防撓矩形板の自由振動に就いて

正員 工学士 樋口 道之助

Abstract

“On the Free Vibration of Reinforced Rectangular Plate with elastically built-in edges”

By Michinosuke Higuchi, *Kogakushi, Member*

As regards the free vibration of rectangular plate, stiffened by beams, with elastically built-in edges, we can refer strain energy method by Mr. Okuda and Arima⁽¹⁾, and slope-deflexion method by Mr. Suhara⁽²⁾. The author, in this paper, presents theoretical treatise in which he expressed the reacting forces and moments of the stiffeners or boundaries by the impulsive function of 0-th or 1st order, and obtained the characteristic solution and the value of homogeneous partial differential equation of the rectangular plate, under the conditions that the two opposite edges of the plate are simply supported and the other two oppositesides elastically built-in, which are parallel with the stiffeners. And he showed some numerical examples of them.

Foot Notes :

- 1) Katumi Okuda and Takasi Arima : “Strength and Frequency of Natural Vibration of Rectangular Plate with Longitudinal Stiffeners”, Jour. Soc. Nav. Arch., 58(1936), p. 59-78, & 95 (1936), p. 163-178.
- 2) Jiro Suhara : “On the Stiffening Effect of the Parallel Bar-Stiffener against the Free and Forced Vibration of Plane Plates.”

I. 緒 論

防撓矩形板の振動に関しては古くは、奥田克己・有馬 孝阿氏⁽¹⁾の歪エネルギー法に依る方法があり、近くは、栖原二郎氏⁽²⁾の撓角撓度法に依る方法がある。又周辺弾性固定矩形板の振動に関しては、同じく奥田克己・有馬 孝阿氏の歪エネルギー法に依る方法がある。著者は相対する二辺が支持で他の二辺が任意の弾性固定状態にある矩形板に支持の辺に直角に任意数の平行な防撓材が附せられている場合に就いて、衝撃函数を用いて一般的な理論を構成し、次いで上記の状態矩形板に一本の防撓材が板の中央に附せられている時の振動及び防撓材の附せられていない場合に就いて、二辺が支持で他の二辺が任意の弾性固定状態にある時の振動に就いて実際計算を行つた。

II. 一 般 理 論

矩形板と防撓材との間には、横方向荷重及び捩モーメントが相互作用するものとし、第1図の如く N 本の防撓材が配列されているものとする。図に於て $x=0$ 及び $x=a$ の辺を弾性固定とし、 $y=0$ 及び $y=b$ の辺を支持とする。

- 記 号
- w : 板の撓
 - h : 板の厚
 - ρ : 板の密度
 - ρ_i : i 番目の防撓材の密度
 - A_i : i 番目の防撓材の断面積
 - E_i : i 番目の防撓材のヤング係数

第 1 図

I_i : i 番目の防撓材の横方向軸に関する断面二次モーメント

G_i : i 番目の防撓材の剪断弾性係数

K_i : i 番目の防撓材の捩りの断面係数

J_i : i 番目の防撓材の断面二次極モーメント

D : 板の剛性

c_0' : $x=0$ の辺に於ける弾性固定常数

c_a' : $x=a$ の辺に於ける弾性固定常数

$\delta(x-x_i)$: $x=x_i$ を極とする Dirac の第 0 位の衝撃函数

$\delta^1(x-x_i)$: $x=x_i$ を極とする Dirac の第 1 位の衝撃函数

今此の防撓弾性固定矩形板が自由振動している場合を考えるに、先ず矩形板のみの部分を考え、之に防撓材及び周辺から外力が作用しているものと見做す。夫等の外力を $P(x, y, t)$ で表わすと、

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P(x, y, t)$$

次に $P(x, y, t)$ を構成するものを一つづつ考えて見る。

$$\text{防撓材の撓み剛性に基づく反力 : } -E_i I_i \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_{y=x_i} \delta(x-x_i)$$

$$\text{防撓材の横方向慣性力に基づく反力 : } -\rho_i A_i \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)_{y=x_i} \delta(x-x_i)$$

$$\text{防撓材の捩り剛性に基づく反力 : } -G_i K_i \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{y=x_i} \delta^1(x-x_i)$$

$$\text{防撓材の捩り慣性モーメントに基づく反力 : } \rho_i J_i \left(\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \right)_{y=x_i} \delta^1(x-x_i)$$

$$x=0 \text{ の辺の弾性固定に基づく反力 : } -c_0' \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=0} \delta^1(x=0)$$

$$x=a \text{ の辺の弾性固定に基づく反力 : } -c_a' \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} \delta^1(x-a)$$

以上の外力を総合すれば $P(x, y, t)$ となる。依つて此の防撓弾性固定矩形板の自由振動微分方程式は下記の如くなる。

$$\begin{aligned} D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = & -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_0' \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=0} \delta^1(x=0) + c_a' \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} \delta^1(x-a) \\ & - \sum_i \left\{ E_i J_i \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho_i A_i \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\}_{y=x_i} \delta(x-x_i) \\ & + \sum_i \left\{ G_i K_i \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \rho_i J_i \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \right\}_{y=x_i} \delta^1(x-x_i) \end{aligned} \quad (1)$$

今, $\frac{2\rho_i A_i}{a\rho h} = \beta_i$, $\frac{2\rho_i J_i}{a\rho h} = k_i$ とし, 又 $\frac{2c_0'}{a\rho h} = c_0$, $\frac{2c_a'}{a\rho h} = c_a$ とする。

$$w = \cos Pt \sum_m a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \text{とおくと,}$$

(1) なる微分方程式は次の如き a_{mn} に関する無限行列方程式となる。

$$\begin{aligned} a_{mn} = & -\frac{1}{P^2 - P_{mn}^2} \left[\sum_i \beta_i (P^2 - P_{Ln}^2) \sin \frac{m\pi x_i}{a} \sum_q a_{qn} \sin \frac{q\pi x_i}{a} \right. \\ & + \sum_i k_i (P^2 - P_{Tn}^2) \left(\frac{m\pi}{a} \right) \cos \frac{m\pi x_i}{a} \sum_r a_{rn} \cos \frac{r\pi x_i}{a} \left(\frac{r\pi}{a} \right) \\ & \left. - c_0 \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sum_s a_{sn} \left(\frac{s\pi}{a} \right) - c_a (-1)^n \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sum_t a_{tn} (-1)^t \left(\frac{t\pi}{a} \right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

但し

$$P_{mn}^2 = \frac{D}{\rho h} \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2, \quad P_{Ln}^2 = \frac{E_i I_i}{\rho_i A_i} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4, \quad P_{Tn}^2 = \frac{G_i K_i}{\rho_i J_i} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2$$

[但し此処では t は時間を表わしているのではない。]

此処で P_{mn} , P_{lni} , P_{Tni} は夫々板の横振動, i 番目の防撓材の横振動, i 番目の防撓材の振振動の振動率を表わす。(2) 式は a_{mn} に関する齊次無限行列方程式であつて, 齊次の第 2 種 Fredholm 型の積分方程式に対応するものである。此の種の方程式は当然可付番個の固有解を有するが, (2) の場合には解析的に夫等を求めることが出来る。即ち (2) の如き式は一般的に次の (3) の如く書き表わす事が出来る。

$$U(m) = \sum_{\mu} \sum_q \Gamma_{\mu}(m, P) K_{\mu}(q) U(q) \quad (3)$$

但し此処で μ は有限和, q は無限和をとるものとする。 [$\mu=1, 2, \dots, 2N+2$]

今, (3) の両辺に $K_{\nu}(m)$ を掛けて m に就き無限和をとれば,

$$\begin{aligned} \sum_m U(m) K_{\nu}(m) &= \sum_{\mu} \sum_q \sum_m \Gamma_{\mu}(m, P) K_{\mu}(q) U(q) K_{\nu}(m) \\ \sum_q K_{\mu}(q) U(q) &= V_{\mu} \text{ とおくと,} \\ V_{\nu} &= \sum_{\mu} \sum_s \Gamma_{\mu}(s, P) V_{\mu} K_{\nu}(s) \\ \therefore \sum_{\mu} (\delta_{\mu\nu} - \sum_s \Gamma_{\mu}(s, P) K_{\nu}(s)) V_{\mu} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

今 $V_{\mu} \neq 0$ とすると上式が解を有する為には,

$$|\delta_{\mu\nu} - \sum_s \Gamma_{\mu}(s, P) K_{\nu}(s)| = 0 \quad (5)$$

但し $\delta_{\mu\nu}$ は Kronecker の記号である。

(5) なる $2N+2$ 次数の行列式 $= 0$ なる方程式を解くことにより P の固有値を決定することが出来る。 $V_{\mu} = 0$ の時には即ち V_{μ} の中に 0 なるものがあるれば, それを除いた部分についてやはり (4) が成立し, P を決定することが出来る。全部の V_{μ} が 0 なる時は防撓矩形板は実は板のみの振動と同じ P を有するのである。 V_{μ} が悉く 0 であれば, 夫等は全く板のみの振動と同じくなる。

次に之等の P 固有値に対応する規準振動を求める。今簡単の為悉く $V_{\mu} \neq 0$ とし, 或る一つの V_{μ} 即ち $V_{\omega} = C$ と置き (4) なる $2N+2$ 本の方程式の中一本を捨て, $2N+1$ 本の方程式より成る連立方程式を解き, 之を (3) に代入すれば, $U(m)_{\omega} = \sum_{\mu} \Gamma_{\mu}(m, P_{\omega}) V_{\mu}$

依つて求める規準振動は, $F_{\omega} = \sum_m U(m)_{\omega} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos P_{\omega} t$

又防撓材の横振動は $(F_{\omega})_{x=xi}$, 防撓材の捩れ振動は $\left(\frac{\partial F_{\omega}}{\partial x}\right)_{x=xi}$ として表わされる。

III. 相対する二辺が支持て, 他の二辺が任意の弾性固定状態にある矩形板に支持の辺に直角に一本の防撓材が板の中央に附せられている場合

1) $c_a = 0$, $c_2 \neq 0$ の時

P を決定すべき方程式は,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta_1(P^2 - P_{Ln}^2)} + \sum_{\alpha} \frac{1}{P^2 - P_{\alpha n}^2} \quad 0 \quad \sum_{\alpha} \frac{\left(\frac{\alpha\pi}{a}\right)(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{P^2 - P_{\alpha n}^2} \\ & 0 \quad \frac{1}{k_1(P^2 - P_{Tn}^2)} + \sum_{\beta} \frac{\left(\frac{\beta\pi}{a}\right)^2}{P^2 - P_{\beta n}^2} \quad \sum_{\beta} \frac{\left(\frac{\beta\pi}{a}\right)^2(-1)^{\frac{\beta}{2}}}{P^2 - P_{\beta n}^2} = 0 \quad (6) \\ & \sum_{\alpha} \frac{\left(\frac{\alpha\pi}{a}\right)(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{P^2 - P_{\alpha n}^2} \quad \sum_{\beta} \frac{\left(\frac{\beta\pi}{a}\right)^2(-1)^{\frac{\beta}{2}}}{P^2 - P_{\beta n}^2} \quad - \frac{1}{c_2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} + \sum_s \frac{\left(\frac{s\pi}{a}\right)^2}{P^2 - P_{sn}^2} \end{aligned}$$

但し此処で, α, β, s は夫々奇数項, 偶数項, 全項について和を取るものとする。

(6) 式より得られる P の固有値 $P_{\lambda n}$ に対応する規準振動は次式で表わされる。

$$w = \sum_m \frac{1}{P_{\lambda n}^2 - P_{m n}^2} \left[\frac{\sum_{\alpha} \left(\frac{\alpha \pi}{a} \right) (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{P_{\lambda n}^2 - P_{\alpha n}^2}{\beta_1 (P_{\lambda n}^2 - P_{T n}^2) + \sum_{\alpha} \frac{1}{P_{\lambda n}^2 - P_{\alpha n}^2}} \sin \frac{m \pi}{2} + \frac{\sum_{\beta} \left(\frac{\beta \pi}{a} \right) (-1)^{\frac{\beta}{2}} \frac{P_{\lambda n}^2 - P_{\beta n}^2}{k_1 (P_{\lambda n}^2 - P_{T n}^2) + \sum_{\beta} \frac{1}{P_{\lambda n}^2 - P_{\beta n}^2}} \left(\frac{m \pi}{2} \right) \cos \frac{m \pi}{2} \right. \\ \left. - \left\{ \frac{1}{c_0 \left(\frac{n \pi}{b} \right)^2} - \sum_s \frac{\left(\frac{s \pi}{a} \right)^2}{P_{\lambda n}^2 - P_{s n}^2} \right\} \left(\frac{m \pi}{a} \right) \right] \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \cos P_{\lambda n} t \quad (7)$$

今特に $c_0 \rightarrow \infty$ とすれば, $x=0$ の辺固定, $x=a$ の辺支持の場合が得られる。

其の時 (6) は,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\beta_1 (P^2 - P_{L n}^2)} + \sum_{\alpha} \frac{1}{P^2 - P_{\alpha n}^2} & 0 & \sum_{\alpha} \frac{\left(\frac{\alpha \pi}{a} \right) (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{P^2 - P_{\alpha n}^2} \\ 0 & \frac{1}{k_1 (P^2 - P_{T n}^2)} + \sum_{\beta} \frac{\left(\frac{\beta \pi}{a} \right)^2}{P^2 - P_{\beta n}^2} & \sum_{\beta} \frac{\left(\frac{\beta \pi}{a} \right)^2 (-1)^{\frac{\beta}{2}}}{P^2 - P_{\beta n}^2} \\ \sum_{\alpha} \frac{\left(\frac{\alpha \pi}{a} \right) (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{P^2 - P_{\alpha n}^2} & \sum_{\beta} \frac{\left(\frac{\beta \pi}{a} \right)^2 (-1)^{\frac{\beta}{2}}}{P^2 - P_{\beta n}^2} & \sum_s \frac{\left(\frac{s \pi}{a} \right)^2}{P^2 - P_{s n}^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (6)'$$

(6)' は対応する規準振動は

$$w = \sum_m \frac{1}{P_{\lambda n}^2 - P_{m n}^2} \left[\frac{\sum_{\alpha} \left(\frac{\alpha \pi}{a} \right) (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{P_{\lambda n}^2 - P_{\alpha n}^2}{\beta_1 (P_{\lambda n}^2 - P_{L n}^2) + \sum_{\alpha} \frac{1}{P_{\lambda n}^2 - P_{\alpha n}^2}} \sin \frac{m \pi}{2} + \frac{\sum_{\beta} \left(\frac{\beta \pi}{a} \right)^2 (-1)^{\frac{\beta}{2}} \frac{P_{\lambda n}^2 - P_{\beta n}^2}{k_1 (P_{\lambda n}^2 - P_{T n}^2) + \sum_{\beta} \frac{1}{P_{\lambda n}^2 - P_{\beta n}^2}} \left(\frac{m \pi}{2} \right) \cos \frac{m \pi}{2} \right. \\ \left. \times \left(\frac{m \pi}{a} \right) \cos \frac{m \pi}{2} + \left(\frac{m \pi}{a} \right) \sum_s \frac{\left(\frac{s \pi}{a} \right)^2}{P_{\lambda n}^2 - P_{s n}^2} \right] \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \cos P_{\lambda n} t \quad (7)''$$

2) $c_0=0$, $c_a=0$ の時

此の場合には全周辺支持である。

P を決定すべき方程式は,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\beta_1 (P^2 - P_{L n}^2)} + \sum_{\alpha} \frac{1}{P^2 - P_{\alpha n}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_1 (P^2 - P_{T n}^2)} + \sum_{\beta} \frac{\left(\frac{\beta \pi}{a} \right)^2}{P^2 - P_{\beta n}^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

即ち $\frac{1}{\beta_1 (P^2 - P_{L n}^2)} + \sum_{\alpha} \frac{1}{P^2 - P_{\alpha n}^2} = 0$ とすれば,

$$P^2 = \frac{D \pi^4}{\rho h a^4} P'^2 \quad \text{とおくことにより,}$$

$$\frac{1}{P'^2 \beta_1 - \gamma_1 \lambda^4 n^4} + \sum_{\alpha} \frac{1}{P'^2 + (\alpha^2 + \lambda^2 n^2)^2} = 0 \quad (9)$$

但し此処で

$$\lambda = \frac{a}{b}, \quad \gamma = \frac{2 E_1 I_1}{D a}, \quad \beta_1 = \frac{2 A \rho_1}{a h \rho}, \quad P' = \sqrt{\frac{P h}{D}} \frac{a^2}{\pi^2} P$$

(9) に対応する規準振動は、

$$w = \sum_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{P_{\lambda n}^2 - P_{mn}^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos P_{\lambda n} t \quad (10)$$

(m は奇数)

又

$$\frac{1}{k_1(P^2 - P_{\tau n}^2)} + \sum_{\beta} \frac{\left(\frac{\beta\pi}{a}\right)^2}{P^2 - P_{\beta n}^2} = 0$$

今此処で $k' = \frac{2\rho_1 f_1 \pi^2}{\rho h a^3}$, $P^2 = \frac{D\pi^4}{\rho h a^4} P'^2$, $\theta = \frac{2GK}{Da}$ と置くと

$$\frac{1}{k' P'^2 - \theta \lambda^2 n^2} + \sum_{\beta} \frac{\beta^2}{P'^2 - (\beta^2 + \lambda^2 n^2)^2} = 0 \quad (11)$$

(11) に対応する規準振動は

$$w = \sum_m \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)(-1)^{\frac{m}{2}}}{P_{\lambda n}^2 - P_{mn}^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos P_{\lambda n} t \quad (12)$$

(m は偶数)

3) $c_0 = c_a$ の時

$c_0 = c_a = c$ とし、次の二つの P を決定すべき方程式が得られる。

$$\left\{ \frac{1}{\beta_1(P^2 - P_{\lambda n}^2)} + \sum_{\alpha} \frac{1}{P^2 - P_{\alpha n}^2} \right\} \left\{ \frac{-1}{2c\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} + \sum_{\alpha} \frac{\left(\frac{\alpha\pi}{a}\right)^2}{P^2 - P_{\alpha n}^2} \right\} = \left\{ \sum_{\alpha} \frac{\left(\frac{\alpha\pi}{a}\right)(-1)^{\frac{\alpha-2}{2}}}{(P^2 - P_{\alpha n}^2)^2} \right\}^2 \quad (13)$$

及び

$$\left\{ \frac{1}{k_1(P^2 - P_{\tau n}^2)} + \sum_{\beta} \frac{\left(\frac{\beta\pi}{a}\right)^2}{P^2 - P_{\beta n}^2} \right\} \left\{ \frac{-1}{2c\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} + \sum_{\beta} \frac{\left(\frac{\beta\pi}{a}\right)^2}{P^2 - P_{\beta n}^2} \right\} = \left\{ \sum_{\beta} \frac{\left(\frac{\beta\pi}{a}\right)(-1)^{\frac{\beta}{2}}}{(P^2 - P_{\beta n}^2)^2} \right\}^2 \quad (14)$$

(13), (14) に対応する規準振動は夫々次の形で表わされる。

$$w = \sum_m \frac{1}{P_{\lambda n}^2 - P_{mn}^2} \left[(-1)^{\frac{m-1}{2}} \left\{ \frac{-1}{2c\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} + \sum_{\alpha} \frac{\left(\frac{\alpha\pi}{a}\right)^2}{P_{\lambda n}^2 - P_{\alpha n}^2} \right\} - \left(\frac{m\pi}{a}\right) \sum_{\alpha} \frac{\left(\frac{\alpha\pi}{a}\right)(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{P_{\lambda n}^2 - P_{\alpha n}^2} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos P_{\lambda n} t \quad (15)$$

(m は奇数)

$$w = \sum_m \frac{1}{P_{\lambda n}^2 - P_{mn}^2} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)(-1)^{\frac{m}{2}} \left\{ \frac{-1}{2c\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} + \sum_{\alpha} \frac{\left(\frac{\alpha\pi}{a}\right)^2}{P_{\lambda n}^2 - P_{\alpha n}^2} \right\} - \left(\frac{m\pi}{a}\right) \sum_{\beta} \frac{\left(\frac{\beta\pi}{a}\right)(-1)^{\frac{\beta}{2}}}{P_{\lambda n}^2 - P_{\beta n}^2} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos P_{\lambda n} t \quad (16)$$

(m は偶数)

此の場合特に $c \rightarrow \infty$ とすれば、相対する弾性固定辺は完全固定辺となる。その場合 (13), (14) は次の如くなる。

$$\frac{1}{P'^2 \beta_1 - \gamma \lambda^4 n^4} + \sum_{\alpha} \frac{1}{P'^2 - (\alpha^2 + \lambda^2 n^2)^2} = \frac{\left\{ \sum_{\alpha} \frac{\alpha(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{P'^2 - (\alpha^2 + \lambda^2 n^2)^2} \right\}^2}{\sum_{\alpha} \frac{\alpha^2}{P'^2 - (\alpha^2 + \lambda^2 n^2)^2}} \quad (13)'$$

及び

$$k'P'^2 - \theta\lambda^2 n^2 + \sum_{\beta} \frac{\beta^2}{P'^2 - (\beta^2 + \lambda^2 n^2)^2} \frac{\left\{ \sum_{\beta} \frac{\beta^2 (-1)^{\beta/2}}{P'^2 - (\beta^2 + \lambda^2 n^2)^2} \right\}^2}{\sum_{\beta} \frac{\beta^2}{P'^2 - (\beta^2 + \lambda^2 n^2)^2}} \quad (14)'$$

次に (13)', (14)' に対応する規準振動は,

$$w = \sum_m \frac{1}{P_{\lambda n}^2 - P_{mn}^2} \left[(-1)^{\frac{m+1}{2}} \sum_{\alpha} \frac{\left(\frac{\alpha\pi}{a}\right)^2}{P_{\lambda n}^2 - P_{\alpha n}^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right) \sum_{\alpha} \frac{\left(\frac{\alpha\pi}{a}\right) (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{P_{\lambda n}^2 - P_{\alpha n}^2} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos P_{\lambda n} t \quad (15)'$$

(m は奇数)

$$w = \sum_m \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)}{P_{\lambda n}^2 - P_{mn}^2} \left[(-1)^{\frac{m}{2}} \sum_{\beta} \frac{\left(\frac{\beta\pi}{a}\right)^2}{P_{\lambda n}^2 - P_{\beta n}^2} - \sum_{\beta} \frac{\left(\frac{\beta\pi}{a}\right)^2 (-1)^{\frac{\beta}{2}}}{P_{\lambda n}^2 - P_{\beta n}^2} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos P_{\lambda n} t \quad (16)'$$

IV. 相対する二辺が支持で、他の二辺が任意の 弾性固定状態にある矩形板の振動

P を決定すべき方程式は,

$$\left| \begin{array}{cc} -\frac{1}{c_0 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} + \sum_s \frac{\left(\frac{s\pi}{a}\right)^2}{P^2 - P_{sn}^2} & \sum_s \frac{\left(\frac{s\pi}{a}\right)^2 (-1)^s}{P^2 - P_{sn}^2} \\ \sum_s \frac{\left(\frac{s\pi}{a}\right)^2 (-1)^s}{P^2 - P_{sn}^2} & -\frac{1}{c_0 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} + \sum_s \frac{\left(\frac{s\pi}{a}\right)^2}{P^2 - P_{sn}^2} \end{array} \right| = 0$$

$$\therefore \left\{ \frac{-1}{c_0 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} + \sum_s \frac{\left(\frac{s\pi}{a}\right)^2}{P^2 - P_{sn}^2} \right\} \left\{ \frac{-1}{c_a \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} + \sum_s \frac{\left(\frac{s\pi}{a}\right)^2 (-1)^s}{P^2 - P_{sn}^2} \right\} = \left\{ \sum_s \frac{\left(\frac{s\pi}{a}\right)^2 (-1)^s}{P^2 - P_{sn}^2} \right\}^2 \quad (17)$$

(17) 式に対応する規準振動は,

$$w = \sum_m \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)}{P_{\lambda n}^2 - P_{mn}^2} \left[\sum_s \frac{\left(\frac{s\pi}{a}\right)^2 (-1)^s}{P^2 - P_{sn}^2} - (-1)^m \left\{ \frac{-1}{c_0 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} + \sum_s \frac{\left(\frac{s\pi}{a}\right)^2}{P^2 - P_{sn}^2} \right\} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos P_{\lambda n} t \quad (18)$$

次に特別な場合を考えて見る。

i) $c_a=0$ の時

P を決定すべき方程式は,

$$\sum_s \frac{\left(\frac{s\pi}{a}\right)^2}{P^2 - P_{sn}^2} = \frac{1}{c_0 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (19)$$

(19) 式に対応する規準振動は,

$$w = \sum_m \frac{m\pi}{P_{\lambda n}^2 - P_{mn}^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos P_{\lambda n} t \quad (20)$$

更に $c_0 \rightarrow \infty$ とすれば, $x=0$ の辺は完全固定辺となる。其の時, P を決定すべき方程式は,

$$\sum_s \frac{\left(\frac{s\pi}{a}\right)^2}{P^2 - P_{sn}^2} = 0 \quad (19)'$$

(19)' 式に対応する規準振動は、やはり (20) 式で表わされる。

ii) $c_0 = c_a = c$ の時

P を決定すべき方程式は、

$$\sum_{\alpha} \frac{\left(\frac{\alpha\pi}{a}\right)^2}{P^2 - P_{\alpha n}^2} = \frac{1}{2c\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (21)$$

及び

$$\sum_{\beta} \frac{\left(\frac{\beta\pi}{a}\right)^2}{P^2 - P_{\beta n}^2} = \frac{1}{2c\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (22)$$

此の場合の規準振動は (21), (22) に夫々対応して次の (23), (24) 式が得られる。

$$w = \sum_m \frac{\frac{m\pi}{a}}{P_{\lambda n}^2 - P_{mn}^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos P_{\lambda n} t \quad (23)$$

(m は奇数)

同じく

$$w = \sum_m \frac{\frac{m\pi}{a}}{P_{\lambda n}^2 - P_{mn}^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos P_{\lambda n} t \quad (24)$$

(m は偶数)

更に $c \rightarrow \infty$ とすれば、 $x=0$ 及び $x=a$ の辺完全固定の場合となり、

(21), (22)' 式は夫々次の (21)', (22)' 式となる。

$$\sum_{\alpha} \frac{\left(\frac{\alpha\pi}{a}\right)^2}{P^2 - P_{\alpha n}^2} = 0 \quad (21)'$$

$$\sum_{\beta} \frac{\left(\frac{\beta\pi}{a}\right)^2}{P^2 - P_{\beta n}^2} = 0 \quad (22)'$$

但し α, β は夫々奇数及び偶数とする。

(21)', (22) に対応する規準振動は同じく (23), (24) 式で表わされる。

V. 実 際 計 算 例

先ず III の (3) 示した $c_0 = c_a$ の時について実際計算法を以下に述べて見よう。

前々節に定義した如く

$$\beta_1 = \frac{2\rho_1 A_1}{a\rho h}, \quad k' = \frac{2\rho_1 J_1 \pi^2}{a^3 \rho h} \quad \text{又} \quad \bar{c} = \frac{2c'}{Da}, \quad P' = \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \frac{a^2}{\pi^2} P$$

$$\gamma_1 = \frac{2E_1 I_1}{Da}, \quad \theta_1 = \frac{2G_1 K_1}{Da}$$

なる定義を使用すれば、(13), (14) 式は各次式の如くなる。

$$\frac{1}{\beta_1 P'^2 - \gamma_1 \lambda^4 n^4} = \frac{\left\{ \sum_{\alpha} \frac{a(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{P'^2 - (\alpha^2 + \lambda^2 n^2)^2} \right\}^2}{- \frac{1}{2c\lambda^2 n^2} + \sum_{\alpha} \frac{1}{P'^2 - (\alpha^2 + \lambda^2 n^2)^2}} - \sum_{\alpha} \frac{1}{P'^2 - (\alpha^2 + \lambda^2 n^2)^2} \quad (25)$$

但し α は奇数を取る。

(25) 式を満足する P' を求め之より P を出せば奇数次の振動数が得られる。

同様に、

$$\frac{1}{k'P'^2 - \theta_1 \lambda^2 n^2} = \frac{\left\{ \sum_{\beta} \frac{\beta^2 (-1)^{\beta/2}}{P'^2 - (\beta^2 - \lambda^2 n^2)^2} \right\}^2}{\sum_{\beta} \frac{\beta^2}{P'^2 - (\beta^2 + \lambda^2 n^2)^2} - \frac{1}{2c\lambda^2 n^2}} \quad (26)$$

但し β は偶数を取る。

(26) 式を満足する P' を求め之より P を出せば、偶数次の振動数が得られる。

奇数次の振動数を求める式 (25) の右辺を構成する $\sum_{\alpha} \frac{\alpha^2}{P'^2 - (\alpha^2 + \lambda^2 n^2)^2}$, $\sum_{\alpha} \frac{1}{P'^2 - (\alpha^2 + \lambda^2 n^2)^2}$, $\sum_{\alpha} \frac{\alpha(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{P'^2 - (\alpha^2 + \lambda^2 n^2)^2}$ を以下に図示してある。之等から (25) の右辺を求めその曲線と $\frac{1}{\beta_1 P'^2 - \gamma_1 \lambda^4 n^4}$ なる双曲線との交点より P'^2 を求めることが出来る。

特別の場合の $P'^2 = \frac{\rho h a^2}{D \pi^2} P^2$ の最小値

a/b	1/2	1	1 1/2	2	3	4
$x=0$ の辺が固定 他の凡ての辺が単純支持	3.122	5.740	12.667	27.409	103.233	293.063
$x=0, x=a$ の辺が固定 他の凡ての辺が単純支持	—	* 8.591	—	** 30.773	107.264	297.859

* 加藤氏の値 (会報 50 号) : 8.57

妹沢氏の値 (振動学) : 8.66

** 加藤氏の値 (会報 50 号) : 30.76

第 2 図

文 献

- 1) 奥田克己・有馬 孝氏：“縦横に防撓材を有する矩形薄板の強さ及び固有振動数” 造船協会々報 58, 59 号
- 2) 栖原二郎氏：“平面板の自由振動に及ぼす防撓材の影響に就いて” 造船協会々報 78 号

第 3 図

第 4 図

第 5 図