(昭和 25 年 11 月造船協会秋季講演会に於て講演)

溶接棒の使用性能について

—溶接工の個人差が使用性能試験結果に及ぼす影響—

正員 工学士 増 淵 興 一*

Abstract

Usability of Welding Electrode

—Effect of Individuality of Welder on the Result of Usability Test—

By Kouichi Masubuchi, *Kogakushi, Member**

The test result of the usability of welding electrode is said to be liable to vary, when the test welder is changed.

The object of this paper is to verify the effect of individuality of test welder on the usability test result.

Usability test for 36 different coated electrodes made with the same core wire are carried by 3 welders.

These test results are then analysed statistically.

The matching theory is used for this analysis.^{a)}

We confirmed that the test results performed by 3 welders are considerably agreed.

a) S. S. Wilks ; Mathematical Statistics 1944

I. 研究の目的

溶接棒の良否はその棒を用いて実際作業を行う時の性能で決定すべきである。最近溶接棒の性能として使用性能が重要視されるようになり、現在では溶接棒の規格試験に於て使用性能に関する試験が含まれているが、之は実際の作業に際して性能の高い溶接棒を見出そうという要求のあらわれである¹⁾。

然し使用性能に関しては未だ余り研究が進んでいないので、現在の段階では使用性能とは何かという、使用性能の定義も常識の域を脱していない²⁾。従つて使用性能試験にも定まつた方針や根拠がなく、その結果についても客観的保証がない。使用性能試験には色々な方法がとられているようであるが、電弧の安定性とか、有害ガス発生の有無、スラグの流動性、とけ込みの良否等を調査しつつ、溶接を行い、溶接されたものについて、スラグや気泡の混在、亀裂の有無等をしらべるのが普通の方法である。然しこのような試験によつて溶接棒のどんな性質が分るか、使用性能に影響する主要素はどんなものであるのか等は未だ明らかでない。

又この種の試験では物理的若しくは化学的な測定による定量的な判定が下しにくく、検査官の判断にたよる部分が多い上に、試験の際の溶接工の技倆や、溶接条件の適否にも影響をうけることが多く、中々客観的な結論が得られない。

著者は最近大体同種の心線を用いて同時に製造された国産被覆溶接棒 36 種について 3 人の溶接工によつて同時に使用性能試験を行う機会を得たので、使用性能試験に於て試験者の個人差がどの様に現われるものであるかに重点を置いて試験結果を解析した。

次にその解析方法及び結果を紹介すると共に、その解析結果をもとにして使用性能試験方法の合理化について

* 運輸省、運輸技術研究所、溶接部

Engineer of the Welding Division, Technical Research.
Institute of Transportation, Ministry of transportation.

1) 例えば

JES 基本 9001 号：一般鋼構造用被覆電弧溶接棒(昭和 22 年)。

AWS Tentative Specifications for Iron & Steel Arc-Welding Electrodes (1945)。

2) 著者自身では「健全な溶接がどの位確実に且つ容易に得られるか」という性能を使用性能と考えている。

果 結 驗 試 表 第 1

[illegible]

第1表 試験結果

溶接番号	溶接姿勢	作業性										溶接部外観検査						判定
		無発生のガス	安定性	流動性	スラッグの	均等性	溶融の	よしあし	とけ込の	筒の状	多リ少	スリッパ	スラッグの	スラッグの	スラッグの	スラッグの	スラッグの	
27	下立上	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
28	下立上	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
29	下立上	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
30	下立上	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
31	下立上	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
32	下立上	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
33	下立上	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
34	下立上	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
35	下立上	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
36	下立上	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

(註) × は不合格 空欄は合格を示し左から東大、鶴見、横浜での成績を記入した。

二三の私見を述べようとするものである。

II. 試験方法及び試験結果

(1) 試験に用いた溶接棒

昭和 23 年夏日本製鉄八幡製鉄所から提供された溶接棒心線をを用いて国内 36 の溶接棒被覆塗装工場が同時に被覆塗装を行つた溶接棒を使用した。

(2) 溶接工の選定

東京大学第一工学部溶接工学研究室、日本鋼管鶴見造船所及び三菱重工業横浜造船所より夫々一名の溶接工を選定した。これらはすべて各所属研究室及び工場よりこの試験のために推薦された熟練工である。

(3) 試験方法

各溶接工は夫々独立に、下向、立向、上向の三姿勢について平板に溶接ビードを置き、夫々下記の要領で検査を行い、使用性能の可否を判定する。この際溶接電流等の溶接条件に関しては各工場より最も適当な条件を提示させ、それを基準にして各溶接工に於て夫々独自の立場から之を定めた。溶接棒には適当な符号をつけ、溶接工には被覆工場名を知らせないようにした。又溶接は各溶接工の所属する場所で行い、各人の連絡を絶つた。

(A) 作業性試験

溶接中（一部は溶接終了後）に下記項目について検査する。

- (i) 有害ガ発生の有無
- (ii) 電弧の安定性
- (iii) スラッグの流動性
- (iv) 溶融の均等性
- (v) とけ込のよしあし
- (vi) 棒端被覆筒の状態
- (vii) スパッタリングの多少
- (viii) スラッグのかぶり状態
- (ix) スラッグ除去の難易
- (x) 被覆剤の溶融状態

(B) 溶接部外観検査

溶接終了後次の項目について検査する。

- (i) ビード波形の均等性
- (ii) ビードの表面に気孔が出来易いか否か、
- (iii) ビードの表面に亀裂が出来易いか否か、
- (iv) スラッグが捲込みやすいか否か、
- (v) アンダーカットが出来易いか否か、
- (vi) オーバーラップが出来易いか否か、

各溶接工は項目毎に合否を定めた上で、使用性能試験としての総合的な判定を下す³⁾。

溶接工別の試験結果は第 1 表の通りである。

III. 試験結果のばらつきに対する解析

このような試験に於て 3 人の溶接工による試験成績が完全に一致するということはめつたになく、多少結果がばらつくのは止むをえないであろう。事実試験結果は第 1 表の如くにかかなりばらついている。本研究の焦点はこのばらつきを調査するにある。之には色々な方法があると思うが、ここでは之を客観的且つ定量的に調査するために、推計学の仮説検定論を応用してみよう。それは次の様な論法による⁴⁾。

3) 判定方式としては不適当なものを否とし、然らざるものを可とした。他の例では点数制をとつてみたものもあるが、どの様な判定方式が合理的であるかについては更に研究する必要がある。又試験項目の意味については大体 JES 9001 号の通りであるので詳しい説明を省略する。

4) 推計学の考え方については下記書籍を参照されたい。

北川 敏 男； 統計学の認識 白揚社 1949.

増山元三郎； 推計学への道 東大共同組合出版部 1950.

我々がここで採用している使用性能の試験方法は溶接棒の規格試験におけると大体同じである以上、溶接工によつて多少の差はあつても一応同じような判定が下されるものと予想している。そこでこの予想と正反対に溶接工の判定は全くデタラメなものであると仮定して見る。そしてこの仮定に立脚して想定された状態と現実とを対決させ、それに基いて始めに立てた仮説を批判する。而してこの対決に当つては標本分布という概念を用い、確率という尺度によつて数量化をはかる。

この間の思想をもう少し詳しく説明しよう。先ず3人の溶接工がデタラメに合否をつけた場合の試験結果の一致の程度を考える。この時普通結果は大いにばらつくであろうが、稀には非常によく一致することも起りうる。この場合一致する程度に対してその起りうる度合即ち確率が求められる。かくしてばらつきという現象が確率という一つの尺度で計量化される。そこでそのような仮想の状態と現実とを比較する。即ち現実に見られた実験結果以上に合否が一致する確率を求める。その確率が非常に小さかつたとして見よう。その時はデタラメに合否をつけたとして偶然にこれ程結果がよく一致することは極めて稀であるということになる。即ちもしこの確率が0.001であるとすれば、偶然にもこれ程結果が一致することは1000回のうち1回の割でしか起りえないわけである。所が現実にはそれ程よく一致した結果が出ているという矛盾は如何に説明したらよいであろうか。それには次の様な態度をとる。之は溶接工は実際にはデタラメに合否をつけているのではないのを、デタラメとしたからこの様な矛盾を生じたと考えるのである。

然しだからと言って「3人はデタラメに判定しているのではない」と断言は出来ない。それはデタラメに判定しても1000回に1回はこのようなことが起り得るからである。反対に「3人の判定はデタラメでない」と言つた場合それが誤りである確率も0.001であつて之を危険率と言う。危険率としては0.01をとることが多い。

反対にかくして計算された確率が大きければ、デタラメかも知れないと推論する。

次には上述した帰無仮説に立脚して、試験結果の一致の程度とその確率との関係、即ち標本分布を求めなければならぬ。之には色々の方法があるが、ここでは符合の理論を応用して見よう³⁾。

I, II, III なる3人が夫々 n 回の試験を行う。この時3人は夫々独立に且つランダムに合格を下表の如く夫

溶接工 合否の数	I	II	III
合	n_{11}	n_{21}	n_{31}
否	n_{12}	n_{22}	n_{32}
合 計	n	n	n

々 n_{11}, n_{21}, n_{31} 回、不合格を n_{12}, n_{22}, n_{32} 回つけるものとする。そうすればこの n 回の試験に於て、Iは合格としたがII, IIIの両人は不合格としたものや、I, IIは不合格としたがIIIは合格とするなど、3人の結果がクイチガウものもあろうが、中には3人が一致して合格としたもの或いは不合格としたものもいくつかは出てくるであろう。このように3人の意見の一致した回数を h とすれば、 $n \geq h \geq 0$ であつて、一致した回数 h

に対しそのような事象の起る確率が求められる。この場合試験結果の一致の程度を一致した回数 h で表わすことは極めて自然であろう。又ここに提示した確率論の問題と、「3人の溶接工がデタラメに合否をつけたとした場合の試験結果の一致の程度とその起りうる確率」という我々が研究しようとしている問題との関連は容易につけられるであろう。

さて3人の判定が一致した回数 h がある特定の数 H 以上となる確率 $P\{h \geq H\}$ は(1)は式で与えられる。

$$P\{h \geq H\} = \frac{n_{11}! \cdot n_{12}! \cdot n_{21}! \cdot n_{22}! \cdot n_{31}! \cdot n_{32}!}{n! \cdot n!} \sum_g R_g \cdot T_g \quad (1)$$

ここに

$$R_g = (-1)^{n-g-H} \binom{n-g-1}{H-1}$$

$$T_g = \sum_{u_r} \frac{g! \cdot g!}{\prod_r (n_{1r} - u_r)! (n_{2r} - u_r)! (n_{3r} - u_r)! u_r!}$$

$$(r=1, 2; u_1 + u_2 = n - g)$$

又 g 及び u_1, u_2 は(1)式の各因数が0若しくは正整数となるようなすべての0若しくは正整数組合せをとるものとする。

5) 符合の理論については次の書籍を参照されたい。

S. S. Wilks; Mathematical Statistics 1944.

小河原正己; 数理統計学 1948.

増山元三郎; 小數例の纏め方と実験計画の立て方 1949.

以上は3人の結果の一致度について示しているものであるが、IとIIの2人だけについてその判定の一致した数 h が特定数 H 以上となる確率は(2)式で与えられる⁶⁾。

$$P\{h \geq H\} = \frac{n_{12}! \cdot n_{12}! \cdot n_{21}! \cdot n_{22}!}{n!} \sum_{h=H}^n \frac{1}{r! \cdot (h-r)! \cdot s! \cdot (n-h-s)!} \quad (2)$$

ここに

$$r = \frac{1}{2}(n_{11} - n_{22} + h)$$

$$s = \frac{1}{2}(n_{11} + n_{22} - h)$$

又 r, s は(2)式の因数がすべて0若しくは正整数となるようなすべての場合をとる。

IIとIII, IIIとIの一致の程度については(2)式に於て n_{ij} の添字を適当に交換すれば直ちに所要の解がえら

第2表 試験結果の符合度

	分 類	④ 合 否 数			⑤ 一致数 H				⑥ $P\{h \geq H\}$			
		n_{11} n_{12}	n_{21} n_{22}	n_{31} n_{32}	I-II	II-III	III-I	I-II-III	I-II	II-III	III-I	I-II-III
作 業 性 試 験	有害ガス発生の有無	35 1	35 1	34 2	36	35	35	35	*	○	○	**
	電弧の安定性	65 43	92 16	89 19	79	95	80	73	**	**	**	**
	スラグの流動性	27 81	79 29	88 20	41	87	35	29	○	**	○	○
	溶融の均等性	37 71	79 29	74 34	56	87	57	46	*	**	*	○
	とけ込みの良否	70 38	97 11	97 11	79	102	77	75	**	**	**	**
	棒端被覆筒の状態	11 97	46 62	59 49	67	85	54	48	*	**	○	**
	スパッタリングの多少	36 72	95 13	55 53	45	64	71	36	○	**	**	**
	スラグのかぶり状態	48 60	84 24	97 16	60	93	55	50	*	**	○	**
	スラグ除去の難易	90 18	95 13	78 30	93	87	78	75	**	**	*	*
	被覆剤の溶融状態	11 97	47 61	69 39	68	80	44	42	**	**	○	**
溶 接 部 外 観 検 査	ビード波形の均等性	39 69	72 36	81 27	57	85	56	45	○	**	*	*
	ビード表面の気孔	63 45	104 4	101 7	65	105	66	64	○	**	○	**
	ビード表面の亀裂	108 0	108 0	108 0	108	108	108	108	—	—	—	—
	スラグ捲込み	75 33	103 5	95 13	78	96	72	69	*	*	○	○
	アンダーカット	43 65	102 6	103 5	67	101	48	44	○	*	○	**
	オーバーラップ	53 55	108 0	107 1	53	107	54	53	○	○	○	○
	判 定	24 84	42 66	61 47	80	79	61	56	**	**	**	**

註 1) 合否の総数 $n=36 \times 3=108$ 但し有害ガス発生については試験姿勢に関係しないから $n=36$ とした。

2) ⑥ にて ○…… $P\{h \geq H\} \geq 0.05$ ……個人差大

*…… $0.05 > P\{h \geq H\} \geq 0.01$ ……個人差中

**…… $P\{h \geq H\} < 0.01$ ……個人差小

6) 増山元三郎； 小数例の纏め方と実験計画の立て方（増補改訂版）p. 89.

れる。

ここで実験結果に戻つて、東大、鶴見造船及び横浜造船所の工員を夫々 **I**、**II**、**III** で表わし、第 1 表（試験結果）から夫々が 36 種の溶接棒に関する下向、立向、上向各溶接姿勢合計 108 回の試験において判定した合否の数 n_{ij} を各試験項目別に求めると第 2 表の **④** となる。

⑤ 行は夫々 **I** と **II**、**II** と **III**、**III** と **I** の 2 人ずつ、及び **I-II-III** 全体に関し、合否が一致した回数 H を示している。

かくすれば 3 人の溶接工が独立に且つデタラメに合否をつけたと考えた場合、実際にあらわれた結果以上に試験結果が一致する確率は (1)、(2) 式によつて直ちに求められ **⑥** 行のようになる。この場合 $P\{h \geq H\}$ の詳しい値はそれ程意味がないのでこの値を 3 段階に区切つて夫々下記の符号をつけた。

****** $P\{h \geq H\} < 0.01$

***** $0.01 \leq P\{h \geq H\} < 0.05$

○ $P\{h \geq H\} \geq 0.05$

かくすれば次に説明するように、これらの符号は溶接工の個人差が試験結果に及ぼす影響の大小を示すと考えられる。即ち ****** 印の箇所については、デタラメに合否をつけたとしてはめつたに起り得ない程結果が良く一致しているわけであるから、“人によつて試験結果は余り違わない”。言いかえれば“溶接工の個人差は試験結果に余り影響しない”と言うことが出来る。反対に **○** 印の箇所はデタラメに合否をつけていると考えられる程結果がばらついており、“溶接工の個人差の影響を大きくうける”と言うことが出来る。***** 印の箇所に対しては厳密には次の様に考えるのが妥当である。即ちこの場合は、溶接工の判定はデタラメであるという帰無仮説を積極的に否定出来る程には試験結果は一致していないが、反面之を積極的に採用してよい程はばらついていない。之は極めて消極的などつちつかずの意見であるので、極く大まかに ****** 印と **○** 印の中間位だと考えてもよいであろう。

IV. 解析結果に対する考え方

以上の検定によつて試験結果にこの意味で個人差の影響の強く現われたものと然らざるものとが区別出来る。電弧の安定性、とけ込の良否、スパッタリングの多少、スラグ除去の難易、被覆剤の溶融状態等は個人差の影響が少く、人によつて判定結果が違わない。又溶接部外観検査の各項目ではその影響が大である。

性能試験としてはその性能に関して重要な要素について結果がばらつかないような方法で検査することが大切である。

使用性能に関してどの項目が重要な要素であるかについてはこの解析では何も得る所はないから、更に違つた研究が必要である。

ここにのべた検定に於て結果のばらつきが大きかつた各項目についてその原因を考えると大要次のことが言えるから、夫々適当な処置を施す必要がある。

(1) 試験項目の定義が曖昧なもの

例えばスラグの流動性について考えると、之は使用性能に関して重要な要素なのであろうが、どの程度の流動性が溶接に適當であるかという点になると明確なことが分らず、そのため結果がばらつくものと思われる。溶融の均等性等もその部類に属すると推定されるが、こういう項目についてはその内容を更に分析してその特性を適確に把握することが大切であろう。

(2) 溶接電流の大小、電弧長、運棒法、溶接工の技倆等の外的な条件に強く左右されて溶接棒そのものの性質がはつきりと抽出しにくいもの

溶接部の外観検査に属する各項目についてこのことが言えるように思うが、これらについてはかかる影響をうけないような試験方法—例えば機械による溶接—を採用することが必要であろう。然しこの際、操作とか技倆とかに左右され易いか否かということも使用性能としての重要な分野であることを忘れるわけには行かない。

(3) 一致の理論そのものの欠陥に由来するもの

一致の理論を用いての検定では、合否の数がほぼ同数の時は安定した信頼すべき結果が得られるが、各人の判定が合又は否に余り偏つてゐる時は一般に $P\{h \geq H\}$ が大きく出易く、 H の変化によつて $P\{h \geq H\}$ が大きく変化するので信頼度の高い検定が行えない。例えば有害ガス発生の有無については、**I**、**II**、**III** のいずれについても大部分が合格であるため、3 人意見は可成り一致しているのであるが、検定結果は余り良くない。この問

題については更に別の例について詳しくしらべて見なければ十分なこととは分らない。

然し3人を合せるとよく一致していることから考えると個人差の影響は少いであろうと予想される。

又ビード表面の亀裂に関しては全部が合格していたから個人差については何も言えない。

個人差の余りなかつた試験項目については、他の方面の知識からそれが使用性能に関する重要な要素であることが保証されれば、現在のような試験方法を採用しても妥当な判定が行えると考えてよいであろう。

唯ここで注目すべきことは、個々の試験項目に関しては個人差の影響の程度は色々であるが、全体としての判定については3人の意見が極めて良く一致しているという事実—第2表⑥行—である。この事実によつて現在程度の使用性能試験でも相当信頼性のある結果が得られることが推定出来る。又この結果からすれば、使用性能試験に際しては項目毎の可否の合計点によつて判定を下すようなことをせず、総合判定というものを重要視し、個々の試験項目は総合判定をつける際の「目やす」としての意味を持たせるのが適当であろうと推論される。

作業性試験と溶接部の外観検査とでは試験しようとしている性能が相当異なるようであるから、両者を一緒にせず、別々に取扱うべきであろう。

V. あまい、からいの問題等

前節の解析に依てはある特定数だけ合否をつけた時の試験結果の符合度をしらべていて、各人のつけた合否の数、即ち採点のあまい、からいが人によつてどう違うかには全く触れていない。之は小数の溶接工で試験をした時の判定の客観性に関しては極めて重要なことである。今回の試験結果からはこの点についての詳細な論議をすることは困難であるが乱塊法を用いれば判定のあまいからい、即ち評価水準が溶接工によつてどの位異つていのかをしらべることが出来る。その検定結果によればⅠ、Ⅱ、Ⅲの3人については評価水準は相当異つていながら、ⅡとⅢの2人の評価水準はよく一致する⁷⁾。この際Ⅰは東大、Ⅱ、Ⅲは造船所に所属していることは評価水準の差と一応関係があるのではないかと思われる。もしそのようなことが実際相当強く現われるものとすれば、溶接工をどこから選抜するかということに慎重な考慮を払わなければならないであろう。

次に同一の溶接工による判定もいつも一定しているとは考えられない。即ちこの種の試験を繰返して行えば結果が異なることが予想される。これも試験結果の客観性に関しては重要なことであるが、現在の試験結果からはこの点について何も言えない。

VI. 結 論

以上の解析によつて次の事実が明らかになった。

- (1) 「この溶接棒の使用性能は良好か否か」、という問に対する溶接工の解答はよく一致している。従つてこの意味に於て現行の使用性能試験には個人差の影響は少く、その結果は客観性を有している。
- (2) 但し現在その判定の際用いられる各項目については個人差の著しいものがある。
- (3) 試験結果の客観性を一層高めるためには、その評価水準を明確にすることが必要である。

VII. 使用性能試験法に関する意見

現行の方法で使用性能を試験するに当つて次の点に注意を払うべきである。

- (1) 一々の項目については判定の目やすとしての意味をもたせ、その項目別の合否の和をとつて判定するよりは判定という項目を設けて溶接工に総合的判定まで行わせ、その判定だけを問題にする方が信頼度の高い結果が得られる。(今回の試験ではこの方法を採用している)。
- (2) 溶接操作に関連して判定される作業性能と溶接後ビードを検査して判定する溶接部外観検査とは分離すべきである。(現行 JES 9001 号では分離している)。
- (3) 適当な溶接棒を標準用に採用し、評価水準の明確化、均一化(溶接工間の)をはかることが望ましい。
- (4) 溶接工は少くとも2~3名を用いること。この際溶接工の選定に当つては慎重な考慮を払うべきで単に溶接に熟練しているか否かというだけでなく、分析能力の点、経歴の点等が試験目的にかなつていのかどうかをよく考えなくてはならない。
- (5) 溶接条件、操作等を適当に定めること。

7) 計算の詳細は省略。

VIII. あとがき

本研究は昭和 23 年 運輸省海運総局資材部主催の下に行われた被覆溶接棒性能試験に関連して実施された。同部並びに福田 烈, 吉識雅夫, 仲 威雄 等同試験審査委員の諸氏の御援助, 御教示による所大である。又統計学の応用に関しては増山元三郎 (中央気象台) 森口繁一 (東京大学) 両氏の指導を拝いた。本研究の実施に当り御指導下さった以上の諸氏に厚く感謝している。

附 録 (1) 式の誘導

式の誘導に当つて理解を容易にするために次のようなカルタの組合せの問題を考えよう。

n 枚のカルタの一組 D_1 があつて, それは 2 種類のカルタ C_1, C_2 から成り, その各種類に属するカルタの枚数を夫々 n_{11}, n_{12} ($n_{11}+n_{12}=n$) とする。 D_2 を同様に C_1, C_2 からなるもう一つの組, D_3 を同様の第三組としその種類に属するカルタの枚数を夫々 $n_{21}, n_{22}; n_{31}, n_{32}$ ($n_{21}+n_{22}=n_{31}+n_{32}=n$) とする。

この三組のカルタ D_1, D_2, D_3 を夫々よく切つてその各から一枚ずつのカルタをとる。この三枚が同種のものであつたらそれは符合したとしよう。これを繰返すと全部で n 対のカルタが取られることになる。そのうち符合したものが h だけあつたとする。各々の組カルタのあらゆる順列を組合わせるとき h は 0 から n までの値をとりうる。そのあらゆる順列がみな同じ確率で起るとすれば h は如何なる分布法則に従うであろうか。又 h がある値 H 以上となる確率 $P\{h \geq H\}$ は如何。

このカルタの組合せの問題の解を吾々の求めている解と結びつけることは極めて容易である。

$P\{h \geq H\}$ を求めるには符合数 h が $h \geq H$ を満足するようなカルタの対応の仕方の数 $N\{h \geq H\}$ を求め之を三組のカルタの対応の仕方の総数 N_0 で割ればよい。

ここで N_0 は次式で与えられる。

$$N_0 = \frac{n!}{n_{11}! n_{12}!} \times \frac{n!}{n_{21}! n_{22}!} \times \frac{n!}{n_{31}! n_{32}!} \quad (a)$$

次に $N\{h \geq H\}$ を求めるために計数母函数

$$\phi = \left(\sum_{i,j,k} x_i y_j z_k e^{\delta_{ijk}\theta} \right)^n \quad (b)$$

$$i, j, k = 1 \text{ 又は } 2$$

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i=j=k) \\ 0 & (i=j=k \text{ 以外の場合}) \end{cases}$$

を考える。補助変数 x_1, x_2 , は第一のカルタの組 D_1 の種類 C_1, C_2 に対応し, $y_1, y_2; z_1, z_2$ は夫々第二第三の組 D_2, D_3 の種類, C_1, C_2 に対応する。

ϕ の n 個の因数のうち任意の一つにおける $x_i y_j z_k e^{\delta_{ijk}\theta}$ なる項は第一の組の C_i に属するカルタと第二の組の C_j に属するカルタと第三の組の C_k に属するカルタとが対になるという事象に対応する。 $i=j=k$ ならば符合が起り, $e\theta$ なる因数がかかってくる。そこで今, ϕ の一般項を考えるとそれは

$$(x_{i_1} y_{j_1} z_{k_1} e^{\delta_{i_1 j_1 k_1} \theta}) (x_{i_2} y_{j_2} z_{k_2} e^{\delta_{i_2 j_2 k_2} \theta}) \cdots (x_{i_n} y_{j_n} z_{k_n} e^{\delta_{i_n j_n k_n} \theta})$$

なる形となり, これは D_1 の C_{i_1} と D_2 の C_{j_1} , D_3 の C_{k_1} ; D_1 の C_{i_2} と D_2 の C_{j_2} , D_3 の C_{k_2} ; $\cdots$; D_1 の C_{i_n} と D_2 の C_{j_n} , D_3 の C_{k_n} なる n 個の対が起るという事象に対応している。しかし D_1, D_2, D_3 の構成は C_1 が n_{11}, n_{21}, n_{31} , C_2 が n_{12}, n_{22}, n_{32} 枚であるから実際に起りうる事象に対応する項は,

$$e^{h\theta} \cdot x_1^{n_{11}} \cdot x_2^{n_{12}} \cdot y_1^{n_{21}} \cdot y_2^{n_{22}} \cdot z_1^{n_{31}} \cdot z_2^{n_{32}} \quad 0 \leq h \leq n \quad (c)$$

なる形をもつものだけである。尚この際 0 と n の間のある h に対してこのような項が存在しないこともある。即ち与えられた各組の構成に対し任意個数の符合が必ずしも起りうるとは限らないのである。

(c) に示した項は丁度 h 個符合のおきる或る一つの対応に相当するものであるが, そのような項は一般にいくつが存在する。それ故に ϕ を展開して (c) なる項の係数を求めればそれが丁度 h 個の符合を生ずるような対応の数になる。従つて $h \geq H$ なる項の係数をすべて加えれば, $N\{h \geq H\}$ が求められる。そこで ϕ の展開式に於ける (c) の係数を $K_h(\phi)$ で表わせば,

$$N\{h \geq H\} = \sum_{h=H}^n K_h(\phi) \quad (d)$$

である。ここで ϕ を書きかえれば,

$$\phi = \{(x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 z_2) e^{\theta} + [(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2) - (x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 z_2)]\}^n \quad (e)$$

これを展開して

$$\phi = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} e^{h\theta} (x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 z_2)^h [(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2) - (x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 z_2)]^{n-h} \quad (f)$$

更に [] を展開して

$$[]^{n-h} = \sum_{g=0}^{n-h} \binom{n-h}{g} (-1)^{n-g-h} (x_1 + x_2)^g (y_1 + y_2)^g (z_1 + z_2)^g (x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 z_2)^{n-g-h}$$

之を (f) に代入すると,

$$\phi = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} e^{h\theta} \sum_{g=0}^{n-h} \binom{n-h}{g} (-1)^{n-g-h} (x_1 + x_2)^g (y_1 + y_2)^g (z_1 + z_2)^g (x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 z_2)^{n-g} \quad (g)$$

(g) 式より

$$K_h(\phi) = \sum_{g=0}^{n-h} \binom{n}{h} (-1)^g \binom{n-h}{g} T_g'$$

$$T_g' = \sum_{u_1, u_2} \frac{g! \cdot g! \cdot g! \cdot (n-g)!}{(n_{11}-u_1)! (n_{21}-u_1)! (n_{31}-u_1)! (n_{12}-u_2)! (n_{22}-u_2)! (n_{32}-u_2)! u_1! u_2!}$$

ここで $u_1 + u_2 = n - g$

$$K_h(\phi) = \sum_{g=0}^{n-h} n! \binom{n-g}{h} (-1)^{n-g-h} T_g$$

$$T_g = \sum_{u_r} \frac{g! \cdot g!}{\prod_r (n_{1r}-u_r)! (n_{2r}-u_r)! (n_{3r}-u_r)! u_r!} \quad (r=1, 2; u_1 + u_2 = n - g)$$

$$\begin{aligned} \therefore N\{h \geq H\} &= \sum_{h=H}^n K_h(\phi) \\ &= \sum_{h=H}^{n-g} \sum_{g=0}^{n-h} n! \binom{n-g}{h} (-1)^{n-g-h} T_g \\ &= \sum_{g=0}^{n-h} T_g \cdot n! \sum_{h=H}^{n-g} \binom{n-g}{h} (-1)^{n-g-h} \\ &= \sum_{g=0}^{n-h} n! T_g \cdot (-1)^{n-g-H} \binom{n-g-1}{H-1} \end{aligned} \quad (h)$$

故に (h) 式と (a) 式とから

$$\begin{aligned} P\{h \geq H\} &= \frac{N\{h \geq H\}}{N_0} \\ &= \frac{n_{11}! n_{12}! n_{21}! n_{22}! n_{31}! n_{32}!}{n! n!} \sum_g T_g \cdot R_g \\ R_g &= (-1)^{h-g-H} \binom{n-g-1}{H-1} \end{aligned}$$

となつて (1) 式が得られる。

参 考 文 献

- (1) 北川敏男；統計学の認識 白揚社 1949.
- (2) 増山元三郎；推計学への道 東大共同協会 1950.
- (3) S. S. Wilks；Mathematical Statistics 1944.
- (4) 小河原正己；数理統計学 下 1948.
- (5) 増山元三郎；小数例の纏め方と実験計画の立て方 (改訂版) 1949.