(昭和 29 年 11 月造船協会秋季講演会に於て講演)

変位係数に関する一考察

正員 工学士 山 越 道 郎

Abstract.

A Study of Displacement Coefficient.

By Michio Yamakoshi, *Kogakushi, Member.*

W. Hovgaard's theory of the distribution of shearing stresses in riveted and welded connections is very useful and of very wide application for stress analysis of the structure of a ship. But his solution contains a constant which he named displacement coefficient and the value of this constant is not yet cleared enough. In this paper we study the displacement coefficient by analysis and clear that it consists of two terms in general, the term owing to the shearing strain in the part besides a connection and the term owing to the slip in the connection. An approximate value of the displacement coefficient about the case shown in Fig. 10 can be calculated from (30), where the function f is given by Table 1 or by Fig. 6 and μ_c is the displacement coefficient owing to the slip in the connection.

1. 緒 言

W. Hovgaard が 1931 年に発表した接手に生ずる剪断応力の分布に関する論文¹⁾は船体構造の応力解析に非常に応用範囲の広い有益な理論であるが、その解法の中に出て来る変位係数と呼ばれる常数の値に就ては未だあまりよくわかっていない。変位係数に関する従来の研究²⁾は何れも接手の迂りに関するものであるが、Hovgaard の理論は Deckhouse や相隣る Hatch Opening の間の Deck Plate 等の応力解析にも応用出来るのであつて、この様な場合に於ける変位係数が単に接手の性質のみによつて決定出来ない事は明らかである。例えばこの様な場合には接手が存在しない場合でも変位係数を考える事が出来るのであつて、本稿では先づこの接手が存在しない場合の変位係数に関し理論的考察を行い、更に接手が存在する場合の変位係数はこれに接手の迂りによる項を加えたものである事を明らかにする。

2. 基本的場合

先ず変位係数の大体の性質を知る為に基本的場合として Fig. 1 の如き場合、即ち長さ $2L$ 幅 B なる矩形張出部を持つた幅 B の帯板が Tension を受ける場合に就て考える。但し張出部と帯板の間には接手は存在せず、又曲げに対しては拘束されているものと仮定する。この問題を Hovgaard の理論を用いて解くには帯板と張出部を夫々一本の bar として取扱うのであるが、説明の都合上先づこれらを夫々 N 本の strip に分けて取扱ひ、更に $N \rightarrow \infty$ とした極限の場合を考え、然る後この場合の変位係数に就て考察する。

即ち Fig. 2 に示す如く帯板及び張出部を夫々 N 等分し、strip に対し上から順次 $1, 2, 3, \dots, 2N$, strip と strip の境界に対し上から順次 $0.1, 2, \dots, 2N$ と番号をつける。今 Fig. 3 に示す如く strip n に生ずる normal stress を p_n , 境界 n に生ずる shearing stress を q_n とし一本の strip の幅即ち B/N を h とすれば、任意の strip の微小長さの平衡条件より次式を得る。

$$dp_n/dx = (q_{n-1} - q_n)/h \quad \dots\dots\dots (1)$$

strip n の変位を u_n , 相隣る二つの strip の間の変位係数を m とし、この場合にも Hovgaard の仮定が成

1) W. Hovgaard ; A New Theory of the Distribution of Shearing Stresses in Riveted and Welded Connections and its Application to Discontinuities in the Structure of a Ship. T.I.N.A. 1931

2) 例えば 寺沢一雄、八木順吉；鉚接手の弾性 造船協会論文集 第 93 号

Fig. 2

Fig. 3

立するものとすれば

$$u_{n+1} - u_n = mq_n \quad (2)$$

問題を弾性の範囲に限定すれば

$$E(du_n/dx) = p_n \quad (3)$$

(1), (2), (3) より u_n 及び p_n を消去すれば

$$q_{n+1} + mEh \frac{d^2 q_n}{dx^2} - 2q_n + q_{n-1} = 0 \quad (n=1, 2, \dots, 2N-1) \quad (4)$$

但し板の縁には shearing stress は作用していないから $q_0 = q_{2N} = 0$ である。(4)は常数係数の連立微分方程式

Fig. 4

であるから、 N が小さい場合には容易に解く事が出来る。然しここで $N \rightarrow \infty$ の極限を考えれば、 $h \rightarrow dy$, $(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1})/h^2 \rightarrow \partial^2 q / \partial y^2$ となるから(4)は次の様になる。

$$\frac{mE}{h} \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = 0 \quad (4)'$$

相隣れる二つの strip の間の変位係数 m は N が十分大きい場合には次の如き値を有するものと考えられる。即ち Fig. 4 より

$$\gamma = (u_{n+1} - u_n)/h \text{ 且 } G\gamma = q_n \quad (5)$$

$$\therefore u_{n+1} - u_n = (h/G)q_n$$

上式と(2)を比較すれば

$$m = h/G \text{ or } mE = 2(1+\nu)h \quad (6)$$

したがって(6)を(4)'に代入すれば

$$2(1+\nu) \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = 0 \quad (4)''$$

さて Fig. 5 に示す様に張出部の両端の位置に於ける帯板内の応力分布を uniform と仮定し座標軸を同図の様にとれば、(4)''に対する境界条件は次の様になる。

$$y=0 \text{ 及び } y=2B \text{ にて } q=0; x=\pm L \text{ にて } B < y < 2B \text{ の時 } p=\sigma_0, 0 < y < B \text{ の時 } p=0 \quad (7)$$

但し σ_0 は uniform な stress の大きさである。実際には隅の処に応力集中を生ずる為この仮定は正しくないが、本稿の目的とする変位係数に対してはこの仮定の影響は殆ど問題とならぬ様である。さて $y=0$ 及び $y=2B$ に於ける境界条件を満足する様に

$$q = \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} X_n(x) \sin \frac{n\pi y}{2B} \quad (8)$$

とおき、(4)''に代入すれば

$$2(1+\nu) \frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} - \left(\frac{n\pi}{2B} \right)^2 X_n(x) = 0 \quad (n=1, 2, \dots) \quad (9)$$

$$\therefore X_n(x) = A_n \sinh \frac{n\pi x}{\sqrt{8(1+\nu)B}} + B_n \cosh \frac{n\pi x}{\sqrt{8(1+\nu)B}} \quad (10)$$

今の場合 q は y 軸に対し逆対称であるから $B_n = 0$, 故に(10)を(8)に代入すれば

$$q = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} A_n \sinh \frac{n\pi x}{\sqrt{8(1+\nu)B}} \sin \frac{n\pi y}{2B} \quad (8)'$$

さて(1)に於て $N \rightarrow \infty$ の極限を考えれば

$$\partial p / \partial x = -\partial q / \partial y \quad (1)$$

$$\therefore p = - \int \frac{\partial q}{\partial y} dx = \varphi(y) - \sqrt{2(1+\nu)} \sum_{n=1,2,\dots} A_n \cosh \frac{n\pi x}{\sqrt{8(1+\nu)}B} \cos \frac{n\pi y}{2B} \quad (11)$$

(2)及び(3)に於て $N \rightarrow \infty$ の極限を考えれば

$$\partial u / \partial y = (m/h)q = (1/G)q \quad (2)'$$

$$E(\partial u / \partial x) = p \quad (3)'$$

(2)'及び(3)'より u を消去すれば

$$\partial p / \partial y = 2(1+\nu) \partial q / \partial x \quad (12)$$

(8)'及び(11)を(12)に代入すれば

$$d\varphi(y)/dy = 0 \quad \therefore \varphi(y) = \text{const.} = c$$

$$\therefore p = c - \sqrt{2(1+\nu)} \sum_{n=1,2,\dots} A_n \cosh \frac{n\pi x}{\sqrt{8(1+\nu)}B} \cos \frac{n\pi y}{2B} \quad (11)'$$

$$\therefore [p]_{x=L} = c - \sqrt{2(1+\nu)} \sum_{n=1,2,\dots} A_n \cosh \frac{n\pi L}{\sqrt{8(1+\nu)}B} \cos \frac{n\pi y}{2B} \quad (13)$$

一方 $x=L$ に於ける境界条件を Fourier 級数で表わせば

$$[p]_{x=L} = \frac{\sigma_0}{2} - \sum_{n=1,2,\dots} \frac{2\sigma_0}{-n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi y}{2B} \quad (7)'$$

故に(13)と(7)'を比較する事により

$$c = \frac{\sigma_0}{2}, \quad A_n = \sqrt{\frac{2}{1+\nu}} \cdot \frac{\sigma_0}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} / \cosh \frac{n\pi L}{\sqrt{8(1+\nu)}B} \quad (14)$$

以上で張出部及び帯板を無限に細かい strip に分けて取扱つた場合の Fig. 1 の状態の応力分布が一応求められたわけであるが、これは y 方向の応力の影響を考慮していないから弾性学の一種の近似解に相当する。然し今の場合には y 方向の応力は x 方向の応力に較べて二次的なものであるから、この近似解は十分の精度を有するものと思われる。山本助教はさきに $E\nu \rightarrow \infty$ の直交異方性板に対し(4)'と同様な基礎方程式を導き、この方程式は細長い等方性板に対しても可成り良い近似解を与える事を実験によつて確かめて居られるが³⁾、以上の解は丁度その場合に相当する。

さて次に Hovgaard の理論の如く、張出部及び帯板を夫々一本の bar として取扱う場合の変位係数に就て考えて見る。Hovgaard の理論によれば bar の平均の tensile stress を σ_{bar} 、plate 及び bar の断面積を A 及び a 、溶接部の throat の厚さを α 、変位係数を μ とすれば

$$\sigma_{\text{bar}} = \frac{\sigma_0 A}{A+a} \left(1 - \frac{\cosh \lambda x}{\cosh \lambda L} \right) \quad (15)$$

$$\text{但し } \lambda = \sqrt{\alpha(A+a)/aA\mu E} \quad (16)$$

Hovgaard の論文に於ける bar 及び plate は夫々今の場合の張出部及び帯板に相当する。したがつて Fig. 1 の場合には板の厚さを t とすれば $a=A=Bt$ 、 $\alpha=t$ 、故に(15)及び(16)は夫々次の様になる。

$$\sigma_{\text{bar}} = \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{\cosh \lambda x}{\cosh \lambda L} \right) \quad (15)'$$

$$\lambda = \sqrt{2/\mu EB} \quad (16)'$$

次にさきに求めた解(11)'より張出部に生ずる normal stress の平均 $\bar{\sigma}_{\text{bar}}$ を求めれば

$$\bar{\sigma}_{\text{bar}} = \frac{1}{B} \int_0^B p dy = \frac{\sigma_0}{2} \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\cosh(nkx/L)}{n^2 \cosh nk} \right] \quad (17)$$

$$\text{但し } k = \pi L / \sqrt{8(1+\nu)}B \quad (18)$$

Hovgaard の理論を用いる場合の変位係数を定義する条件は種々考えられるであろうが、今(15)'の σ_{bar} と(17)の $\bar{\sigma}_{\text{bar}}$ が $x=0$ で等しくなると云う条件で定めるものと仮定すれば

$$\frac{1}{\cosh \lambda L} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2 \cosh nk} \quad (19)$$

$\nu=0.3$ と仮定し、(16)', (18)及び(19)より張出部の縦横比 $2L/B$ と変位係数 μ との関係を求めれば Table 1 及び Fig. 6 の様になる。この様にして定めた変位係数を用い Hovgaard の理論により計算した σ_{bar} と(17)

3) 山本善之；船体縦強力理論の精密化，附録 B 及び附録 D，造船協会論文集 第 86 号（前編）

Table 1

$2L/B$	k	λL	$\mu E/B$	$f(2L/B)$
1	0.487	0.755	0.877	0.4386
2	0.974	1.214	1.357	0.6785
3	1.461	1.683	1.589	6.7944
4	1.948	2.163	1.710	0.8550
16/3	2.598	2.809	1.804	0.9019
20/3	3.247	3.458	1.860	0.9299
8	3.897	4.107	1.896	0.9481
∞	∞	∞	2.107	1.0537

の $\bar{\epsilon}_{\text{bar}}$ を比較すれば Fig. 7 の様になり、両者の相違は実用上差支えない程度と思われる。又張出部と帯板の境界に生ずる shearing stress q_B に対し同様な比較を行えば Fig. 8 の様になり、Hovgaard の理論により計算した q_B は $x=L$ で有限値を与えるが(8)'より計算した q_B はこの点で無限大となる。これはこの点に特異点がある以上弾性問題として取扱えば当然無限大の stress となる筈であつて、Hovgaard の理論が有限の stress を与えるのは同理論が問題を大まかに取扱つてゐる為の誤差である。然し實際は塑性変形を生ずる為無限大の stress は生じないであろうし、又実際の構造は特異点を生じない様に設計されているから、この問題は他の研究に譲つてここでは一応特異点の附近を除外して考える事にすれば、Hovgaard の理論により計算した q_B は大体(8)'より計算した q_B の平均を通つて居り、 $2L/B$ が大きい場合には可成りよく一致している。

したがつて上記の仮定により変位係数を定める事は妥当であると思われる。尚 Fig. 7 に示してある実験値は三

Fig. 6

Fig. 7

菱長崎造船所と共同で行つた実験の結果であつて、以上の解析に於ける種々の仮定はこれより見て大体差支えない様に思われる。

3. 一般の場合

以上で Fig. 1 の場合の変位係数は求められたが、一般の構造に対して一々この様な解析を行う事は面倒であるから、次に以上の結果に基づいて一般の場合の変位係数の近似計算法を考えて見る。先ず(5)式は N が十分大きい場合に成立するのであるが、今仮に $N=1$ の場合にも成立す

るものと考えれば、この場合には $m=\mu$, $h=B$ であるから(6)より

$$\mu E/B = 2(1+\nu)$$

(20)

$\nu=0.3$ と仮定すれば $\mu E/B=2.6$ となる。これを Fig. 6 の $\mu E/B$ と比較すれば前者の方が大きく、その相違は張出部の縦横比 $2L/B$ が小さい場合顕著しい。これは次の如く解釈する事が出来る。即ち shearing stress q の幅方向の分布は張出部と帯板の境界上に於て最大で境界より離れるに従つて減少している。然るに $N=1$ の場合にも (5) 式が成立すると仮定する事は境界上の shearing stress が幅方向に uniform に分布していると考えて shearing strain

Fig. 8

を計算する事であるから、当然 shearing strain したがつて変位係数を overestimate する結果になる。そして q の幅方向の減少の影響は $2L/B$ が小さい場合程大きいから、両者の相違も $2L/B$ が小さい場合程大きくなる。一方 $2L/B \rightarrow 0$ の場合、即ち L に較べて B が非常に大きい様な極端な場合を考えると、この場合には両部分の境界より遠く離れた部分の板は遊んで居り、したがつてこの場合の変位係数は殆んど B に無関係と考えられる。したがつて $B \rightarrow \infty$ の時には $\mu E/B \rightarrow 0$ となるべきである。以上の考察によれば Fig. 6 の変位係数は $N=1$ の場合にも (5) 式が成立すると考えて求めたものに q の減少の影響を補正する或 1 より小さい係数を乗じたものであると考える事も出来るわけであつて、次にこの考え方に基いて一般の場合の変位係数の近似計算法を考えて見る。

先ず変位係数 μ を張出部内の slip に対する変位係数 μ_b と帯板内の slip に対する変位係数 μ_p に分けて考えれば、上記の考察により

$$\mu = \mu_b + \mu_p \text{ or } \mu E = \mu_b E + \mu_p E \quad (21)$$

Fig. 1 の場合には shearing strain は两部分の境界に対し上下対称に分布しているから張出部内及び帯板内に於ける slip は相等しい。故にこの場合には

$$\mu_b E = \mu_p E = \mu E / 2 \quad (22)$$

したがつて Fig. 6 の変位係数を

$$\mu E / B = 2f(2L/B) \quad (23)$$

とおけば、(22)より

$$\mu_b E = \mu_p E = f(2L/B) \cdot B \quad (24)$$

今 Fig. 9 の如く張出部の幅 b 、帯板の幅 B なる少しく一般的な場合を考え、この場合の μ_b 及び μ_p を夫々近似的に張出部、帯板共に幅 b なる場合の μ_b 及び張出部、帯板共に幅 B なる場合の μ_p に等しいと考えれば、(24)より

$$\mu_b E \approx f(2L/b) \cdot b, \quad \mu_p E \approx f(2L/B) \cdot B \quad (25)$$

故にこの近似計算法によつて求めた μE を $(\mu E)_a$ とすれば、(21)より

$$(\mu E)_a = \mu_b E + \mu_p E = f(2L/b) \cdot b + f(2L/B) \cdot B \quad (26)$$

この近似計算法の精度を検討する為に、 $B=3b$ なる特別な場合に対し Fig. 1

の場合と全く同様な計算によつて変位係数を求め、これを(26)によつて計算した近似値と共に Table 2 に示してある。同表の μE と $(\mu E)_a$ を比較すれば、張出部の縦横比 $2L/b$ が小さい場合には極めてよく一致しているが、 $2L/b$ が大きい場合には可成りの相違がある。然しここで変位係数の正值と呼んでいるものは(4)'を解いて求めた $\bar{\sigma}_{bar}$ と Hovgaard の理論によつて求めた σ_{bar} が $x=0$ で等しくなると云う条件で定めたものであつて、 $2L/b$ が大きい場合には Table 2 に示す様にたとえ μE に可成りの相違があつても $[\sigma_{ba}]_{x=0}$ の相違は僅少であるから、この相違は大して問題にする必要はない。したがつて上記の近似計算法は十分の精度を有するものと

Fig. 9

Table 2

$2L/b$	$\mu E/2b$	$(\mu E/2b)_a$	$[\sigma_{bar}]_{s=0}$	$([\sigma_{bar}]_{s=0})_a$
	0.814	0.82	0.229 σ_0	0.227 σ_0
	1.246	1.23	0.420 "	0.423 "
6	1.515	1.48	0.549 "	0.553 "
8	1.700	1.62	0.628 "	0.635 "
12	1.948	1.78	0.705 "	0.712 "
∞	2.810	2.11	0.750 "	0.750 "

論では total slip と接手内の shearing stress q との比を変位係数と定義しているから

$$\mu_b q_b + \mu_p q_p + \mu_c q = \mu q \quad (27)$$

一方張出部及び帯板の板厚を夫々 t 及び T とし、溶接接手の throat の幅を α とすれば

$$q_b t = q \alpha = q_p T \quad (28)$$

故に(27)より

$$\mu E = \mu_b E(\alpha/t) + \mu_p E(\alpha/T) + \mu_c E \quad (29)$$

したがって μ_b 及び μ_p を Fig. 9 の場合と同様な仮定によつて求める事とし、張出部及び帯板の幅を b 及び B とすれば

$$(\mu E)_a = f(2L/b)(b\alpha/t) + f(2L/B)(B\alpha/T) + \mu_c E \quad (30)$$

接手内の slip に対する変位係数 μ_c は大体次の様な値を有するものと思われる。即ち溶接接手の平均の幅を β とし、通常接手の幅は小さいから接手内に於ける shearing stress の幅方向の変化を無視すれば(6)より

$$\mu_c = \beta/G \therefore \mu_c E = 2(1+\nu)\beta \quad (31)$$

(30)は Fig. 10 の場合に限らず、更に少しく一般の場合にも之を応用する事が出来る。例えばその断面が Fig. 11 の如き構造の場合には(30)に於て $b \rightarrow c+d$, $B \rightarrow l$, $T \rightarrow 2T$ とおけばよく、又溶接接手の代りに鉚接手がある場合には(30)の右辺の μ_c に鉚接手の μ_c に対する変位係数を代入すればよい。

Fig. 11

4. 結 言

以上 Hovgaard の理論を用いる場合の変位係数に就て一通り理論的考察を行い、変位係数は一般に接手以外の部分の shearing strain による項と接手の slip による項の和よりなる事を明らかにすると共に前者に対する近似計算式を導いた。Hovgaard の理論を応用すべき構造様式は多種多様であつて、個々の場合に就ては尙検討すべき点も残されているが、変位係数の大体の成立ちは本稿により明らかになし得たものと思う。

終りに終始御懇篤なる御指導を賜りました渡辺教授並びに実験に関し御多忙中御配慮を煩わしました三菱長崎造船所岡部接師に厚く御礼申し上げる次第です。

思われる。

次に上記の近似計算法を Fig. 10 の如く、張出部と帯板の間に溶接接手が存在し、且張出部と帯板の板厚が異なる場合に拡張して見る。先ず張出

Fig. 10

部及び帯板の溶接接手に接する部分の shearing stress を夫々 q_b 及び q_p 、接手内に於ける shearing stress を q とし、張出部内、帯板内及び接手内の slip に対する変位係数を夫々 μ_b , μ_p 及び μ_c とすれば、Hovgaard の理