有孔板の弾塑性応力場の新解析法

正員 工学士 秋 田 好 雄*

Abstract

New Analysis of the Elasto-Plastic Stress Field in Perforated Plate

By Yoshio Akita, *Kogakushi, Member*

Recently the Plasticity of amorphous body was developed highly by W. Prager and others. But the mathematical difficulty occurs in application of the modern plasticity to the boundary value problems. Some simple cases, for example, uniaxial, torsional and symmetrical cases of the elasto-plastic problem were treated till now, in which neither elastic strain nor plastic strain may be neglected. But the general two-dimensional elasto-plastic problem has not yet been treated.

The author showed here the fundamental equation of two-dimensional stress field in the strain-hardened plate based on the plastic deformation theory, and proposed the analysis of this non-linear differential equation using small perturbation method. As a example, the stress field of infinite plate with a circular hole under uniform traction at infinite boundary was studied. The stress distribution and residual stress around the circular hole were calculated.

Put σ_{ij} the stress tensor, ϵ_{ij} strain tensor, e_{ij} elastic strain, $\bar{\epsilon}_{ij}$ plastic strain. Then the elastic strain deviator tensor e'_{ij} , and plastic strain deviator tensor $\bar{e}'_{ij}$ are related to stress deviator tensor s_{ij} as Eq. (2) and (3), where λ is factor of proportionality, and E is Young's modulus.

The strain-hardening equation, which regulates the plastic condition, is given as (4), where γ^2 and τ^2 are quadratic invariants of the deviator tensors of plastic strain and stress, given as (5). Then the relation of γ and τ is given as (6), and λ is given as (7). The stress strain relations of plane stress state are given as (8). From the compatibility equation (1), equation of equilibrium (9) and relations (8), the differential equation of stress function ϕ is given as (11).

Now introducing the conjugate complex $z=x+iy$ and $\bar{z}=x-iy$, the fundamental equations are given as (12), (13) and (14). For simplicity, the strain-hardening equation is expressed as (15) where A is non-dimensional constant. From (14) and (15), λ is determined as (16). Then (12) becomes as (17). The right hand side of (17) shows effect of plastic strain. When the plastic strain is same order with elastic strain in small region, eq. (16) can be solved by small perturbation method. Now, ϕ and τ^2 are expressed as power series of a as (18). Parameter a is defined as (35). Substituting (18) into (17), and comparing the same power of a , (19) and (20) are obtained. Then from (19) the 0th approximation ϕ_0 is obtained as (22), where φ and ψ are arbitrary analytic functions. ϕ_0 is nothing else the elastic solution. The first approximation is obtained as (24) from (20).

As a example, consider the infinite plate with a circular hole under uniform tensile stress σ_∞ at infinity (Fig.1.) The elastic solution ϕ_0 and τ_0 are known. Then the first approximation is obtained as (24). The biharmonic function in righthand side of (24) is determined by boundary condition (25) or (26). For example the biharmonic function accompanied by the first term of (24) $1/z^m \bar{z}^n$, is determined in the form (29). Its final form is given as (30) and (31). Similarly the biharmonic functions accompanied by the second and third terms of (24) are given as (32), (33).

* 運輸技術研究所船舶構造部

The final form of ϕ_1 is given as (34). Introducing parameter α defined in (35), the total stress function is given as (36). From this result the stress $\sigma_{\theta\theta}$ around a circular hole is given as (37), and stress $\sigma_{\theta\theta}$ on the y-axis as (38).

Fig. 2. shows the stress $\sigma_{\theta\theta}$ around a circular hole, $\alpha=0$ corresponds to the elastic solution. As σ_{∞} increases, α increases, and the stress concentration at $\theta=\pi/2$ decreases from the elastic value 3. It is interesting that the compressive stress does not almost change. Fig. 3. shows the normal stress distribution $\sigma_{\theta\theta}$ on the y-axis. In the elasto-plastic solution, it is noticeable that the maximum tensile stress occurs at a point little apart from the circular hole.

When the traction at infinity decreases monotonically from the above solution, the whole regions are under unloading state. So the residual stress function is given as (39). The residual stress at the circumstance of the hole is compressive as shown in Fig. 4. The residual stress on the y-axis is shown in Fig. 5. The region of its compressive stress is limited to the point apart about 25% of hole radius from the edge of the hole. Outside of this point, small tensile stress occurs.

1. 緒 論

物体が外力を受けて変形する際に、物体内に応力場を生ずる。応力が小さな範囲では周知の様に、応力歪間に Hooke の法則が存在し、応力が大きくなると Hooke の法則よりのずれ、即ち塑性歪が生じて来る。塑性歪は微視的には結晶分子の転位と見られるが、巨視的な立場から amorphous な物質の変形と見て Hencky, Nadai から始まる塑性論が立てられた。最近 Prager⁽¹⁾ 等は基礎条件を整理し、Tensor 解析を行つて、一般的な歪硬化も伴う modern plasticity を展開している。これらの modern plasticity の境界値問題への適用は二、三の人々により試みられているが、その数学的な取扱いの困難さの為に、簡単な場合、例えば内圧を受ける円筒や振れ、一軸応力の場合等に試みられているに過ぎない⁽²⁾。二次元問題で全領域に弾性領域と塑性領域が共存する弾塑性問題 (Elasto-Plastic Problem) の場合には、領域を分ける数学的処理が困難であり、又基礎方程式が非線型であることが解析をはばんでいる。第一の難点は、塑性歪が応力に応じて連続的に変化する所謂 Prager⁽³⁾ の言う continuous transition の解として扱えば取扱いが容易となる。第二の難点をさける一つの方法として、以下に示すごとく摂動法によつて解析を行つた。ここでは実際問題に多い塑性歪の大きさが弾性歪と同程度以下の場合を扱い、例として円孔を有する無限板が、無限遠で様な張力をうけている場合の円孔の周辺の応力場を求めた。

塑性論には周知の様に flow theory と deformation theory の二つの流れがあり、特殊な問題では両理論の結果は一致するが、一般には一致しない。Deformation theory は数学的な取扱いが容易であるが、Prager が指摘した如く、応力の中正変化⁽⁴⁾に対して、応力歪関係の不連続が生ずる。然し外力が単調に増加する境界値問題では中正変化を伴わないから、ここでは deformation theory の立場をとる。

2. 基礎方程式

直角座標を x, y, z とし、変位 vector を (u, v, w) , 歪 tensor を ϵ_{ij} , 応力 tensor を σ_{ij} とすれば、

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \text{etc.}$$

従つて適合条件式

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{etc.}$$

が成立する。今、歪 tensor を二分して

$$\epsilon_{ij} = e_{ij} + s_{ij}$$

(1) W. Prager : J. App. Mech ; March, 1949.

(2) 例えば R. Hill : J. App. Mech ; Sept., 1949.

(3) W. Prager : J. App. Phy ; April, 1947.

(4) 応力が除荷でも載荷でもない変化を中正変化と言い、中正変化に対して歪変化が唯一つ対応しなければならぬ。

とし、 e_{ij} を弾性歪 tensor, ε_{ij} を塑性歪 tensor とすれば、弾性歪については Hooke の法則

$$e_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], \quad e_{yy} = \frac{1}{2G} \sigma_{xy} \quad \text{etc.}$$

が成立し、次に定義する deviator tensor

$$\text{弾性歪 deviator} \quad e'_{ij} = e_{ij} - \delta_{ij} e$$

$$\text{応力 deviator} \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} p$$

$$\text{但し } \delta_{ij} : \text{Kronecker の記号} \quad \begin{cases} i=j \text{ のとき } 1 \\ i \neq j \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

$$e = (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})/3$$

$$p = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$$

を用いると Hooke の法則は簡単に

$$e'_{ij} = \frac{1}{2G} s_{ij} \quad (2)$$

と表わしうる。ここで E, G, ν はそれぞれ Young 率, 剛性率, Poisson 比である。次に塑性歪については, plastic deformation theory の立場で応力歪関係を (2) と同形に

$$\widetilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\lambda}{E} s_{ij} \quad (3)$$

と仮定する。但し $\widetilde{\varepsilon}_{ij}$ は塑性歪 deviator で

$$\varepsilon_{ij} = \widetilde{\varepsilon}_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})/3$$

である。以下、塑性歪による体積変化はないとして $\varepsilon = 0$ とする。 λ は応力塑性歪 tensor の比例因数で正の無次元数で、応力 tensor 及び歪 tensor の不変量の函数である。

更に塑性状態を規定する量として、歪硬化条件式を与える。即ち

$$\gamma = f(\tau) \quad (4)$$

と τ はそれぞれ塑性歪 deviator tensor と応力 deviator tensor の二次の不変量で

$$\left. \begin{aligned} \gamma^2 &= (\widetilde{\varepsilon}_{ij}, \widetilde{\varepsilon}_{ij})/2 = \widetilde{\varepsilon}_{xx}^2/2 + \widetilde{\varepsilon}_{yy}^2/2 + \widetilde{\varepsilon}_{zz}^2/2 + \widetilde{\varepsilon}_{xy}^2 + \widetilde{\varepsilon}_{yz}^2 + \widetilde{\varepsilon}_{zx}^2 \\ \tau^2 &= (s_{ij}, s_{ij})/2 = s_{xx}^2/2 + s_{yy}^2/2 + s_{zz}^2/2 + s_{xy}^2 + s_{yz}^2 + s_{zx}^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

で与えられる⁽⁵⁾。(3) と (5) より

$$\gamma = \frac{\lambda}{E} \tau \quad (6)$$

となり、(4) と (6) から λ が定まる。即ち

$$\lambda = \frac{\gamma}{\tau/E} = \frac{f(\tau)}{\tau/E} \quad (7)$$

平面応力の場合には

$$\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$$

故に

$$s_{yz} = s_{zx} = 0$$

且

$$\widetilde{\varepsilon}_{yz} = \widetilde{\varepsilon}_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0$$

となり、応力歪関係を見易い形に書けば

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) + \frac{\lambda}{E} s_{xx} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) + \frac{\lambda}{E} s_{yy} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} + \frac{\lambda}{E} \sigma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

となる。釣合の方程式は

(5) Prager の言う I_2, J_2 は本文の γ^2, τ^2 に相当する。八面体塑性剪断歪は $\gamma_{oct} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\gamma$, 八面体剪断

応力は $\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}}\tau$ に相当する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(9) と (1), (8) より

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\lambda s_{yy}) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\lambda s_{xx}) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\lambda s_{xy}) \quad (10)$$

(9) より応力函数 ϕ

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

を導入すれば, (10) は

$$\nabla^4 \phi = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\lambda s_{yy}) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\lambda s_{xx}) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\lambda s_{xy}) \quad (11)$$

$$\text{但し } \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

次に共軛複素数 $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ を導入すれば⁽⁶⁾,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}, & \nabla^4 &= 16 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} \\ \sigma_{xx} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2}, & \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2} \\ \sigma_{xy} &= -i \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2} \right), & s_{xx} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2} \\ s_{yy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2}, & s_{xy} &= -i \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2} \right) \end{aligned}$$

と表わされる。(11) と (5) も変形されて

$$4 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} \phi = -\frac{2}{3} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \left(\lambda \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \phi \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\lambda \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \phi \right) - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \left(\lambda \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi \right) \quad (12)$$

$$\tau^2 = \frac{4}{3} \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \bar{z}} \right)^2 + 3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (13)$$

$$\lambda = \frac{f(\tau)}{\tau/E} \quad (14)$$

となる。(12), (13), (14) は弾塑性問題の基礎方程式である。

3. 摂動法による解

(12) の λ は τ の函数であり, (12) 式は非線型方程式である。弾性の場合では (12) の右辺は 0 となり, 従つて右辺は塑性歪による影響を示している。塑性歪が弾性歪に比べて大きくない範囲では摂動法で解くことができる。

歪硬化の条件式として, 簡単のため γ が τ の 3 次の parabola であると考え,

$$\gamma = A \left(\frac{\tau}{E} \right)^3 \quad (15)$$

とする。 A は材質による無次元常数である。(14) と (15) より λ を求めると,

$$\lambda = EA \left(\frac{\tau}{E} \right)^3 / \tau = A \left(\frac{\tau}{E} \right)^2 \quad (16)$$

となり, (12) に代入すると

$$4 E^2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = -\frac{A}{3} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \left(\tau^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \bar{z}} \right) - A \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\tau^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2} \right) + \text{conj. compl.} \quad (17)$$

となる。茲で次に定義する無次元 parameter

(6) この z は三次元の z 座標と異なることに注意。

$$a = A \left(\frac{\sigma_{\infty}}{E} \right)^2$$

を導入する。この σ_{∞} は応力場内の基準の応力の値とする。例えば次節では無限遠方における外力による一様引張応力を取る。今 ϕ 及び τ^2 を a で展開し、

$$\phi = \phi_0 + a\phi_1 + a^2\phi_2 + \dots \quad \tau^2 = \tau_0^2 + a\tau_1^2 + a^2\tau_2^2 + \dots \quad (18)$$

として (17) に代入し、 a の同量の項を比較すると、

$$\frac{\partial^4 \phi_0}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0 \quad (19)$$

$$4\sigma_{\infty}^2 \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = -\frac{2}{3} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \left(\tau_0^2 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z \partial \bar{z}} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\tau_0^2 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \bar{z}^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \left(\tau_0^2 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} \right) \quad (20)$$

$$4\sigma_{\infty}^2 \frac{\partial^4 \phi_2}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = -\frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \left(\tau_0^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z \partial \bar{z}} + \tau_1^2 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z \partial \bar{z}} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\tau_0^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \bar{z}^2} + \tau_1^2 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \bar{z}^2} \right) + \text{conj. compl.}$$

(18) より

$$\left. \begin{aligned} \tau_0^2 &= \frac{4}{3} \left[\left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z \partial \bar{z}} \right)^2 + 3 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \bar{z}^2} \right] \\ \tau_1^2 &= \frac{4}{3} \left[2 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z \partial \bar{z}} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z \partial \bar{z}} + 3 \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \bar{z}^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(19) より第0近似は

$$\phi_0 = \frac{1}{2} [\bar{z}\varphi(z) + \psi(\bar{z})] + \text{conj. compl.} \quad (22)$$

となる。但し φ, ψ は任意の解析関数で、 ϕ_0 は弾性解そのものである。第1近似は (20) より

$$\phi_1 = -\frac{1}{12\sigma_{\infty}^2} \iint \tau_0^2 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z \partial \bar{z}} dz d\bar{z} - \frac{1}{4\sigma_{\infty}^2} \iint \tau_0^2 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} dz d\bar{z} + \text{conj. compl.} + \text{biharm. func.} \quad (23)$$

として求める。

4. 円孔を有する無限板の場合

例として第1図に示すごとく、円孔を有する無限板が無限遠で外力により x 方向に一様な引張応力 σ_{∞} を受けている場合を扱う。円孔の半径を単位長にとると、この場合の弾性解は

$$\varphi(z) = \sigma_{\infty} \left(\frac{z}{4} + \frac{1}{2z} \right)$$

$$\psi(\bar{z}) = \sigma_{\infty} \left(-\frac{1}{2} \log \bar{z} - \frac{\bar{z}^2}{4} - \frac{1}{4\bar{z}^2} \right)$$

で与えられる。(21) により τ_0^2 を求めると、

$$\tau_0^2 = \frac{\sigma_{\infty}^2}{6} \sum \frac{A_{mn}}{z^m \bar{z}^n}$$

$$\begin{aligned} \text{但し } A_{0,0} &= 1, & A_{2,0} &= -5/2, & A_{3,-1} &= -3, \\ A_{4,0} &= 5, & A_{2,2} &= 17/4, & A_{3,1} &= 3, \\ A_{3,3} &= -9, & A_{4,2} &= -9/2, & A_{4,4} &= 27/4 \end{aligned}$$

となる。(23) に従って積分し、 ϕ_1 を求めると

$$\phi_1 = -\frac{\sigma_{\infty}}{144} \left[\sum \frac{B_{mn}}{z^m \bar{z}^n} + \sum C_m \frac{\log \bar{z}}{z^m} + \sum D_m \frac{\bar{z}(\log \bar{z} - 1)}{z^m} + \text{conj. compl.} + \text{biharm. func.} \right] \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \text{但し } B_{-1,-1} &= 1, & B_{-2,0} &= -1/2, & B_{1,-1} &= 39/4, & B_{2,-2} &= 21/8, & B_{3,-3} &= 3/4, \\ B_{4,-2} &= -183/40, & B_{3,-1} &= -7/2, & B_{2,0} &= -27/4, & B_{1,1} &= 3/4, & B_{0,1} &= 39/20, \\ B_{4,0} &= 111/81, & B_{3,1} &= 53/2, & B_{2,2} &= 29/8, & B_{4,2} &= -219/20, & B_{3,3} &= -13/4, \\ B_{6,0} &= -15/28, & B_{6,2} &= 27/56, & B_{5,3} &= 63/20, & B_{4,4} &= 81/40, & B_{6,4} &= -81/56, \\ C_0 &= -27/4, & C_2 &= 45/2, & C_4 &= -27/2, & D_3 &= -9 \end{aligned}$$

となる。上式右辺の biharmonic function を決定するには ϕ_1 が境界条件を満たす様に定める。境界条件として

Fig. 1 Perforated infinite plate under uniform tension

は、無限遠で一樣な応力 σ_∞ で、円孔周辺は応力の自由な縁であるから、

$$\left. \begin{aligned} |z| \rightarrow \infty, \quad \sigma_{xx} &= \sigma_\infty, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0 \\ z\bar{z} &= 1, \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\theta r} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

但し r, θ は極座標で $z = re^{i\theta}$ である。 ϕ_0 は弾性解であり、すでに (25) を満足しているから、 ϕ_1 に関しては

$$|z| \rightarrow \infty \quad \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z \partial \bar{z}} = 0 \quad (26)$$

$$z\bar{z} = 1 \quad z^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} - 2z\bar{z} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z \partial \bar{z}} + \bar{z}^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \bar{z}^2} = 0 \quad (27)$$

$$z^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} - 2\bar{z} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \bar{z}^2} = 0 \quad (28)$$

を満足するごとく、(24) の重調和函数を定める。先ず第一項 $1/z^m \bar{z}^n$ と組合せて

$$\phi_1 = \frac{1}{z^m \bar{z}^n} + \frac{1}{z^m \bar{z}^n} + \frac{K_1 \bar{z}}{z^p} + \frac{K_2}{z^q} + \frac{\bar{K}_1 z}{\bar{z}^p} + \frac{\bar{K}_2}{\bar{z}^q} \quad (29)$$

と置く。ここで K_1, K_2 は未知の複素常数、 p, q は実常数である。境界条件より K_1, K_2, p, q を定める。(26) より、

$$p \geq 0, \quad q \geq -1$$

(27) に代入して

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{z^{m+n}} [m(m+1) - 2mn + n(n+1)] + \frac{1}{z^{p+1}} [K_1 p(p+1) + 2K_1 p] + \frac{1}{z^q} K_2 q(q+1) \\ & + \frac{1}{\bar{z}^{m+n}} [m(m+1) - 2mn + n(n+1)] + \frac{1}{\bar{z}^{p+1}} [\bar{K}_1 p(p+1) + 2\bar{K}_1 p] + \frac{1}{\bar{z}^q} \bar{K}_2 q(q+1) = 0 \end{aligned}$$

今、 $p+1=m-n, q=m-n, K_1=k_1'+ik_1', K_2=k_2'+ik_2'$ とすれば、

$$\begin{aligned} & \cos(m-n)\theta [m(m+1) - 2mn + n(n+1) + k_1' p(p+1) + 2k_1' p + k_2' q(q+1)] \\ & - \sin(m-n)\theta [k_1' p(p+1) + 2k_1' p + k_2' q(q+1)] = 0 \end{aligned}$$

上式が θ 如何に係らず成立するためには

$$\begin{aligned} & k_1'(m-n-1)(m-n+2) + k_2'(m-n)(m+n+1) = -m(m+n) - n(n+1) + 2mn \\ & k_1'(m-n-1)(m-n+2) + k_2'(n-m)(m+n+1) = 0 \end{aligned}$$

同様に (28) より

$$\begin{aligned} & k_1'(m-n-1)(m-n) + k_2'(m+n+1)(m-n) = -m(m+1) + n(n+1) \\ & k_1'(m-n-1)(m-n) + k_2'(m+n+1)(m-n) = 0 \end{aligned}$$

以上より、 $m \neq n$ ならば

$$k_1' = n, \quad k_2' = -(n+1), \quad k_1' = 0, \quad k_2' = 0$$

と求まる。即ち

$$\phi_1 = \frac{1}{z^m \bar{z}^n} + \text{conj. compl. + biharm. func.}$$

が境界条件を満すためには、

$$\phi_1 = \frac{1}{z^m \bar{z}^n} + \frac{n\bar{z}}{z^{m+n-1}} - \frac{n+1}{z^{m-n}} + \text{conj. compl.} \quad (30)$$

となる。同様に $m=n$ のときには

$$\phi_1 = \frac{1}{z^m \bar{z}^n} + \text{conj. compl. + biharm. func.}$$

に対して、

$$\phi_1 = \frac{1}{z^m \bar{z}^m} + 2m \log z + \text{conj. compl.} \quad (31)$$

第二項の

$$\phi_1 = \frac{\log \bar{z}}{z^m} + \text{conj. compl. + biharm. func.}$$

に対しては

$$\phi_1 = \frac{\log \bar{z}}{z^m} + \frac{\log z}{z^m} - \frac{\bar{z}}{z^{m-1}} + \frac{1}{z^m} + \text{conj. compl.} \quad (32)$$

第三項の

$$\phi_1 = \frac{\bar{z}(\log \bar{z} - 1)}{z^m} + \text{conj. compl.} + \text{biharm. func.}$$

に対しては

$$\phi_1 = \frac{\bar{z}(\log \bar{z} - 1)}{z^m} + \frac{\bar{z} \log z}{z^m} + \frac{1}{z^{m+1}} + \text{conj. compl.} \quad (33)$$

と定まる。又、(24) 右辺の項の中で重調和函数の形をしているものがあれば、解の唯一性のために消し去つてよい。(30) から (33) までの結果を用いると重調和函数が定つて ϕ_1 は⁽⁷⁾,

$$\begin{aligned} \phi_1 = & -\frac{\sigma_\infty}{144} \left[\sum B_{mn} \left(\frac{1}{z^m \bar{z}^n} + \frac{n \bar{z}}{z^{m-n-1}} - \frac{n+1}{z^{m-n}} \right) + \sum B_m \left(\frac{1}{z^m \bar{z}^m} + 2m \log z \right) \right. \\ & \left. + \sum C_m \left(\frac{\log z}{z^m} + \frac{\log \bar{z}}{z^m} - \frac{\bar{z}}{z^{m-1}} + \frac{1}{z^m} \right) + \sum D_m \left(\frac{\bar{z}(\log \bar{z} - 1)}{z^m} + \frac{\bar{z} \log z}{z^m} + \frac{1}{z^{m+1}} \right) + \text{conj. compl.} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

但し係数 B_{mn} 等は

$$\begin{aligned} B_{2,-2} &= 21/8, & B_{3,-3} &= 3/4, & B_{4,-2} &= -183/40, & B_{3,1} &= 53/2, & B_{4,2} &= -219/20, \\ B_{5,2} &= 27/56, & B_{5,3} &= 63/20, & B_{6,4} &= -81/56, & B_1 &= 3/4, & B_2 &= 29/8, \\ B_3 &= -13/4, & B_4 &= 81/40, & C_2 &= 45/2, & C_4 &= -27/2, & D_3 &= -9 \end{aligned}$$

他は 0

故に全応力函数は先に定義した parameter

$$a = A \left(\frac{\sigma_\infty}{E} \right)^2 \quad (35)$$

を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{\phi}{\sigma_\infty} = & \frac{1}{2} \left[\bar{z} \left(\frac{z}{4} + \frac{1}{2z} \right) - \frac{1}{2} \log z - \frac{z^2}{4} - \frac{1}{4z^2} \right] \\ & - \frac{a}{144} \left[\sum B_{mn} \left(\frac{1}{z^m \bar{z}^n} + \frac{n \bar{z}}{z^{m-n-1}} - \frac{n+1}{z^{m-n}} \right) + \sum B_m \left(\frac{1}{z^m \bar{z}^m} + 2m \log z \right) \right. \\ & \left. + \sum C_m \left(\frac{\log \bar{z}}{z^m} + \frac{\log z}{z^m} - \frac{\bar{z}}{z^{m-1}} + \frac{1}{z^m} \right) + \sum D_m \left(\frac{\bar{z}(\log \bar{z} - 1)}{z^m} + \frac{\bar{z} \log z}{z^m} + \frac{1}{z^{m+1}} \right) \right] + \text{conj. compl.} \end{aligned} \quad (36)$$

となる。円孔の周りの応力 $\sigma_{\theta\theta}$ は

$$(\sigma_{\theta\theta})_{r=1} = \sigma_\infty (1 - 2 \cos 2\theta) + a \sigma_\infty \sum_0^3 f_n \cos 2n\theta \quad (37)$$

$$\text{但し } f_0 = -92/90, \quad f_1 = 1843/1260, \quad f_2 = -59/84, \quad f_3 = 31/120$$

と求まり、 y 軸にそつて x の方向の normal stress $\sigma_{\theta\theta}$ は

$$(\sigma_{\theta\theta})_{\theta=\pi/2} = \sigma_\infty \left(1 + \frac{1}{2r^2} + \frac{3}{2r^4} \right) + a \sigma_\infty \sum_1^6 \frac{g_n + h_n \log r}{r^{2n}} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \text{但し } g_1 &= 127/720, & g_2 &= -2767/420, & h_2 &= 21/4, & g_3 &= 3635/336, \\ h_3 &= 15/2, & g_4 &= -3017/420, & g_5 &= 9/14, & g_6 &= -495/224, \end{aligned}$$

他は 0

円孔の周りの応力 $\sigma_{\theta\theta}$ を第 2 図に示す。 $a=0$ は弾性解に相当し、外力 σ_∞ を増すと a が増加し、最大引張応力 ($\theta=\pi/2$) の集中度は弾性解の値 3 より次第に減少する。応力集中度の減少は $\theta=\pi/2$ の近傍に止まり、圧縮応力の部分 ($-30^\circ < \theta < 30^\circ$) では殆んど変化のないことは興味深い。 a が 0.4 以上になると、 $\theta=\pi/2$ 附近に応力分布の凹みが生ずるが、 a がそれ以上の場合には摂動法の近似の収斂性は悪くなるであろうと思われる。

第 3 図に y 軸上の引張応力の分布を示す。 $a=0$ の弾性解は円孔より遠ざかるにつれ、単調に減少するが、弾塑性解では円孔より僅か離れた点で最大値があるのは注目すべきである。

(7) 証明は略したが、この解は dislocation を含んでいない。

Fig. 2 Stress $\sigma_{\theta\theta}$ distribution around a circular hole

5. 残留応力

外力を単調に加えて最終値に達するまでの process には全領域の中に除荷領域 (unloading region) が生じない。今、この最終値の外力から単調に外力を減らすと、全領域は除荷状態であるから、歪の弾性成分のみ変化し、塑性成分は変化しない。従つて外力が消えたときの応力場は、外力最大のときの応力場から弾性解を引き去つたものとなる。外力最大のときの応力函数は第一近似で

$$\phi = \phi_0 + a\phi_1$$

で与えられるから、弾性解を引けば、残留応力函数は

$$\phi_{res} = a\phi_1 \quad (39)$$

で与えられる。従つて残留応力は孔の周りでは、

$$(\sigma_{\theta\theta})_{res} = a\sigma_{\infty} \sum f_n \cos 2n\theta \quad (40)$$

y 軸上では

$$(\sigma_{\theta\theta})_{res} = a\sigma_{\infty} \sum \frac{g_n + h_n \log r}{r^{2n}} \quad (41)$$

で与えられる。但し f_n , g_n , h_n は前述のものと同一である。第 4 図に円孔の周りの残留応力分布を示す。中心角 $\theta = \pi/2$ で最大の圧縮応力を与え、 $\theta = 0^\circ$ では殆んどない。第 5 図に y 軸上の x 方向の残留応力を示す。残留応力は円孔の辺で最大の圧縮応力を与え、円孔より遠方で僅かな引張応力を与えている。圧縮応力の存在する領域は円孔半径の 25% 程度の範囲内にある。

Fig. 4 Residual stress around a circular hole ($\sigma_{\theta\theta}$)

Fig. 3 Normal stress distribution (σ_{yy}) on y -axis

Fig. 5 Residual stress on the y -axis (σ_{xx})

6. Parameter a について

Parameter $a = A \left(\frac{\sigma_{\infty}}{E} \right)^2$ の量的な考察を行う。今応力歪曲線を考えよう。塑性成分は歪硬化の条件式として $\gamma = f(\tau)$ が与えられる。弾性成分としては (5) で定義した γ と同形に弾性成分の deviator tensor の不変量として γ_E を定義すると、

$$\gamma_E = \frac{\tau}{2G} \quad (42)$$

となる。 γ と γ_E を組合せて、横軸に $\gamma + \gamma_E$ 、縦軸に τ をとれば第 6 図が得られる。今、物体内の最大応力を与える点を第 6 図の P 点で示す。前述の様に摂動法の収斂性は最大応力点の塑性歪と弾性歪が同程度以下の場合に存在すると考えられるから、 P 点の近傍では γ と γ_E は同程度の大きさである。

今仮想的な yield stress τ_r を考えると、図中の τ_r の線は A の下部にあることになる。 $\tau = \tau_r$ における γ と γ_E の比を n とすると、即ち

$$\tau = \tau_y \quad \text{にて} \quad \gamma = n\gamma_E$$

n は普通 1 より小さな数である。歪硬化の条件式から

$$\tau = \tau_y \quad \text{にて} \quad n\gamma_E = A \left(\frac{\tau_y}{E} \right)^3$$

故に

$$A = \frac{nE}{2G} \left(\frac{E}{\tau_y} \right)^2$$

故に parameter a は

$$a = \frac{nE}{2G} \left(\frac{\sigma_\infty}{\tau_y} \right)^2 = \frac{3nE}{4G} \left(\frac{\sigma_\infty}{\sigma_y} \right)^2 \quad (43)$$

で与えられる。但し σ_y は一軸応力の降伏点である。上式で明らかな様に a の order は $n \left(\frac{\sigma_\infty}{\sigma_y} \right)^2$ で表わされる。 $\left(\frac{\sigma_\infty}{\sigma_y} \right)^2$ は圧縮性流体における Mach 数の二乗に対応している。弾性解ならば $\sigma_y \rightarrow \infty$ であるから、 $a=0$ と考えられる。

7. 要 約

塑性論の境界値問題への適用は、弾性成分を無視した場合や、一軸応力、捩れ、中心対称の如き簡単な場合に行われているに過ぎない。著者は塑性変形理論の立場で一般の二次元境界値問題の解析法を提案した。本方法は弾性歪と塑性歪が何れも無視出来ない弾塑性問題に有効である。独立変数として x, y の代りに共軛複素数を採用することは計算を著しく簡易化し、又等角写像の導入も容易にする。

解析は摂動法に基づいており、第 0 近似は弾性解に相当する。例として円孔を有する薄い無限板が無限遠で一様な張力を受けている場合を解いた。

結果によると、円孔の最大引張応力の集中度は外力をますと弾性解の値 3 より次第に減少するが、最大圧縮応力の集中度は 1 より殆んど変らない。円孔側部の引張応力は円孔の辺より僅か離れた点で最大となることは注目値する。残留応力は円孔周辺で圧縮応力を残し、円孔の側部で円孔半径の 25% 外方までは圧縮応力が生じ、それより外方では引張応力を生ずることが判つた。

最後に絶えず御指導を頂いた吉識先生、激励を頂いた重川次長、更に討論を頂いた S. S. Groupe の方々に厚く感謝の意を表する。

数 表 1. $(\sigma_{\theta\theta})_{r=1/\sigma_\infty}$

θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$a=0$	-1	-.879	-.532	0	.653	1.347	2	2.532	2.879	3
$a=0.2$	-1	-.890	-.563	-.040	.606	1.250	1.771	2.105	2.266	2.311
$a=0.4$	-1	-.901	-.593	-.072	.558	1.152	1.543	1.678	1.653	1.622

Fig. 6 Stress-strain curve

数 表 2. $(\sigma_{\theta\theta})_{\theta=\pi/2/\sigma_{\infty}}$

y	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	2	2.5	3	5
$a=0$	3	2.652	2.388	2.184	2.020	1.888	1.782	1.692	1.500	1.320	1.222	1.080
$a=0.2$	2.311	2.472	2.361	2.205	2.054	1.921	1.811	1.717	1.517	1.330	1.229	1.082
$a=0.4$	1.622	2.291	2.334	2.227	2.087	1.953	1.836	1.742	1.534	1.341	1.236	1.085

数 表 3. $(\sigma_{\theta\theta})_{res, r=1/\sigma_{\infty}}$

θ°	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$a=0.2$	0	-.011	-.031	-.036	-.047	-.097	-.229	-.427	-.613	-.689
$a=0.4$	0	-.022	-.062	-.072	-.095	-.195	-.457	-.854	-1.226	-1.378

数 表 4. $(\sigma_{\theta\theta})_{res, \theta=\pi/2/\sigma_{\infty}}$

y	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	2	2.5	3	5
$a=0.2$	-.689	-.180	-.027	.210	.034	.033	.029	.025	.017	.010	.007	.002
$a=0.4$	-1.378	-.361	-.054	.043	.067	.065	.054	.050	.034	.021	.014	.005