(昭和 29 年 11 月造船協会秋季講会に於て講演)

防撓矩形板の撓に就いて

正員 工学士 樋口 道之助

Abstract.

Rectangular Plate with Reinforcements.

By Michinosuke Higuchi, *Kogakushi, Member.*

This investigation considers the problem of deflections and strength of the rectangular plate with reinforcements under general distribution of loading, and under the boundary conditions in which one pair of opposite edges normal to reinforcements are simply supported, the other pair of edges are elastically supported, by reinforcements. And all reinforcements have rigidity against twist as well as against deflection, and those are built in with brackets which have elastic constants for angular displacements.

We express the influences of reinforcements on the rectangular plate in Dirac's impulse function $\delta(x, x_i)$ and $\delta'(x, x_i)$, and we apply the double or single Fourier Transformation to solve the equation of equilibrium of the rectangular plate under the above boundary conditions.

§ 1. 緒 言

防撓矩形板の撓及強度については、已に数回に渉り発表してきたものであるが、以前の論文において周辺の条件には一定の限度があり、自由に境界条件を取り得なかつた。即ち以前の論文においては、 $x=0, x=a$ の辺は弾性固定とし $y=0, b$ の辺は単純支持とした。周辺における撓はすべて許されなかつた。本論文においては上記条件を大幅に緩和すると共に、防撓材の端部も実際の場合を考慮して肘板固着の場合を考えることとする。

本論文における境界条件及附加条件を列記すれば、下記の如きものである。

- 1) $y=0, b$ の辺は以前と同じく単純支持とするも防撓材の端部には肘板を附してあるので単純支持ではなく弾性固定とする。
- 2) $x=0, a$ の辺においては撓 $w=0$ であつて、この辺にも防撓材を附加し、従つて捩れ剛性の存在による角変位も存在する。
- 3) 防撓材はすべて撓に対する剛性を有すると共に捩れに対する剛性も有すること以前の論文と同様である。

斯様な境界条件並びに附加条件を満足する

★ 1 図

解を求めるに以前の論文においては、 $w = \sum_{m,n} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ と置き係数 a_{mn} を求めるに無限マトリックス方程式を解き、解を得たのであるが、本論文においては、フーリエ変換を使用して解を求めることにする。この方法に依れば、解法は割に簡易化され有限元の連立方程式を解けばよいことになる。勿論数学的な意味は全く同一であるが、境界条件、附加条件が自然に入る便があるのである。

本論文においても、集中荷重及び集中モーメントを表わすに衝撃函数 δ, δ' を利用した。

§ 2 記 号

w : 矩形板の撓

D : 矩形板の撓剛度 $= \frac{1}{12} \frac{Eh^3}{1-\nu^2}$

E : " " " のヤング係数

E_i : i 番目の防撓材のヤング係数

I_i : " " " " " " " の断面二次モーメント

G_i : " " " の剪断弾性係数

K_i : " " " " の捩りの断面係数

C_i^0 : " " " の $y=0$ の辺上の肘板の固着係数

C_i^b : " " " の $y=b$ の " " "

p : 荷重

ν : ポアソン比

h : 矩形板の厚さ

$$\lambda = a/b \quad B = \lambda^4 n^4 \sum_{\alpha} \frac{1}{(\alpha^2 + \lambda^2 n^2)^2}$$

$$\gamma_i = \frac{2E_i I_i}{Da} \quad a^0_{mn} = \frac{4}{abD} \frac{1}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} \int_0^a \int_0^b p \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} d\xi d\eta$$

$$\theta_i = \frac{2G_i K_i}{Da} \quad p_c : \text{防撓材上の集中荷重}$$

$$K = \frac{\pi^2 EI}{4Da} \quad p_c^0 = \int_0^b p_c \sin \frac{m\pi\eta}{b} d\eta$$

$$\bar{C}_0^0 = \frac{\pi C_0^0}{EIa} \quad F = \sum_{\alpha} a^0_{\alpha n} \alpha$$

$$\bar{C}_b^0 = \frac{\pi C_b^0}{EIa} \quad G = \frac{1}{\lambda^2 n^2} \sum_{\alpha} a^0_{\alpha n} \{ \alpha^3 + (2-\nu)\alpha\lambda^2 n^2 \}$$

$$A = \lambda^2 n^2 \sum_{\alpha} \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \lambda^2 n^2)^2} \quad G_1 = \frac{1}{\lambda^2 n^2} \sum_{\alpha} a^0_{\alpha n} (\alpha^2 + 2\lambda^2 n^2) \alpha$$

$\delta(x, x_i), \delta'(x, x_i)$: Dirac の第 0 位及第 1 位の衝撃函数

$$M_1 = \sum_{\beta} \frac{KA}{KA\lambda^2\beta^2 + (A+B)^2}$$

$$M_2 = \sum_{\beta} \frac{KA(-1)^{\beta}}{KA\lambda^2\beta^2 + (A+B)^2}$$

$$M = \sum_{\beta} \frac{A}{KA\lambda^2\beta^2 + (A+B)^2} \quad \beta \text{ は奇数}$$

$$N_1 = \sum_{\beta} H \lambda \beta$$

$$N_2 = \sum_{\beta} H (-1)^{\beta} \lambda \beta$$

$$H = \frac{AG_1 + BF}{KA\lambda^2 H^2 + (A+B)^2}$$

$$N_1' = \sum_{\beta} H \lambda \beta \quad \beta \text{ は奇数}, \quad M_1' = \sum_{\beta} \frac{KA}{KA\lambda^2\beta^2 + (A+B)^2} \quad \beta \text{ は奇数}$$

猶 $x=x_i, y=b$ 等の点における函数の値を表わすに, $w_i^b, \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0^0$ の如く右下に x 座標, 右上に y 座標の指数を附す。

§ 3 境界条件

緒言に述べた如き境界条件並びに附加条件を式により表現すれば, 次の如きものとなる。

$$y=0, b \text{ において } w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

但し防撓材の端部を凡て除く

$x=0, a$ に於いて

$$E_0 I_0 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_0 = D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\}_{x=0} \quad (2)$$

$$E_a I_a \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_a = D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\}_{x=a} \quad (3)$$

$$-G_0 K_0 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_0 = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0 \quad (4)$$

$$-G_a K_a \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_a = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_a \quad (5)$$

$$x=0, y=0 \text{ において } E_0 I_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0^0 = -C_0^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0^0 \quad (6)$$

$$x=0, y=b \text{ において } E_0 I_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0^b = -C_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0^b \quad (7)$$

$$x=a, y=0 \text{ において } E_a I_a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_a^0 = -C_a^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_a^0 \quad (8)$$

$$x=a, y=b \text{ において } E_a I_a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_a^b = -C_a^b \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_a^b \quad (9)$$

更に $x=x_i$ なる位置にある防撓材の端部においては,

$$x=x_i, y=0 \text{ において } E_i I_i \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_i^0 = -C_i^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i^0 \quad (10)$$

$$x=x_i, y=b \text{ において } E_i I_i \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_i^b = -C_i^b \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i^b \quad (11)$$

以上は防撓材の存在する場合の条件式であるが、若し $x=0, a$ 又は x_i の位置の中で何れか防撓材が無く、単に肘板のみが附加されている場合には、(6)~(11)式の中これに相等するものは下記の式と取換えねばならない。

$$x=0, y=0 \text{ に於いて } D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_0^0 = -C_0^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0^0 \quad (12)$$

$$x=0, y=b \text{ に於いて } D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_0^b = -C_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0^b \quad (13)$$

$$x=a, y=0 \text{ に於いて } D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_a^0 = -C_a^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_a^0 \quad (14)$$

$$x=a, y=b \text{ に於いて } D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_a^b = -C_a^b \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_a^b \quad (15)$$

$$x=x_i, y=0 \text{ に於いて } D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_i^0 = -C_i^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i^0 \quad (16)$$

$$x=x_i, y=b \text{ に於いて } D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_i^b = -C_i^b \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i^b \quad (17)$$

§ 4 一般理論

緒言に述べた如き防撓材の附加された場合の矩形板の平衡方程式は以前の論文と同じく下記の如く表わされる

$$D \Delta \Delta w = p - \sum_i \left\{ E_i I_i \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_{x=x_i} \delta(x, x_i) + G_i K_i \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=x_i} \delta'(x, x_i) \right\} \quad (18)$$

我々は(18)式を(1)~(11)又はこれ等に代るべき(12)~(17)の条件下に解かねばならない。

(18)式の両辺に下記の如く、変数 x, y に関する二重フーリエ変換を適用すれば、

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b D \Delta \Delta w \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy &= \int_0^a \int_0^b p \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ &- \sum_i \int_0^a \int_0^b \left\{ E_i I_i \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_{x=x_i} \delta(x, x_i) + G_i K_i \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=x_i} \delta'(x, x_i) \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ &\quad dx dy \end{aligned} \quad (19)$$

而してフーリエ変換の理論に依り

$$\begin{aligned}
\int_0^a \int_0^b \Delta \Delta w \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = & \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\} \int_0^a \int_0^b w \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\
& + \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\} \left\{ \int_0^b w_0 \sin \frac{n\pi y}{b} dy - (-1)^m \int_0^b w_a \sin \frac{n\pi y}{b} dy \right\} \\
& + \left\{ \left(\frac{n\pi}{b} \right)^3 + 2 \left(\frac{n\pi}{b} \right) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right\} \left\{ \int_0^a w^0 \sin \frac{m\pi x}{a} dx - (-1)^n \int_0^a w^b \sin \frac{m\pi x}{a} dx \right\} \\
& + \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left\{ \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_0 \sin \frac{n\pi y}{b} dy - (-1)^m \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_a \sin \frac{n\pi y}{b} dy \right\} \\
& + \left(\frac{n\pi}{b} \right) \left\{ \int_0^a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^0 \sin \frac{m\pi x}{a} dx - (-1)^n \int_0^a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^b \sin \frac{m\pi x}{a} dx \right\} \\
& + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) \left\{ w_0^0 - (-1)^m w_0^b - (-1)^n w_a^0 + (-1)^{m+n} w_a^b \right\} \quad (20)
\end{aligned}$$

又衝撃函数 $\delta(x, x_i)$ 及 $\delta'(x, x_i)$ の性質を考慮して、下記の二式を得ることが出来る。

$$\begin{aligned}
E_i I_i \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_{x_i} \delta(x, x_i) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\
= E_i I_i \left[\left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \int_0^b w_{x_i} \sin \frac{n\pi y}{b} dy + \left(\frac{n\pi}{b} \right) \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_i^0 - (-1)^n \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_i^b \right\} \left[\sin \frac{m\pi x_i}{a} \right. \right. \\
E_i K_i \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x_i} \delta'(x, x_i) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\
= G_i K_i \left(\frac{m\pi}{a} \right) \cos \frac{m\pi x_i}{a} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x_i} \sin \frac{n\pi y}{b} dy \quad (22)
\end{aligned}$$

次に更に(2)~(5)式に変数 y に関してフーリエ変換を適用すると、

$$\begin{aligned}
E_0 I_0 \left[\left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \int_0^b w_0 \sin \frac{n\pi y}{b} dy + \left(\frac{n\pi}{b} \right) \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0^0 - (-1)^n \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0^b \right\} \right] \\
= D \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)_0 + (2-\nu) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 \right\} \sin \frac{n\pi y}{b} dy \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_a I_a \left[\left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \int_0^b w_a \sin \frac{n\pi y}{b} dy + \left(\frac{n\pi}{b} \right) \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_a^0 - (-1)^n \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_a^b \right\} \right] \\
= D \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)_a + (2-\nu) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_a \right\} \sin \frac{n\pi y}{b} dy \quad (24)
\end{aligned}$$

$$- G_0 K_0 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 \sin \frac{n\pi y}{b} dy = \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_0 \sin \frac{n\pi y}{b} dy + \nu \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \int_0^b w_0 \sin \frac{n\pi y}{b} dy \quad (25)$$

$$- G_a K_a \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_a \sin \frac{n\pi y}{b} dy = \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_a \sin \frac{n\pi y}{b} dy + \nu \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \int_0^b w_a \sin \frac{n\pi y}{b} dy \quad (26)$$

(21)~(24)式に(6)~(11)式を代入すれば、

$$\begin{aligned}
E_i I_i \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_{x_i} \delta(x, x_i) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\
= E_i I_i \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \sin \frac{m\pi x_i}{a} \int_0^b w_{x_i} \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\
- \left\{ C_i^0 \left(\frac{n\pi}{b} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i^0 - C_i^b \left(\frac{n\pi}{b} \right) (-1)^n \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i^b \right\} \sin \frac{m\pi x_i}{a} \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_0 I_0 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \int_0^b w_0 \sin \frac{n\pi y}{b} dy - C_0^0 \left(\frac{n\pi}{b} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0^0 + C_0^b (-1)^n \left(\frac{n\pi}{b} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0^b \\
= D \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)_0 + (2-\nu) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 \right\} \sin \frac{n\pi y}{b} dy \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_a I_a \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \int_0^b w_a \sin \frac{n\pi y}{b} dy - C_a^0 \left(\frac{n\pi}{b} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_a^0 + C_a^b (-1)^n \left(\frac{n\pi}{b} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_a^b \\
= D \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)_a + (2-\nu) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_a \right\} \sin \frac{n\pi y}{b} dy \quad (29)
\end{aligned}$$

此処で(1), (22), (25), (25), (26)~(29)及(20)式を(19)式に入れると,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^a \int_0^b w \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\
 &= \frac{1}{D \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} \int_0^a \int_0^b p \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\
 & - \sum_i \frac{E_i I_i}{D} \frac{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \sin \frac{m\pi x_i}{a}}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} \int_0^b w_{x_i} \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\
 & + \sum_i \frac{G_i K_i}{D} \frac{\left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \cos \frac{m\pi x_i}{a}}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\
 & + \sum_i \frac{C_i^0}{D} \frac{\left(\frac{n\pi}{b} \right) \sin \frac{m\pi x_i}{a}}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i^0 - \sum_i \frac{C_i^b}{D} \frac{\left(\frac{n\pi}{b} \right) (-1)^n \sin \frac{m\pi x_i}{a}}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i^b \\
 & + \frac{G_0 K_0}{D} \frac{\left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\
 & - \frac{G_a K_a}{D} \frac{(-1)^m \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_a \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\
 & - \frac{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 + (2-\nu) \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} \left[\frac{D}{E_0 I_0} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^4} \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)_0 \right. \right. \\
 & \left. \left. + (2-\nu) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 \right\} \sin \frac{n\pi y}{b} dy + \frac{C_0^0}{E_0 I_0} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^3} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0^0 - \frac{C_0^b}{E_0 I_0} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^3} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0^b \right] \\
 & + \frac{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 + (2-\nu) \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} (-1)^m \left[\frac{D}{E_a I_a} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^4} \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)_a \right. \right. \\
 & \left. \left. + (2-\nu) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_a \right\} \sin \frac{n\pi y}{b} dy + \frac{C_a^0}{E_a I_a} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^3} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_a^0 - \frac{C_a^b}{E_a I_a} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^3} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_a^b \right] \\
 & \quad \quad \quad (30)
 \end{aligned}$$

我々はここで(30)式の両辺にフーリエの逆変換を施す。先ず m について逆変換を行う。

$$\begin{aligned}
 \int_0^b w \sin \frac{n\pi y}{b} dy &= \frac{2}{Da} \sum_m \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} \int_0^a \int_0^b p \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b} d\xi d\eta \\
 & - \sum_i \sum_m \frac{2E_i I_i}{Da} \frac{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \sin \frac{m\pi x_i}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} \int_0^b w_{x_i} \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\
 & + \sum_i \sum_m \frac{2G_i K_i}{Da} \frac{\left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \cos \frac{m\pi x_i}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x_i} \sin \frac{n\pi y}{b} dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_i \sum_m \frac{2C_i^0}{Da} \left(\frac{n\pi}{b} \right) \sin \frac{m\pi x_i}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x_i}^0 \\
& - \sum_i \sum_m \frac{2C_i^b}{Da} \frac{(-1)^n \left(\frac{n\pi}{b} \right) \sin \frac{m\pi x_i}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x_i}^b \\
& + \frac{2G_0 K_0}{Da} \sum_m \frac{\left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a}}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\
& - \frac{2G_a K_a}{Da} \sum_m \frac{(-1)^n \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a}}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_a \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\
& - \sum_m \frac{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 + (2-\nu) \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \left[\frac{2D}{aE_0 I_0} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^4} \int_0^b \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right\}_0 \right. \\
& \quad \left. + (2-\nu) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 \right] \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\
& + \frac{2C_0^0}{E_0 I_0 a} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^3} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0^0 - \frac{2C_0^b}{E_0 I_0 a} \frac{(-1)^n}{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^3} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0^b \Big] \\
& + \sum_m \frac{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 + (2-\nu) \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} (-1)^m \sin \frac{m\pi x}{a} \left[\frac{2D}{aE_0 I_0} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^4} \right. \\
& \quad \times \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)_a + (2-\nu) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 \right\} \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\
& \quad \left. + \frac{2C_a^0}{E_a I_a a} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^3} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_a^0 - \frac{2C_a^b}{E_a I_a a} \frac{(-1)^n}{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^3} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_a^b \right] \quad (31)
\end{aligned}$$

上式に依り左辺において, $\int_0^b w_{x_i} \sin \frac{n\pi y}{b} dy$, $\int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x_i} \sin \frac{n\pi y}{b} dy$, $\int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 \sin \frac{n\pi y}{b} dy$, $\int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_a \sin \frac{n\pi y}{b} dy$, $\int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)_0 + (2-\nu) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 \right\} \sin \frac{n\pi y}{b} dy$ 及び

$\int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)_a + (2-\nu) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_a \right\} \sin \frac{n\pi y}{b} dy$ を作ると, これ等を変数とする $zi+4$ 元の連立方程式が出

来る。但しこの場合 $\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x_i}^0$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x_i}^b$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0^0$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0^b$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_a^0$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_a^b$ は一応既知数と見做すことにする。この連立方程式を仮りに(32)式とすれば, (32)式を解いて変数を決定し, これ等を(31)式に代入して新たにこれを(33)式と命名する。ここにおいて(33)式の両辺に n について逆フーリエ変換を施すと, w が得られる, これを(34)式とする。この(34)式の右辺には前述の $\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x_i}^0$... が未知項として含まれているのでこれ等を決定しなければならない。

先ず(34)式の左辺において前と同様にして, $\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x_i}^0$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x_i}^b$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0^0$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0^b$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_a^0$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_a^b$ を

作ると、これ等を変数とする $2i+4$ 元の連立方程式が得られる。これを(35)式とすれば、(35)式を解いて変数を決定し之等を(34)式に代入して新たにこれを(36)式と命名すれば、(36)式は(18)式の解として求められたわけである。

§ 5 無限長板に一定の間隔をおいて防撓材が附せられている場合

この場合には境界条件として下記の如く、実用化を考慮して簡略化する。

即ち力学諸状態は第2図に示された各パネル毎全く同様であつて全体としては一つのパネル間の繰返しであると仮定する。かく仮定すれば我々は或る一つのパネルについて論ずればよいわけであつて、以下に於いてはこの一つのパネルを取扱う。従つてもはやこのパネルには防撓材は辺にのみ附されているだけで内部には附されていない。依つて我々は先ず $x=0, a$ の辺が防撓材により支持され、しかもこの防撓材の両端には肘板が固着されているものとし、 $y=0, b$ の辺は肘板のある点を除き単純支持と仮定する。

Fig. 2

更に荷重並びに撓等の諸量すばは $x=a/2$ に対して対称であると仮定する。斯様な仮定の下に(31)式は下記の形になる。

$$\begin{aligned}
 \int_0^b w \sin \frac{n\pi y}{b} dy &= \frac{4}{Da^m} \sum \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} \int_0^b \int_0^a p \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b} d\xi d\eta \\
 &+ \frac{4G_0K_0}{Da} \sum \frac{\left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a}}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\
 &+ \sum_m \frac{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 + (2-\nu) \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}{\left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \left[\frac{4D}{aE_0I_0} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^4} \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)_0 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (2-\nu) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 \right\} \sin \frac{n\pi y}{b} dy \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4C_0^0}{E_0I_0a} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^3} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 - \frac{4C_0^b}{E_0I_0a} \frac{(-1)^n}{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^3} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0^b \right] \quad (37)
 \end{aligned}$$

但しここで m は奇数とする。

[1] $C_0^0 = C_0^b = 0$ の場合

(37)式を一般理論で述べた方法で解くと、 $w = \sum_{m,n} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ の係数 a_{mn} は次の如くなる。

$$\begin{aligned}
 a_{mn} &= a_{mn}^0 + \frac{m^3 + (2-\nu)m\lambda^2n^2}{(m^2 + \lambda^2n^2)^2} \frac{(1+\theta_0A)G + \theta_0(\nu A+B)F}{K(1+\theta_0A)\lambda^2n^2 + \theta_0(A+B)^2 + (1-\nu^2)A + 2(1-\nu)B} \\
 &\quad - \frac{\theta_0m\lambda^2n^2}{(m^2 + \lambda^2n^2)^2} \frac{\{K\lambda^2n^2 + (1-\nu^2)A + 2(1-\nu)B\}F - (\nu A+B)G}{K(1+\theta_0A)\lambda^2n^2 + \theta_0(A+B)^2 + (1-\nu^2)A + 2(1-\nu)B} \quad (38)
 \end{aligned}$$

ここで $\theta_0 = \infty$ とすると、

$$a_{mn} = a_{mn}^0 + \frac{m^3 + 2m\lambda^2n^2}{(m^2 + \lambda^2n^2)^2} H - \frac{m\lambda^2n^2}{(m^2 + \lambda^2n^2)} \frac{1}{A} (F - BH) \quad (39)$$

$\theta_0 = 0$ とすると、

$$a_{mn} = a'_{mn} + \frac{G}{K\lambda^2 n^2 + (1-\nu^2)A + 2(1-\nu)B} \frac{m^3 + (2-\nu)m\lambda^2 n^2}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \quad (40)$$

(38)~(40) は一般的な荷重即ち分布荷重並に集中荷重の場合であるが、今特に $x=0, a$ の防撓材上に $p^0(x, 0)$, $p\delta(x, a)$ なる集中荷重が作用し、その外には何ら荷重が作用しない場合には、

$$a_{mn} = \frac{2a^2}{\pi^3 D \lambda n^2} \frac{m^3 + (2-\nu)m\lambda^2 n^2}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \frac{1 + \theta_0 A}{K(1 + \theta_0 A)\lambda^2 n^2 + \theta_0(A+B)^2 + (1-\nu^2)A + 2(1-\nu)B} p_c^0 \\ + \frac{2a^2}{\pi^3 D \lambda n^2} \frac{\theta_0 m \lambda^2 n^2}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \frac{\nu A + B}{K(1 + \theta_0 A)\lambda^2 n^2 + \theta_0(A+B)^2 + (1-\nu^2)A + 2(1-\nu)B} p_c^0 \quad (41)$$

ここで $\theta_0 = \infty$ とすると、

$$a_{mn} = \frac{2a^2}{\pi^3 D \lambda n^2} \left\{ \frac{m^3 + 2m\lambda^2 n^2}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \frac{A}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} p_c^0 \right. \\ \left. + \frac{m\lambda^2 n^2}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \frac{B}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} p_c^0 \right\} \quad (42)$$

$\theta_0 = 0$ とすると

$$a_{mn} = \frac{2a^2}{\pi^3 D \lambda n^2} \frac{m^3 + (2-\nu)m\lambda^2 n^2}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \frac{p_c^0}{KA\lambda^2 n^2 + (1-\nu^2)A + 2(1-\nu^2)B} \quad (43)$$

[2] $C_0^0 \neq 0, C_0^b \neq 0$ の場合

$\theta_0 = \infty$ とすると

$$a_{mn} = a'_{mn} - \frac{KA}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \frac{1}{\lambda n} \{U - (-1)^n V\} \\ \left\{ \frac{m^3 + 2m\lambda^2 n^2}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} + \frac{B}{A} \frac{m\lambda^2 n^2}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \right\} \quad (44)$$

但しここで $a'_{mn} = a'_{mn} + \frac{m^3 + 2m\lambda^2 n^2}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} H - \frac{m\lambda^2 n^2}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \frac{1}{A} (F - BH)$

$$U = \frac{\bar{C}_0^0 N_1 + \bar{C}_0^b \bar{C}_0^b (M_1 N_1 - M_2 N_2)}{1 + \bar{C}_0^0 M_1 + \bar{C}_0^b M_1 + \bar{C}_0^0 \bar{C}_0^b (M_1^2 + M_2^2)}$$

$$V = \frac{\bar{C}_0^b N_2 + \bar{C}_0^b \bar{C}_0^b (M_2 N_1 - M_1 N_2)}{1 + \bar{C}_0^0 M_1 + \bar{C}_0^b M_1 + \bar{C}_0^0 \bar{C}_0^b (M_1^2 + M_2^2)}$$

(a) $C_0^0 = C_0^b = C$ なる時

同時に荷重が $y=b/2$ に対して対称であるとする、

$$a_{mn} = a'_{mn} - \frac{KA}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \frac{U}{\lambda n} \left\{ \frac{m^3 + 2m\lambda^2 n^2}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} + \frac{B}{A} \frac{m\lambda^2 n^2}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \right\} \quad (45)$$

但し $U = \frac{2\bar{C}N_1'}{1 + 2\bar{C}M_1'}$, m, n は奇数, $\bar{C} = \bar{C}_0^0 = \bar{C}_0^b$

ここで $C = \infty$ とすると、(45)式において $U = \frac{N_1'}{M_1'}$

(b) $C_0^0 \neq 0, C_0^b = 0$ なる時

(45)式は形式的にその儘で、 $U = \frac{C_0^0 N_1}{1 + C_0^0 M_1}$

此処で $C_0^0 = \infty$ とすると $U = \frac{N_1}{M_1}$

我々は実用上多く現われる(a)の場合について更に詳しく調べて見る必要がある。問題を簡単にする為に $C_a^0 = C_a^b = \infty$ とし、荷重は $x=a/2$ に対して対称又 $y=b/2$ に対しても同様に対称とすると、(45)式は次の如く書き直さ

れる。

$$a_{mn} = a_{mn}^0 - \frac{m\lambda^2 n^2}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \frac{E}{A} + \left(H - \frac{N_1'}{M_1'} \frac{KA}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \frac{1}{\lambda n} \right) \left\{ \frac{1}{m} - \frac{\lambda^4 n^4}{m(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} + \frac{B}{A} \frac{m\lambda^2 n^2}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \right\}$$

$x=0$ における撓, 板に生ずる曲げモーメント, 防撓材に生ずる曲げモーメント, を夫々下記の形式で表わすものとする,

$$\begin{aligned} w &= \sum_n a_n \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad M_x = \sum_n s_n \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad M_y = \sum_n t_n \sin \frac{n\pi y}{b} \\ M_s &= \sum_n q_n \sin \frac{n\pi y}{b} \\ a_n &= \pi/4 \left\{ H - \frac{1}{\lambda n} \frac{N_1'}{M_1'} \frac{KA}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \right\} \\ s_n &= \frac{\pi^3 D}{4a^2} \frac{\lambda^2 n^2}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \left[\{K\lambda^2 n^2 + A + (2-\nu)B\}F - (\nu A + B)G_1 + \frac{N_1'}{M_1'} \frac{K}{\lambda n} (\nu A + B) \right] \\ t_n &= \frac{\pi^3 D}{4a^2} \frac{\lambda^2 n^2}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \left[\{\nu K\lambda^2 n^2 + \nu A + (2\nu - 1)B\}F - (A + \nu B)G_1 + \frac{N_1'}{M_1'} \frac{K}{\lambda n} (A + \nu B) \right] \\ q_n &= \frac{\pi D}{a} \frac{K\lambda^2 n^2}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \left\{ AG + BF - \frac{N_1'}{M_1'} \frac{K}{\lambda n} A \right\} \end{aligned}$$

更に防撓材の端部にある肘板に生ずる曲げモーメントを M_s^0 とすると $M_s^0 = \frac{\pi^2 D}{4a} \frac{N_1'}{M_1'} K$

以下に集中荷重と一様分布荷重に就いて実例を示す。

1) 防撓材上に一様集中荷重の存在する場合

荷重は $p(y)\{\delta(x, 0) + \delta(x, a)\}$ とする。

$$\begin{aligned} \text{この場合 } a_{mn}^0 &= \frac{8\lambda a^2 p_c^0}{D\pi^4} \frac{1}{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \sin \frac{m\pi 0}{a} \\ F=0, \quad G_1 &= \frac{2a^2 p_c^0}{\lambda n^2 D\pi^3}, \quad H = \frac{2a^2 p_c^0}{\lambda n^2 D\pi^3} \frac{A}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \\ N_1 &= \frac{2a^2}{D\pi^3} \sum_{\beta} \frac{A p_c^0}{KA\lambda^2 \beta^2 + (A+B)^2} \frac{1}{\beta}, \quad N_2 = \frac{2a^2}{D\pi^3} \sum_{\beta} \frac{A p_c^0}{KA\lambda^2 \beta^2 + (A+B)^2} \frac{(-1)^{\beta}}{\beta} \end{aligned}$$

更に $p_c^0 = \frac{2a}{\pi\lambda n} p$ の時即ち y 方向に対して荷重が一定なる場合には, 下記の如くなる。以下で n, β は奇数とする。

$$\begin{aligned} a_{mn}^0 &= \frac{16a^3 p}{D\pi^5} \frac{1}{n(m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \sin \frac{m\pi 0}{a}, \quad F=0, \quad G = \frac{4a^3 p}{D\pi^4 \lambda^2 n^3} \\ H &= \frac{4a^3 p}{D\pi^4 \lambda^2 n^3} \frac{A}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2}, \quad N_1' = \frac{4a^3 p}{D\pi^4 \lambda} \sum_{\beta} \frac{A}{KA\lambda^2 \beta^2 + (A+B)^2} \frac{1}{\beta^2} \quad \beta \text{ は奇数ここで特に } N_c = \sum_{\beta} \frac{A}{KA\lambda^2 \beta^2 + (A+B)^2} \frac{1}{\lambda^2 \beta^2} \text{ と置くと, } (\beta \text{ は奇数}) \\ a_n &= \frac{a^3 p \lambda}{D\pi^3 \lambda n} \frac{A}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \left(\frac{1}{\lambda^2 n^2} - \frac{N_c}{M} \right) \\ s_n &= \frac{ap}{\pi} \lambda^2 n \frac{\nu A + B}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \left(\frac{1}{\lambda^2 n^2} - \frac{N_c}{M} \right) \\ t_n &= \frac{ap}{\pi} \lambda^2 n \frac{A + \nu B}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \left(\frac{1}{\lambda^2 n^2} - \frac{N_c}{M} \right) \\ q_n &= \frac{4a^2 p \lambda}{\pi^3} \frac{K\lambda n A}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \left(\frac{1}{\lambda^2 n^2} - \frac{N_c}{M} \right) \\ M_s^0 &= \frac{a^2 p \lambda}{\pi^2} \frac{N_c}{M}, \quad (M_x)_{y=0} = \frac{ap\lambda}{4} \frac{\nu}{K} \frac{N_c}{M}, \quad (M_y)_{y=0} = \frac{ap\lambda}{4} \frac{1}{K} \frac{N_c}{M} \end{aligned}$$

$$(M_x)_{x=0, y=b/2} = \frac{ap}{\pi} \sum_n \lambda^2 n \frac{\nu A + B}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{\lambda^2 n^2} - \frac{N_c}{M} \right)$$

$$(M_y)_{x=0, y=b/2} = \frac{ap}{\pi} \sum_n \lambda^2 n \frac{A + \nu B}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{\lambda^2 n^2} - \frac{N_c}{M} \right)$$

$$(M_s)_{y=b/2} = \frac{4a^2 p \lambda}{\pi^3} \sum_n \frac{K \lambda n A}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{\lambda^2 n^2} - \frac{N_c}{M} \right)$$

2) 矩形板全面に一様分布荷重を受ける場合

$$a_{mn}^0 = \frac{16a^4 p_0}{D\pi^6} \frac{1}{mn(m^2 + \lambda^2 n^2)^2}, \quad F = \frac{16a^4 p_0}{D\pi^6} \frac{B}{\lambda^4 n^5}, \quad G = \frac{16a^4 p_0}{D\pi^6} \frac{1}{\lambda^4 n^5} (A + 2B)$$

$$H = \frac{16a^4 p_0}{D\pi^6} \frac{1}{\lambda^4 n^5} \frac{(A+B)^2}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2}, \quad N_1' = \frac{16a^4 p_0}{D\pi^6} \sum_{\beta} \frac{1}{\lambda^3 \beta^4} \frac{(A+B)^2}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2}$$

$$a_n = \frac{4a^4 p_0}{D\pi^5} \frac{1}{n} \left[\left\{ \frac{1}{\lambda^4 n^4} - \frac{A}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \frac{\sum_{\beta} \frac{1}{\lambda^4 \beta^4}}{M} \right\} - \frac{KA}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \left(\frac{1}{\lambda^2 n^2} - \frac{N_c}{M} \right) \right]$$

$$q_n = \frac{16a^3 p_0}{\pi^5} \lambda^2 n \left[\left\{ \frac{1}{\lambda^4 n^4} - \frac{A}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \frac{\sum_{\beta} \frac{1}{\lambda^4 \beta^4}}{M} \right\} - \frac{KA}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \left(\frac{1}{\lambda^2 n^2} - \frac{N_c}{M} \right) \right] K$$

$$S_n = \frac{4a^2 p_0}{\pi^3} \lambda^2 n \left[\left\{ \frac{\nu}{\lambda^4 n^4} - \frac{A\nu + B}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \frac{\sum_{\beta} \frac{1}{\lambda^4 \beta^4}}{M} \right\} - \frac{K(A\nu + B)}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \left(\frac{1}{\lambda^2 n^2} - \frac{N_c}{M} \right) \right] 1$$

$$t_n = \frac{4a^2 p_0}{\pi^3} \lambda^2 n \left[\left\{ \frac{1}{\lambda^4 n^4} - \frac{A + B\nu}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \frac{\sum_{\beta} \frac{1}{\lambda^4 \beta^4}}{M} \right\} - \frac{K(A + B\nu)}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \left(\frac{1}{\lambda^2 n^2} - \frac{N_c}{M} \right) \right]$$

$$M_s^0 = \frac{4a^3 p_0}{\pi^4} \left(\frac{\sum_{\beta} \frac{1}{\lambda^4 \beta^4}}{M} - K \frac{N_c}{M} \right)$$

$$(M_x)_{x=0, y=0} = \frac{4a^2 p_0}{\pi^2} \frac{\nu}{K} \left(\frac{\sum_{\beta} \frac{1}{\lambda^4 \beta^4}}{M} - \frac{K}{M} N_c \right), \quad (M_y)_{x=0, y=0} = \frac{a^2 p_0}{\pi^2} \frac{1}{KM} \left(\sum_{\beta} \frac{1}{\lambda^4 \beta^4} - KN_c \right)$$

$$(M_x)_{x=0, y=b/2} = \frac{4a^2 p_0}{\pi^3} \sum_n \lambda^2 n \left[\left\{ \frac{\nu}{\lambda^2 n^2} - \frac{A\nu + B}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \frac{\sum_{\beta} \frac{1}{\lambda^4 \beta^4}}{M} \right\} - \frac{K(A\nu + B)}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \left(\frac{1}{\lambda^4 n^4} - \frac{N_c}{M} \right) \right] (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$(M_y)_{x=0, y=b/2} = \frac{4a^2 p_0}{\pi^3} \sum_n \lambda^2 n \left[\left\{ \frac{1}{\lambda^4 n^4} - \frac{A + B\nu}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \frac{\sum_{\beta} \frac{1}{\lambda^4 \beta^4}}{M} \right\} - \frac{K(A + B\nu)}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \left(\frac{1}{\lambda^2 n^2} - \frac{N_c}{M} \right) \right] (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$(M_s)_{y=b/2} = \frac{16a^3 p_0 K}{\pi^5} \sum_n \lambda^2 n \left[\left\{ \frac{1}{\lambda^2 n^2} - \frac{A}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \frac{\sum_{\beta} \frac{1}{\lambda^4 \beta^4}}{M} \right\} - \frac{KA}{KA\lambda^2 n^2 + (A+B)^2} \left(\frac{1}{\lambda^2 n^2} - \frac{N_c}{M} \right) \right] (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

上記の計算例を以下に示す。

1) 防撓材上へのみ荷重のある場合

$$w = \alpha_w \frac{a^3 p}{D}, \quad (M_s)_{y=b/2} = \alpha_s a^2 p, \quad (M_x)_{x=0, y=b/2} = \alpha_1 a p, \quad (M_y)_{x=0, y=b/2} = \alpha_2 a p$$

$$M_s^0 = \alpha_s^0 a^2 p, \quad (M_x)_{x=0, y=0} = \alpha_3 a p, \quad (M_y)_{x=0, y=0} = \alpha_4 a p \quad \text{と置き, } \lambda=1 \text{ とすれば}$$

K	α_w	α_s	α_1	α_2	α_s^0	α_3	α_4
10^{-2}	0.0250	0.00100	0.214	0.288	0.00121	0.885	2.975
10^{-1}	0.0118	0.00478	0.102	0.136	0.00558	0.413	1.375
1	0.0017	0.00697	0.015	0.020	0.00896	0.066	0.221
10	0.0001	0.00387	0.001	0.001	0.00978	0.029	0.024

2) 矩形板全面に一様分布荷重の作用する場合

$$w = \beta_w \frac{a^4 p_0}{D}, \quad (M_s)_{y=b, z} = \beta_s a^3 p_0, \quad (M_{xy})_{y=b, z} = \beta_1 a^2 p_0, \quad (M)_{xy=0} = \beta_2 a^2 p_0$$

$$M_s^0 = \beta_s^0 a^3 p_0, \quad (M_x)_{x=0} = \beta_3 a^2 p, \quad (M_y)_{x=0} = \beta_4 a^2 p \quad \text{と置き } \lambda = 1 \text{ とすれば,}$$

K	β_w	β_s	β_1	β_2	β_s^0	β_3	β_4
10^{-2}	0.0119	0.0004	0.027	0.114	0.0043	0.319	1.065
10^{-1}	0.0069	0.0028	-0.014	0.058	0.0197	0.147	0.486
1	0.0030	0.0121	-0.048	0.013	0.0265	0.020	0.065
10	0.0022	0.0849	-0.056	0.002	—	0.000	0.000