrt{gf}$ が 10 の時に 3%, 8 の時に 5%, 6 の時に 7% 程度の揚力減少がある。 C_L/C_0 の値は又 C_0 の大きさにも関係しているが C_0 があまり大きく無ければ C_0 の変化による C_L/C_0 の変化は 1~2% 程度で大したものではない。重力の作用の加わらない場合は Weinig によつて計算されたがこの値は第 3 図に $U/\sqrt{gf} = \infty$ として記入してある。この場合は揚力の減少はさ程著しくなく h が 2 以上では 3% 以下である。

次に翼の受ける抗力は今の場合は今の場合は総て造波抵抗でありその大きさは次の如くあらわす事が出来る。

$$R_w = -\rho v_i \Gamma = -L \frac{v_i}{U - u_i} \quad (17)$$

故に抗力係数は前の諸関係を用いて、

$$C_w = \frac{R_w}{\frac{1}{2} \rho U^2 l} = \frac{2qlC_0^2}{(2+2mq+plC_0)^2} \quad (18)$$

となる。又抗揚比は、

$$\varepsilon = \frac{C_w}{C_L} = \frac{qlC_0}{2(1+mq)} \quad (19)$$

第 3 図

第 4 図

従つて抗揚比は翼素の固有揚力係数 C_0 に比例し、平板翼ではその比例定数 $ql/2(1+mq)$ が $U/\sqrt{gf}$ に対して第 4 図の曲線で示す如き関係にある。第 4 図の曲線は結局抵抗曲線と同様の性質を持つもので q が極大値をとる時に極大となり、その位置は $U/\sqrt{gf} = \sqrt{2}$ である。

3. 前節では翼を一箇の渦点で置き換えたのであるが、没水深度が翼弦長に比して小さくなると、もはやこの

方法が適用出来なくなる。それは翼面上の各点による攪乱が水面に各別箇の作用をなし、更に水面攪乱運動が翼面上の各点に夫々異なる影響を及ぼすからである。重力の作用を考えなければ等角写像の方法によつてこの問題を厳密に取り扱う事が出来るが、重力を考慮する時はこの方法が用いられないので前節と同様水面に関する鏡像を考える事により近似的にこの問題を取り扱うことにする。

薄翼の理論によれば平板翼の周囲の流体運動は翼面上に次式で与えられる渦点の分布を置く事によつて得られる。即ち翼弦長を l 、翼の中心に原点を置き翼面に沿つて x をはかり、且翼のまわりの環循を Γ とすれば、その分布は

$$\frac{2\Gamma}{\pi l} \sqrt{\frac{1 + \frac{2x}{l}}{1 - \frac{2x}{l}}}$$

となる。若し迎角が小さければ渦面は水平と考へても差支えない。このような渦面が水面下 f なる深度にあるとすれば之に基ずく流体の運動は前節 (3) 式を用いて容易に求められる。即ち

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{i\Gamma}{\pi^2 l} \left\{ \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{1 + \frac{2\xi}{l}}{1 - \frac{2\xi}{l}}} d\xi \int_0^\infty e^{-\alpha(f+y) + i\alpha(x-\xi)} \frac{d\alpha}{\alpha} \right. \\ & + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{1 + \frac{2\xi}{l}}{1 - \frac{2\xi}{l}}} d\xi \int_0^\infty e^{-\alpha(f-y) + i\alpha(x-\xi)} \frac{d\alpha}{\alpha} \\ & \left. - 2 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{1 + \frac{2\xi}{l}}{1 - \frac{2\xi}{l}}} d\xi \int_0^\infty e^{-\alpha(f-\alpha) + i\alpha(x-\xi)} \frac{d\alpha}{\alpha - \kappa_0 + i\mu} \right\} \quad (20) \end{aligned}$$

この式の第1項は平板の運動を与えるが第2項及び第3項が存在する為 (20) 式の運動を与える翼型は平板とは異つてゐる。翼面の水平に対する傾きが各点で小さい時はその傾角は次式で近似させ得る。翼面を η とあらわせば、

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{U} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{y=-f}$$

之より翼面の形状は、

$$\begin{aligned} \eta = & -\frac{\Gamma}{\pi^2 U l} \left\{ \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{1 + \frac{2\xi}{l}}{1 - \frac{2\xi}{l}}} d\xi \int_0^\infty (1 - e^{-2\alpha f}) e^{i\alpha(x-\xi)} \frac{d\alpha}{\alpha} \right. \\ & \left. + 2 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{1 + \frac{2\xi}{l}}{1 - \frac{2\xi}{l}}} d\xi \int_0^\infty e^{-2\alpha f + i\alpha(x-\xi)} \frac{d\alpha}{\alpha - \kappa_0 + i\mu} \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

となり、括弧内第1項の積分を実行すれば、

$$R_0 \frac{\pi l}{2} \left\{ \log \frac{\sqrt{\frac{l^2}{4} - x^2 + ix}}{\sqrt{\frac{l^2}{4} + 4f^2 - x^2 - 4ifx - 2f + ix}} + \frac{2i}{l} \left(\sqrt{\frac{l^2}{4} + 4f^2 - x^2 - 4ifx - 2f} \right) \right\}$$

又第2項の α に関する積分は線積分により変形出来る。

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-2f\alpha + i(\alpha-\xi)\alpha}}{\alpha - \kappa_0 + i\mu} d\alpha = & -(A + iB)e^{-\kappa_0\{2f - i(\alpha-\xi)\}} \quad x > \xi \\ & -(A + iB)e^{-\kappa_0\{2f - i(\alpha-\xi)\}} + 2\pi i e^{-\kappa_0\{2f - i(\alpha-\xi)\}} \quad x < \xi \end{aligned}$$

但し、

$$A = \gamma + \log r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n \cdot n!} \cos n\theta$$

$$B = \pi - \theta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n \cdot n!} \sin n\theta$$

$$\text{又, } r = \kappa_0 \sqrt{(x-\xi)^2 + 4f^2} \quad \tan \theta = \frac{x-\xi}{2f}$$

$$\gamma = 0.5772$$

x 及び ξ の種々の値に対して上式を計算し, 更に ξ に関して数値積分を実行する事により (21) 式の第 2 項が計算される。 $U/\sqrt{gf}$ が 2, l/f が 1 及び 2 なる場合に対して計算した結果翼面の形状が第 5 図に示す如くなつた。この図を見ると平板との差は僅かであるが前半部に於てやや彎曲している事がわかる。従つて正確に平板翼を得る為には渦の分布に若干の補正を施さねばならぬ。しかしいづれにしても平板に極めて近いので, そのまま前後端の高さの差をとつて迎角とし l/f が 1 及び 2 の場合種々の $U/\sqrt{gf}$ の値に対し計算した結果は第 6 図の曲線に示してある。此所で計算した速度範囲では水面の影響により一定の循環に対する迎角が水面の無い場合に比べて大

第 5 図

きくなつてゐるが, この影響はいうまでもなく深度が増加するにつれて減少する。速度が増加すれば迎角は次第に減少するが重力の影響が殆ど加わらないような高速に於てもなお水面の無い場合よりも大きな迎角をとる事は注意すべきである。この事実は前節の渦点の理論からは得られなかつた結果であり, 若し翼が水面に無限に接近する時は迎角が水面の無い場合の 2 倍となる事は容易に推測出来る。

第 6 図

次に揚力を考えれば, 若し翼の迎角が極めて小さく且つ水面にあまり接近していない時, 迎角の 2 乗の order を無視する事により簡単に

$$L = \rho U \Gamma \quad (22)$$

となるが, 水面の影響による翼面上の速度変化を考慮すれば若干問題が複雑化する。水面の影響によつて翼面上に誘起される速度の水平成分を u_i とすれば揚力は

$$L = \rho \int (U - u_i) \gamma(x) dx \quad (23)$$

但し $\gamma(x)$ は渦面の循環分布をあらわす。(20) 式より u_i を求めれば,

$$u_i = \frac{\Gamma}{\pi l} \left\{ \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{1 + \frac{2\xi}{l}}{1 - \frac{2\xi}{l}}} d\xi \int_0^\infty e^{-2\alpha f + i\alpha(x-\xi)} d\alpha + 2\kappa_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{1 + \frac{2\xi}{l}}{1 - \frac{2\xi}{l}}} \right.$$

$$\left. = d\xi \int_0^\infty e^{-2\alpha f + i\alpha(x-\xi)} \frac{d\alpha}{\alpha - \kappa_0 + i\mu} \right\} \quad (24)$$

之を(23)式に入れて計算するのであるが、(24)の第1項より出て来る積分は容易に実行出来て、 $K.E.$ を完全楕円積分とすれば、

$$\frac{2\Gamma^2}{\pi^2 l} \sqrt{\frac{4f^2}{l^2} + 1} \left\{ K \left(\sqrt{\frac{4f^2}{l^2} + 1} \right) - E \left(\sqrt{\frac{4f^2}{l^2} + 1} \right) \right\}$$

第2項より出るものでは、

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{1 + \frac{2\xi}{l}}{1 - \frac{2\xi}{l}}} d\xi \int_0^\infty \frac{e^{-2\alpha f + i\alpha(x-\xi)} d\alpha}{\alpha - \kappa_0 + i\mu}$$

の値は翼型を計算する際に既に求められているから、この値を用いて更に数値積分すれば求まる。かくして得られた値を $t\Gamma^2/l$ と書けば、

$$L = \rho U \Gamma - \rho \frac{t}{l} \Gamma^2 \quad (25)$$

更に迎角を

$$\alpha = \Gamma / K U l \quad (26)$$

であらわせば、

$$L = \rho U^2 k l \alpha - \rho U^2 k^2 t l \alpha^2 \quad (27)$$

従つて揚力の係数は、

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 l} = 2 k \alpha - 2 t k^2 \alpha^2 \quad (28)$$

或は

$$C_0 = \frac{L_0}{\frac{1}{2} \rho U^2 l} = 2 \pi \alpha$$

を用いて

$$C_L = \frac{k}{\pi} C_0 - \frac{t k^2}{2 \pi^2} C_0^2 \quad (29)$$

ここに得られた結果と渦点による結果とを比較する為に(11)式を展開して、

$$\frac{C_L}{C_0} = \frac{1}{1 + m q} - \frac{p l}{(1 + m q)^2} C_0 + \quad (30)$$

$m = \pi l$ と置き(29)式と比較すれば $1/(1 + \pi l q)$ と k/π とが対応している事がわかり第7図にこの値が曲線で示してある。更に此等の式によれば $p l$ と $t/2$ とが対応しているのであるが実際には $p l$ は t に対応すべきものである。之は渦点の理論では u_i の大きさが誇張されてあらわれているのに対して一方薄翼の方では u_i が U に

第 7 図

比べて極めて小さい為一部では u_i^2 が省略されている事によるのである。従つて双方共に若干の矛盾が存在しているが (29) 式を (30) 式に合致するように書き更めれば、

$$\frac{C_L}{C_1} = \frac{k}{\pi} - \frac{tk^2}{\pi^2} C_0 \quad (29)'$$

第8図には pl と t とが比較して示されてある。更につけ加えておくべき事は今回の薄翼に対する計算は厳密

第 5 図

に平板に対するものではない。従つて得られた結果も平板に対するものとしては厳密さを欠いている。特に若干彎曲を有する為迎角が平板の場合より若干大きく出ている事が考えられる。しかし u_i の影響により実際は計算より若干大となる故 (29)' 式で与えられる値は大体妥当なものであろう。

次に抗力は

$$\rho \int \frac{\partial \phi}{\partial y} \gamma(x) dx$$

で与えられる。(20) 式より

$$R = -\frac{2i\rho\Gamma^2}{\pi^3 l^2} \left\{ \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{1+\frac{2x}{l}}{1-\frac{2x}{l}}} dx \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{1+\frac{2\xi}{l}}{1-\frac{2\xi}{l}}} d\xi \int_0^\infty e^{i\alpha(x-\xi)} (1-e^{-2\alpha f}) d\alpha \right. \\ \left. - 2\kappa_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{1+\frac{2x}{l}}{1-\frac{2x}{l}}} dx \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{1+\frac{2\xi}{l}}{1-\frac{2\xi}{l}}} d\xi \int_0^\infty e^{-2\alpha f + i\alpha(x-\xi)} \frac{d\alpha}{\alpha - \kappa_0 + i\mu} \right\} \quad (31)$$

この第1項は

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{1+\frac{2x}{l}}{1-\frac{2x}{l}}} dx \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{1+\frac{2\xi}{l}}{1-\frac{2\xi}{l}}} d\xi \int_0^\infty \sin \alpha x \cos \alpha \xi (1-e^{-2\alpha f}) d\alpha - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{1+\frac{2x}{l}}{1-\frac{2x}{l}}} \\ \cdot dx \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{1+\frac{2\xi}{l}}{1-\frac{2\xi}{l}}} d\xi \int_0^\infty \cos \alpha x \sin \alpha \xi (1-e^{-2\alpha f}) d\alpha$$

となるから零である。第2項の α に関する積分を線積分によつて変形すれば、

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{1+\frac{2x}{l}}{1-\frac{2x}{l}}} \sqrt{\frac{1+\frac{2\xi}{l}}{1-\frac{2\xi}{l}}} I(x-\xi) d\xi dx - 2\pi \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{1+\frac{2x}{l}}{1-\frac{2x}{l}}}$$

$$dx \int_x^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{1 + \frac{2\xi}{l}}{1 - \frac{2\xi}{l}}} e^{-2\kappa_0 f} \cos \kappa_0(x - \xi) d\xi$$

のような形となるが、

$$I(x - \xi) = -I(\xi - x)$$

なる故、この第1項は零となり結局第2項のみが残る。

$$\begin{aligned} R_w &= \frac{8\rho\Gamma^2\kappa_0}{\pi^2 l^2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{1 + \frac{2x}{l}}{1 - \frac{2x}{l}}} dx \int_x^{\frac{l}{2}} \sqrt{\frac{1 + \frac{2\xi}{l}}{1 - \frac{2\xi}{l}}} e^{-2\kappa_0 f} \cos \kappa_0(x - \xi) d\xi \\ &= \rho\Gamma^2\kappa_0 e^{-2\kappa_0 f} \left\{ J_0^2\left(\frac{\kappa_0 l}{2}\right) + J_1^2\left(\frac{\kappa_0 l}{2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

之は造波抵抗である。此の式は渦点の理論による式

$$R_w = \rho\Gamma^2\kappa_0 e^{-2\kappa_0 f}$$

と比較し得る。 κ_0 が小で κ_0^3 以上が無視出来れば両者は一致する。抗力係数は

$$C_w = \frac{R_w}{\frac{1}{2}\rho U^2 l} = 2\left(\frac{\Gamma}{Ul}\right)^2 \kappa_0 l e^{-2\kappa_0 f} \left\{ J_0^2\left(\frac{\kappa_0 l}{2}\right) + J_1^2\left(\frac{\kappa_0 l}{2}\right) \right\} \quad (33)$$

第 9 図

$C_w / \left(\frac{\Gamma}{Ul}\right)^2$ の値を $U/\sqrt{gf}$ に対する曲線に示したのが第9図である。第9図には又渦点理論による値

$$C_w = 2\left(\frac{\Gamma}{Ul}\right)^2 \kappa_0 l e^{-2\kappa_0 f} \quad (33)'$$

も点線で示して両者の差は極めて少い。従つて C_w を求めるには (33)' 式を用いて十分である。抗揚比を求めるには (26) 式及び (27) 式の関係を用いなければならぬ。之は渦点理論による式に比してかなり複雑となる。以上の計算より深度が翼弦長以上ならば渦点理論による値が近似値としては十分なる事が理解される。

4. 翼幅の有限なる場合には運動が当然三次元的であるが従来翼の三次元問題を取扱うに当つては渦理論が用いられて来た。しかし今の問題では流体の速度ポテンシャルを知る必要があるので渦理論をそのまま用いる事は出来ない。更に問題の複雑化を避ける為には翼を一本の束縛渦で置換える揚力線理論が採用されねばならぬ。

今座標原点を翼の中央にとり、進行方向に x 軸、翼幅に沿つて y 軸、垂直上方に z 軸をとる。 y 軸上にある束縛渦の循環分布を $\Gamma(y)$ とし一様な進行速度を U とする。若し翼面荷重が極めて小さく第一近似として後流渦面が水平であると考えられる時は、翼面及び後流内の渦領域を除いた部分の速度ポテンシャルは次式の如くあらわされる。

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^0 d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\eta) \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} \right\} d\eta \quad (33)$$

従つて若し原点を水面上にうつせば f なる深さに揚力線の存在する場合の速度ポテンシャルは z の代りに $z+f$ において、

$$\phi_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^0 d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\eta) \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+f)^2}} \right\} d\eta \quad (34)$$

次に水面の条件は (2) 式と同様に、 $z=0$ において、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \kappa_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} - \mu \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (35)$$

この条件に入れる為に次の如き積分表示を用いる。

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\kappa z + i\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\kappa$$

積分記号内の微分が許されると考え速度ポテンシアル ϕ を $\phi_0 + \phi_1$ と置いて (35) 式に代入し ϕ_1 を決定すれば結局、

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{1}{8\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\eta) d\eta \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\kappa(z+f) + i\kappa\{x \cos \theta + (y-\eta) \sin \theta\}} \kappa d\kappa \right. \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\eta) d\eta \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\kappa(f-z) + i\kappa\{x \cos \theta + (y-\eta) \sin \theta\}} \kappa d\kappa \\ & \left. - 2\kappa_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\eta) d\eta \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-\kappa(f-z) + i\kappa\{x \cos \theta + (y-\eta) \sin \theta\}}}{\kappa - \kappa_0 \sec^2 \theta + i\mu \sec \theta} \kappa d\kappa \right] \quad (36) \end{aligned}$$

次に ϕ に関する積分を実行するのであるが、 $f(x)$ が有界なる時、

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \{f(+0) + f(-0)\}$$

なる関係を用いて $\xi = -\infty$ に於ける値を決定すれば結局次式が得られる。

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{i}{8\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\eta) d\eta \int_{-\pi}^{\pi} \sec \theta d\theta \int_0^{\infty} e^{-\kappa(z+f) + i\kappa\{x \cos \theta + (y-\eta) \sin \theta\}} d\kappa \right. \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\eta) d\eta \int_{-\pi}^{\pi} \sec \theta d\theta \int_0^{\infty} e^{-\kappa(f-z) + i\kappa\{x \cos \theta + (y-\eta) \sin \theta\}} d\kappa \\ & - 2\kappa_0 \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\eta) d\eta \int_{-\pi}^{\pi} \sec^3 \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-\kappa(f-z) + i\kappa\{x \cos \theta + (y-\eta) \sin \theta\}}}{\kappa - \kappa_0 \sec^2 \theta + i\mu \sec \theta} d\kappa \\ & \left. - \frac{1}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\eta) d\eta \int_0^{\infty} e^{-u(z+f)} \cos u(y-\eta) du + \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\eta) d\eta \int_0^{\infty} e^{-u(f-z)} \cos u(y-\eta) du \right] \right] \quad (37) \end{aligned}$$

この式は非常に複雑な為運動を全般的に検討する事は困難であるが水中翼の受ける作用を論ずるには揚力線上に於ける誘導速度を調べれば十分である。それ故 $(\partial \phi / \partial z)_{z=0}^{x=0}$ を調べてみる。(37) 式の第1項及び第2項より出て来る部分は x に関して反対称であるから $x=0$ に於て零となる。第3項は κ に関する積分を線積分によつて変形すれば、

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{\kappa_0 \sec^2 \theta \cos m(f-z) + m \sin m(f-z)}{m^2 + \kappa_0^2 \sec^4 \theta} e^{-m\{x \cos \theta + (y-\eta) \sin \theta\}} dm \quad x \cos \theta + (y-\eta) \sin \theta > 0 \\ & - \int_0^{\infty} \frac{\kappa_0 \sec^2 \theta \cos m(f-z) + m \sin m(f-z)}{m^2 + \kappa_0^2 \sec^4 \theta} e^{+m\{x \cos \theta + (y-\eta) \sin \theta\}} dm \quad x \cos \theta + (y-\eta) \sin \theta < 0 \\ & + 2\pi e^{-\kappa \sec^2 \theta (f-z)} \sin[\kappa_0 \sec^2 \theta \{x \cos \theta + (y-\eta) \sin \theta\}] \end{aligned}$$

θ に関する積分を行えば、 $\tan \psi = \frac{y-\eta}{x}$ とおいて

$$\Psi + 4\pi \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\psi - \frac{1}{2}\pi} \sec^3 \theta e^{-2\kappa_0 \sec^2 \theta (f-z)} \sin[\kappa_0 \sec^2 \theta \{x \cos \theta + (y-\eta) \sin \theta\}] d\theta$$

の形となる。しかるに Ψ は $x=0$ に於て零となるので揚力線に対して影響を及ぼすのは第2項の部分だけである。この項は重力の作用に基づく波動をあらわす。(37) 式第4項は x に無関係な下向き速度を与えるが之は翼の後流による吹下し速度である。第5項は第4項の水面に関する鏡像をあらわすから逆に上向き速度を与え吹下し速度を減少せしめている。以上より翼面上の吹下し速度は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0}^{x=0} = & \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\eta) d\eta \int_0^{\infty} e^{-zu} \cos u(y-\eta) u du - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\eta) d\eta \int_0^{\infty} e^{-2f u} \cos u(y-\eta) u du \\ & + \frac{\kappa_0^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\eta) d\eta \int_0^{\infty} e^{-2\kappa_0 \sqrt{u^2+1}} \cos\{\kappa_0(y-\eta) u \sqrt{u^2+1}\} (u^2+1)^{3/2} du \quad (38) \end{aligned}$$

吹下し速度を $w_1 + w_2$ と書き (38) の第1項を w_1 第2項及び第3項を w_2 とする。 u に関する積分を実行すれば、

$$w_1 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\eta) \frac{z^2 - (y - \eta)^2}{\{z^2 + (y - \eta)^2\}^2} d\eta \quad (39)$$

次に

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-2\kappa_0 f(u^2+1)} \cos\{\kappa_0 y \sqrt{u^2+1}\} (u^2+1)^{3/2} du &= \frac{1}{8\kappa_0^2} \frac{\partial^2}{\partial f^2} \left\{ e^{-\kappa_0 f} K_0 \left(\frac{\kappa_0}{2} \sqrt{4f^2 + y^2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{8} e^{-\kappa_0 f} \left[\left(1 + \frac{4f^2}{y^2 + 4f^2} \right) K_0 \left(\frac{\kappa_0}{2} \sqrt{y^2 + 4f^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left\{ \frac{2f}{\sqrt{y^2 + 4f^2}} - \frac{1}{\kappa_0 \sqrt{y^2 + 4f^2}} + \frac{2}{\kappa_0} \frac{4f^2}{(y^2 + 4f^2)^{3/2}} \right\} K_1 \left(\frac{\kappa_0}{2} \sqrt{y^2 + 4f^2} \right) \right] \end{aligned}$$

但し K_n は虚変数のベッセル函数をあらわす。従つて、

$$\begin{aligned} K(y) &= -\frac{4f^2 - y^2}{4\pi(4f^2 + y^2)^2} + \frac{\kappa_0^2}{8\pi} e^{-\kappa_0 f} \left[\left(1 + \frac{4f^2}{y^2 + 4f^2} \right) K_0 \left(\frac{\kappa_0}{2} \sqrt{y^2 + 4f^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left\{ \frac{2f}{\sqrt{y^2 + 4f^2}} - \frac{1}{\kappa_0 \sqrt{y^2 + 4f^2}} + \frac{2}{\kappa_0} \frac{4f^2}{(y^2 + 4f^2)^{3/2}} \right\} K_1 \left(\frac{\kappa_0}{2} \sqrt{y^2 + 4f^2} \right) \right] \quad (40) \end{aligned}$$

と置けば、

$$w_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\eta) K(y - \eta) d\eta \quad (41)$$

$K(y)$ は速度の極めて小さい時即ち $\kappa_0 f$ が大なる時は第 2 項が微小となり $-(4f^2 - y^2)/4\pi(4f^2 + y^2)^2$ に近くなるが速度が非常に増大すると κ_0 は零に近くなり極限として $(4f^2 - y^2)/4\pi(4f^2 + y^2)^2$ 即ち符号が逆となる。それ故速度の極めて小なる場合と速度の極めて大なる場合とは水面の作用が反対である。前の場合には水面の影響により翼面上の吹下しは減少するが、後の場合には逆に増加する。

次に翼の受ける抗力は

$$\begin{aligned} R &= \rho \int \Gamma(y) (w_1 + w_2) dy \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\rho}{4\pi} \int_0^{\infty} \{F_r^2(u) + F_i^2(u)\} e^{-zu} u du - \frac{\rho}{4\pi} \int_0^{\infty} \{F_r^2(u) + F_i^2(u)\} e^{-f u} u du \\ &\quad + \frac{\kappa_0^2 \rho}{\pi} \int_0^{\infty} \{G_r^2(u) + G_i^2(u)\} e^{-2\kappa_0 f(u^2+1)} (u^2+1)^{3/2} du \quad (42) \end{aligned}$$

$$\text{但し } F_r(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(y) \cos uy dy \quad F_i(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(y) \sin uy dy$$

$$G_r(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(y) \cos(\kappa_0 y u \sqrt{u^2+1}) dy, G_i(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(y) \sin(\kappa_0 y u \sqrt{u^2+1}) dy$$

(42) 式の第 1 項は翼固有の誘導抵抗をあらわし、第 2 及び第 3 項は水面の影響による抗力の変化を与える。

一例として揚力が楕円分布の場合を考える。

$$\begin{aligned} \Gamma(y) &= \Gamma_{\max} \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \quad -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2} \\ F_r(u) &= \Gamma_{\max} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \cos uy dy = \pi \Gamma_{\max} J_1\left(\frac{bu}{2}\right) / u \\ F_i(u) &= 0 \\ G_r(u) &= \Gamma_{\max} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \cos(\kappa_0 y u \sqrt{u^2+1}) dy = \pi \Gamma_{\max} J_1\left(\frac{b}{2} \kappa_0 u \sqrt{u^2+1}\right) / \kappa_0 u \sqrt{u^2+1} \\ G_i(u) &= 0 \end{aligned}$$

従つて、

$$\begin{aligned} R &= \frac{\pi \rho \Gamma_{\max}^2}{4} \int_0^{\infty} J_1^2\left(\frac{b}{2} u\right) \frac{du}{u} - \frac{\pi \rho \Gamma_{\max}^2}{4} \int_0^{\infty} e^{-2f u} J_1^2(bu) \frac{du}{u} \\ &\quad + \pi \rho \Gamma_{\max}^2 \int_0^{\infty} e^{-2\kappa_0 f(u^2+1)} J_1^2\left(\frac{1}{2} \kappa_0 b u \sqrt{u^2+1}\right) \frac{\sqrt{u^2+1}}{u^2} du \quad (43) \end{aligned}$$

第 1 項は翼固有の誘導抵抗で $1/8 \pi \rho \Gamma_{\max}^2$ となる。

$$\text{次に平均の循環を} \quad \Gamma_m = \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) dy \quad \text{とし} \quad (44)$$

$$r = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) w_2 dy / b \Gamma_m \quad (45)$$

と置く。かくすれば r は (5) 式の q に相当するものとなる。翼に働く揚力に対する水面の作用を考えると先ず第一に水面の作用により翼面上に垂直の吹下しが生じこの為揚力が減少する。吹下し速度の大きさは w_2 で一般に場所によつて異なるのであるが $r \Gamma_m$ を以て平均の大きさと考えた事が出来る。第二に翼の位置に水平の誘導速度が生じて更に揚力が減少するのであるが、その大きさを正確に計算する事は甚しく手数を要するので近似的に二次元の場合と同様であると考え $p \Gamma_m$ とする。但し p は (12) 式で与えられる。次に水面の無い場合翼の平均の循環が前と同様に迎角に比例すると考え、

$$\Gamma_0 = n U d \quad (46)$$

とおく。かくすれば水中翼の揚力は、

$$L = \rho (U - p \Gamma_m) \Gamma_m b$$

水中翼及び無限流体中の翼の揚力係数を C_L , C_0 とすれば (11) 式と同様に、

$$\frac{C_L}{C_0} = \frac{1 + nr}{(1 + nr + \frac{p}{2} C_0)^2} \quad (47)$$

$$\text{又抗揚比は,} \quad \varepsilon = \frac{r C_0}{2(1 + nr)} \quad (48)$$

揚力が楕円分布の時 r の値は次式の如くなる。

$$r = -\frac{1}{b} \int_0^\infty e^{-2ru} J_1^2\left(\frac{b}{2}u\right) \frac{du}{u} + \frac{4}{b} \int_0^\infty e^{-2\kappa_0 f(u^2+1)} J_1^2\left(\frac{1}{2}\kappa_0 b u \sqrt{u^2+1}\right) \frac{\sqrt{u^2+1}}{u^2} du \quad (49)$$

第 10 図

$U/\sqrt{gf}$ の変化に対し r が如何に変化するかは第 10 図に rb の値が一定の f/b について曲線に描いてある。 $U/\sqrt{gf}$ が零に近い所では (49) 式の第 1 項が支配的であつてその為 r の値は負であるが速度の増加と共に急激に上昇し $U/\sqrt{gf}$ が 1 附近で正となり 1.4 附近で極大値に達する。極大の位置は二次元問題に於ける造波抵抗極大の位置とほぼ一致している事は興味がある。速度が更に増加すれば曲線は漸次下降するがこの場合は二次元の場合と異り無限に減少せずそれぞれ一定値に近附く。この値は

$$rb = \int_0^\infty e^{-2ru} J_1^2\left(\frac{b}{2}u\right) \frac{bu}{u} du \quad (50)$$

であり重力の作用が全く加わらない値で図に点線で示してある。

以上の結果よりわかる事は水平の水中翼に対する水面の影響として $U/\sqrt{gf}$ の極めて小なる時は揚力を増加し抗力を減少せしめるので翼の性能は良くなるが $U/\sqrt{gf}$ の増加と共にやがてその作用は逆となり $U/\sqrt{gf}$ が 1 以上では揚力は減少し抗力は増加するので翼の性能は悪化する。第 10 図には更に水面の無い場合に於ける翼の誘導抵抗に対する水面の影響による抵抗増加の割合が示してある。その割合は $f=1/2b$ の時はかなり大きく最大 18% 程度に達するが f が b より大となると 5% を超えなくなる。従つて深度が翼幅より大となれば水中の影響は僅かとなり深度が翼幅の 2 倍以上あれば殆ど無視出来る。

5. 翼の軸が水面に平行でない場合にも同様の議論を行う事が出来るが一般には計算が複雑になる事を免れない。最も簡単な場合として翼が水面に対し直角なる場合を考えよう。

水面にとつた原点の直下に垂直な揚力線を考え、前節と同様翼後流が進行方向に平行な平面上にあるとすれば水面の存在を考慮しない速度ポテンシャルは、

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\xi) \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\xi)^2} \right\} d\xi \quad (51)$$

前節と同様の方法で水面の条件を満足するように速度ポテンシャルを附加すれば結局

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{4-1}{8\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\xi) d\xi \int_{-\pi}^{\pi} \tan \theta d\theta \int_0^{\infty} e^{-\kappa|z-\xi| + i\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\kappa \right. \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\xi) d\xi \int_{-\pi}^{\pi} \tan \theta d\theta \int_0^{\infty} e^{\kappa(z+\xi) + i\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\kappa \\ & - 2\kappa_0 \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\xi) d\xi \int_{-\pi}^{\pi} \sec^3 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{\kappa(z+\xi) + i\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta)}}{\kappa - \kappa_0 \sec^2 \theta + i\mu \sec \theta} d\kappa \\ & \left. - \frac{1}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\xi) d\xi \int_0^{\infty} e^{-u|z-\xi|} \sin uy du + \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\xi) d\xi \int_0^{\infty} e^{u(z+\xi)} \sin uy du \right] \right] \quad (52) \end{aligned}$$

翼の性能に影響を及ぼすのは翼面上の誘導速度であるが揚力線の場所では進行方向の誘導速度は存在しない。従つてこの場合には翼面上の吹下しのみを考えればよい。(52) 式を y で微分し x, y をいずれも零とおけば吹下し速度が求まるが第 1 項及び第 2 項より得られた値は零である。第 3 項は、 $\tan \theta = y/x$ とおいて

$$\Psi + 4\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^3 \theta \sin \theta e^{\kappa_0(z+\xi)} \sec^2 \theta \sin \{ \kappa_0(x \cos \theta + y \sin \theta) \} \sec^2 \theta d\theta$$

となる。しかるに Ψ は $x=0$ に於て零となるので影響するのは第 2 項の部分のみである。かくてこの項から出て来る吹下しの部分は y で微分すれば、

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\kappa_0^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\xi) d\xi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^5 \theta \sin^2 \theta e^{\kappa_0(z+\xi)} \sec^2 \theta \sin \{ \kappa_0(x \cos \theta + y \sin \theta) \} \sec^2 \theta d\theta \\ = \frac{\kappa_0^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\xi) d\xi \int_0^{\infty} e^{\kappa_0(z+\xi)(u^2+1)} u^2 \sqrt{u^2+1} du \end{aligned}$$

従つて翼面上の吹下しは

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{y=0} = & -\frac{1}{4\pi} \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\xi) d\xi \int_0^{\infty} e^{-u|z-\xi|} \cos(uy) u du - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\xi) d\xi \int_0^{\infty} e^{u(z+\xi)} u du \\ & + \frac{\kappa_0^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\xi) d\xi \int_0^{\infty} e^{\kappa_0(z+\xi)(u^2+1)} u^2 \sqrt{u^2+1} du \quad (53) \end{aligned}$$

この式の第 1 項は翼の後流による誘導速度であり、第 2 及び第 3 項は水面の影響を示す。之等夫々 v_1, v_2 と書き u に関する積分を実行すれば

$$\left. \begin{aligned} v_1 = & \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\xi) \frac{(z-\xi)^2 - y^2}{\{(z-\xi)^2 + y^2\}^2} d\xi \\ v_2 = & -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\xi) \frac{d\xi}{(z+\xi)^2} + \frac{\kappa_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\kappa_0(z+\xi)}}{z+\xi} K_1 \left\{ \frac{\kappa_0}{2} (z+\xi) \right\} d\xi \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

翼の速度が極めて大なる時は κ_0 が零に近附くが $\kappa_0 \rightarrow 0$ なる極限では

$$v_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\xi) \frac{d\xi}{(z+\xi)^2} \quad (55)$$

となる。

翼の抗力は

$$R = \rho \int_{-\infty}^0 \Gamma(z) (v_1 + v_2) dz$$

であるが之は翼固有の誘導抵抗と水面の影響による抵抗とに分けられる。水面の影響によるものは

$$R_2 = \rho \int_{-\infty}^0 \Gamma(z) v_2 dz \\ = -\frac{\rho}{4\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^0 \Gamma(z) e^{uz} dz \right\}^2 u du + \frac{\rho \kappa_0^2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^0 \Gamma(z) e^{\kappa_0 z (u^2+1)} dz \right\}^2 u^2 \sqrt{u^2+1} du \quad (56)$$

である。一例として循環が楕円分布の場合を考え翼の中央が水面下 f なる深さにあるとすれば、

$$\Gamma(z) = \Gamma_{\max} \sqrt{1 - \frac{4}{b^2} (z+f)^2} \quad -f - \frac{b}{2} < z < -f + \frac{b}{2} \\ \int_{-f-\frac{b}{2}}^{-f+\frac{b}{2}} \sqrt{1 - \frac{4}{b^2} (z+f)^2} e^{uz} dz = \pi e^{-uf} I_1\left(\frac{b}{2}u\right) / u \\ \int_{-f-\frac{b}{2}}^{-f+\frac{b}{2}} \sqrt{1 - \frac{4}{b^2} (z+f)^2} e^{\kappa_0 z (u^2+1)} dz = \pi e^{-\kappa_0 f (u^2+1)} I_1\left\{\frac{b\kappa_0}{2}(u^2+1)\right\} / \kappa_0 (u^2+1)$$

但し I は虚変数のベッセル函数である。従つて

$$R_2 = -\frac{\pi \rho \Gamma_{\max}^2}{4} \int_0^{\infty} I_1^2\left(\frac{b}{2}u\right) e^{-2fu} \frac{du}{u} + \pi \rho \Gamma_{\max}^2 \int_0^{\infty} I_1^2\left\{\frac{b\kappa_0}{2}(u^2+1)\right\} e^{-2\kappa_0 f (u^2+1)} \frac{u^2 du}{(u^2+1)^{3/2}} \quad (57)$$

次に揚力は $L = \rho U \int \Gamma(z) dz = \frac{\pi}{4} \rho b U \Gamma_{\max}$

従つて抗揚比は

$$\varepsilon_2 = -\frac{4L}{\pi \rho U^2 b^2} \int_0^{\infty} I_1^2\left(\frac{b}{2}u\right) e^{-2fu} \frac{du}{u} + \frac{16L}{\pi \rho U^2 b^2} \int_0^{\infty} I_1^2\left\{\frac{b\kappa_0}{2}(u^2+1)\right\} e^{-2\kappa_0 f (u^2+1)} \frac{u^2 du}{(u^2+1)^{3/2}} \quad (58)$$

前節 (44) 式によつて平均の循環を Γ_m とし

$$s = \int_{-f-\frac{b}{2}}^{-f+\frac{b}{2}} \Gamma(z) v_2 dz / b \Gamma_m^2 \quad (59)$$

と置けば之は q 或は r と同様の意味を持つものとなる。楕円分布のときは、

$$s = -\frac{1}{b} \int_0^{\infty} e^{-2fu} I_1^2\left(\frac{b}{2}u\right) \frac{du}{u} + \frac{4}{b} \int_0^{\infty} e^{-2\kappa_0 f (u^2+1)} I_1^2\left\{\frac{1}{2}\kappa_0 b (u^2+1)\right\} \frac{u^2}{(u^2+1)^{3/2}} du \quad (60)$$

かくするときは水中翼の揚力係数と無限流体中の揚力係数との比は、

$$\frac{C_L}{C_0} = \frac{1}{1+ns} \quad (61)$$

又抗揚比は

$$\varepsilon_2 = \frac{s/C_0}{2(1+ns)} \quad (62)$$

$U/\sqrt{gf}$ の変化に対し rb の値が一定の f/b について第 11 図に曲線に描いてある。 $U/\sqrt{gf}$ が零に近い時は負であり $U/\sqrt{gf}$ の増加と共に急激に上昇してやがて一定値に漸近する事は前節の r と同様であるが r と異り途中に極大値を有す事がなく常に重力の加わらない値より小さい事が特徴である。従つて抗力は速度の上昇と共に一様に増加しやがて図に点線で示してあるような極限値に近附く。図には又、水面の無い場合に於ける翼の誘導抵抗に対する抵抗増加の割合が示してある。 $f=1/2b$ の時即ち翼の先端が水面に達するような時は水面の影響はかなり顕著で 27% に達するが之より深度が増加すると影響は急激に少くなり翼の中心迄の深さが翼幅に等しい時には 3% 程度で殆ど問題にならない値である。従つて之以上深く沈めれば水面の影響を無視しても差支えない。螺旋推進器の実験では推進器軸の深度を推進直径より大に行えば水面の影響は殆ど無いと考えて良い事がわかる。

6. 以上考察した所は水面下一定の深度を一樣な速度を以て進行する翼の揚力及び抗力に対して水面の存在がいかなる影響を与えるかという問題である。理論的計算は翼が水面に平行なる場合と直角なる場合とについて行

第 11 図

つたが、いずれの場合も翼面荷重が小さく、且水面の攪乱があまり大きくないという仮定が置かれてある。翼面荷重が大きくなると翼の後流が平面と考えられなくなり以上の結果とは若干異つて来る事が考えられる。更に翼が水面に極めて接近すると空気吸込みにより空洞現象を生じ連続な流れでなくなる。又翼の進行速度が極めて大となつてもやはり空洞現象を生じここに取扱つたような理論は成立しなくなる。しかし今回は空洞現象は全く考慮しなかつた。従つてここに出た結論は空洞現象の全く発生しない状態に対してのみ適用出来るものである。計算結果を要約すれば水中翼はその揚力抗力共に水面の影響を受けるが之は深度の増加と共に急激に減少する。進行速度の極めて小さい時は水面の影響により揚力はかえつて増加するが中以上の速度では反対に揚力は減少し抗力が増加する。進行速度のかなり大きい所について見ると水面に平行な翼では深度が翼幅以上あれば水面の影響は殆ど無視し得る程度となり又水面に直角な翼では翼の中心迄の深度が翼幅以上ならば無視出来る。深度が之より浅いと水面の影響は無視出来なくなる。

[文 献]

1. Weinig : "Zur Theorie des Unterwassertragflügels und der Gleitfläche"
Lufo. 14 (1937) p.314
2. Havelock : "The lift and moment on a flat plate in a stream of finite width"
Proc. Roy. Soc. London 166 (1938) p. 178
3. 友 近 晋 : 「水上飛行機の揚力に及ぼす海の表面の影響」
今 井 功
航研報告 第 12 巻 (1937) P. 69
4. Dickmann : "Schiffskörpersog, Wellenwiderstand eines Propellers und Wechselwirkung mit Schiffswellen" Ing. Arch. (1938) P. 452