(昭和 29 年 11 月造船協会秋季講演会に於て講演)

移動する熱源による弾性板の熱応力

正員 工学博士 渡 辺 正 紀*

正員 工 学 士 佐 藤 邦 彦**

Abstract.

Theoretical Analysis of Thermal Stress due to Moving Heat Source.

By Masaki Watanabe, *Kogakuhakushi, Member*
and Kunihiro Satoh, *Kogakushi, Member*.

This paper is one of our studies on the problem of thermal stress and residual stress due to welding. Weld stress problem must be considered from the standpoint of thermo-elastic plasticity, but it is very difficult for the case of thermal stress due to moving electrode. In this paper, therefore, we have made, for the first step, the elastic study on the problem of plane thermal stress due to moving heat source.

We extended at first a general theory of thermal stress due to moving heat source, and as an application we dealt with the problem of straightly moving point heat source with a constant speed in an infinitely large plate. Further we discussed on the principal stress in quasi-stationary state and the effect of high temperature region near the heat source on the distribution of thermal stress.

1. 緒 言

本研究では具体的には溶接熱応力の問題を対象として考えている。この問題については最近種々研究が行われているが、問題の性質上厳密には弾塑性体の問題として取扱う必要がありその取扱いがかなり複雑となる為、その多くは応力分布が一次的と見なし得るような場合⁽¹⁾⁽²⁾とか軸対称応力の場合⁽³⁾のような比較的簡単な場合を取扱っており、実際の溶接時にみられるような熱源の移動する場合についての研究はまだ行われていない。この問題は溶接残留応力、溶接変形、溶接時に発生する亀裂等の問題と関連があるので、どうしても解決しておきたいものの一つである。しかしきなり溶接現象を対象として弾塑性体の問題を扱う事は極めて複雑であるから、本研究では第一段階として板の上を移動する熱源による熱応力を二次元問題として弾性的に取扱つてみる事にした。

先ず最初に我々は平板上を任意の熱源が任意の速さで連続的に移動する場合の熱応力函数を求める方法を考え、その応用として、無限平板上を等速直線移動する線状熱源による熱応力を求めた。ここで二つの場合を考えた。一つは孔のない無限平板の場合であり、他の一つは現在の熱源の周囲に孔の存在する場合である。溶接時には現在の熱源の近傍は高温で変形抵抗を殆んど失つた状態となるので、ここに孔のあいていると考えた後者の場合は板の上に溶接ビードをおいた場合に相当する訳である。

本研究では先ず最初に孔のない無限平板の問題を取扱い、これを基にして温度分布の準定常状態⁽⁴⁾の場合について熱源のまわりの孔の影響を論ずる事とした。

2. 応 力 函 数

今、任意の時刻 t_1 に一点 P_1 に発生した或る熱源が任意の速さ v で任意の道程を移動して時刻 t_2 に点 P_2 に到達した場合を考える。(第 1 図参照) 板の内部にはそれ以外に熱の発生はなく、又境界からの熱の出入もな

* 大阪大学教授

** 大阪大学助教授

第 1 図

$$\nabla^4 \phi = -\alpha E \int_{t_1}^{t_2} \nabla^2 s dt \quad (1)$$

と書ける。若し板の中に特異点があればその点の近傍を除外して矢張り上式が成立する。

一方 $\psi(x, y, v, t)$ を微分方程式 $\nabla^4 \psi = -\alpha E \nabla^2 s$ の特解とし、これを式(1)に代入すれば応力函数 ϕ を求める微分方程式は $\nabla^4 \phi = \nabla^4 \int_{t_1}^{t_2} \psi dt$ と書換えられ、これより ϕ の一般解は次の如くなる。

$$\phi = \int_{t_1}^{t_2} \psi dt + \bar{\phi}(x, y) \quad (2)$$

但し $\phi(x, y)$ は重調和函数である。

すなわち移動する熱源による任意の時刻の熱応力函数の特解は、或る瞬間の熱源による現在の温度上昇 s に対応する応力函数の特解 ψ を時間について積分する事によって求められる。但しこの事が成立するのは函数 s について前述のような条件が満足される場合に限る。

3. 線状熱源の移動による熱応力

上の特別な場合として強さ $q \text{ cal/cm} \cdot \text{sec}$ の線状熱源が無限平板上に一定速度 $v \text{ cm/sec}$ ($v \neq 0$) で直線的に移

第 2 図

動する場合を考える。時刻 t_2 の瞬間を時間の原点にとり、この瞬間の熱源位置を原点として第2図の如く直交座標をとる。なお $t_2 - t_1 = T$ とする。

現在から t 秒前に発生した熱源 (以後便宜上熱源 P_t と称する。) による現在の温度上昇⁽⁶⁾、及びこれに対応する熱応力函数の特解はそれぞれ $s(x, y, t) dt = (q dt / 4\pi\lambda) t^{-1} \exp(-r'^2 / 4kt)$ 及び $\psi = -\alpha E \int_0^r \frac{dr'}{r'} \int_0^r sr' dr'$ で与えられる^{**}。但し λ : 熱伝導率, r' : 熱源 P_t からの距離 ($=\{(x+vt)^2 + y^2\}^{1/2}$) である。函数 $s(x, y, t)$ は $t=0$ の時原点で不連続となるから原点だけを除外して考える事とすると、式(2)の第

1項に対応する熱応力は $\sigma_x = \int_0^T \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} dt, \dots$ から求められる。(附録1式(A.3)参照)

この応力に対応する歪は適合条件を満足しており (附録2参照)、且無限遠で零とする。しかし前述のように原

* 温度拡散率 k は実際には温度の函数である。従つて溶接時のように温度変化の範囲が広い場合には厳密には k を温度の函数として取扱わねばならない。しかしここでは簡単の為通常熱伝導理論になつて k を常数と見なして取扱いを進めることとした。

** ψ の積分の下限は任意であるが、ここでは x 軸上の点で応力が有限値となるようにこの下限を零ととつた。この為 $\sigma_x = \int_0^T \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} dt, \dots$ から応力を計算すると、その中には附録1式(A.3)に示すように $\left(\frac{x+vt}{r^2}, \frac{y}{r^2}\right)$ 及び $\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}\right)$ 等のそれぞれ単独で適合条件を満足する項が含まれる。これらの項を除外したものが微分方程式 $\nabla^4 \phi = -\alpha E \nabla^2 \theta$ の特解から出る応力である。

点に特異点があるから、原点のまわりの微小円孔（半径 r_0 ）上での力及び曲げモーメントの釣合及び円孔の周上での変位の多価性を調べる必要がある。板に外力は働いていないからこの円孔の周辺に働く x 及び y 方向の力の総和及び曲げモーメントは当然零でなくてはならぬ。応力分布は x 軸に関して対称であるから y 方向の力の総和及び曲げモーメントは明かに零となる。また $r_0 \ll vT$ なる事を考慮して x 方向の力の総和 $-\int_0^{2\pi} (\sigma_x \cos \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi) r_0 d\varphi$ を計算すると単位板厚当り次のようになる。（附録1参照）

$$2\pi \left(\frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \cdot \frac{2k}{v} \right) + \alpha E \left(\int_0^{2\pi} r_0 \ell \cos \varphi d\varphi + \frac{k}{v} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r_0} r_0 d\varphi \right)$$

しかるに原点のまわりの微小円孔は等温度曲線と一致すると見なしてよいから、この円の周上では θ は φ に無関係と考えてよく従つて積分 $\int_0^{2\pi} \theta r_0 \cos \varphi d\varphi = 0$ となる。また半径 r_0 、単位板厚の等温面を通じて単位時間に流出する熱量 q は $q = -\lambda \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r_0} r_0 d\varphi$ で与えられるから、これらの関係を用いると結局原点に働く x 方向の力の総和も零となり、原点で力及び曲げモーメントは釣合っている。次に円 r_0 のまわりの変位の多価性を調べると y 方向の変位成分に $u_y = (1+\nu)\alpha \cdot \frac{2k}{v} \cdot \varphi$ なる多価変位を生ずる事がわかつた。

そこでこの多価変位を打消す為の附加応力函数として

$$\bar{\phi} = -(1+\nu) \frac{k}{v} \cdot \frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \cdot x \log r$$

を選ぶ。これから計算した応力を前述の $\sigma_x = \int_0^T \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dt, \dots$ から求められた応力に加えると、結局熱源移動中の熱応力は次式で与えられる。*

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \left[\frac{2k}{v} \left\{ \frac{x+vT}{r_T^2} (1 - e^{-\frac{r_T^2}{4kT}}) - \frac{(3+\nu)}{2} \frac{x}{r^2} + (1+\nu) \frac{xy^2}{r^4} \right\} \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{vx}{2k}} \left\{ \left[S_0 \left(\frac{vr}{2k} \right) \right]^\beta - \frac{x}{r} \left[S_1 \left(\frac{vr}{2k} \right) \right]^\beta \right\} \right] \\ \sigma_y &= \frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \left[\frac{2k}{v} \left\{ -\frac{x+vT}{r_T^2} (1 - e^{-\frac{r_T^2}{4kT}}) - \frac{(1+3\nu)}{2} \frac{x}{r^2} + (1+\nu) \frac{x^3}{r^4} \right\} \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{vx}{2k}} \left\{ \left[S_0 \left(\frac{vr}{2k} \right) \right]^\beta + \frac{x}{r} \left[S_1 \left(\frac{vr}{2k} \right) \right]^\beta \right\} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \left[\frac{2k}{v} \left\{ \frac{y}{r_T^2} (1 - e^{-\frac{r_T^2}{4kT}}) - \frac{(1-\nu)}{2} \frac{y}{r^2} - (1+\nu) \frac{x^2 y}{r^4} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{y}{r} e^{-\frac{vx}{2k}} \left[S_1 \left(\frac{vr}{2k} \right) \right]^\beta \right] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

但しここに r_T : 熱源の始点 P_T と点 (x, y) との距離 $(= \{x+vT\}^2 + y^2)^{1/2}$, r : 現在の熱源位置（原点）と点 (x, y) との距離 $(= (x^2 + y^2)^{1/2})$, $\beta = v^2 T / 4k$, $[S_n(z)]_{\beta_2}^{\beta_1} \equiv \frac{z^n}{2^{n+1}} \int_{\beta_2}^{\beta_1} \frac{e^{-f} - \frac{z^2}{4f}}{f^{n+1}} df$ ($n=0, 1, 2, \dots$) である。

（附録1参照）

式(3)において $T \rightarrow \infty$ とすると準定常状態の熱応力が求められる。この場合式(3)の第1項は零となり、また附録1に示すように $[S_n(z)]^\infty = K_n(z)$ (n 次の変形ベッセル函数) となるから、準定常状態の熱応力は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \left[\frac{2k}{v} \left\{ -\frac{(3+\nu)}{2} \frac{x}{r^2} + (1+\nu) \frac{y^2}{r^2} \right\} - e^{-\frac{vx}{2k}} \left\{ K_0 \left(\frac{vr}{2k} \right) - \frac{x}{r} K_1 \left(\frac{vr}{2k} \right) \right\} \right] \\ \sigma_y &= \frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \left[\frac{2k}{v} \left\{ -\frac{(1+3\nu)}{2} \frac{x}{r^2} + (1+\nu) \frac{x^2}{r^2} \right\} - e^{-\frac{vx}{2k}} \left\{ K_0 \left(\frac{vr}{2k} \right) + \frac{x}{r} K_1 \left(\frac{vr}{2k} \right) \right\} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \left[-\frac{2k}{v} \frac{y}{r^2} \left\{ \frac{(1-\nu)}{2} + (1+\nu) \frac{x^2}{r^2} \right\} + e^{-\frac{vx}{2k}} \cdot \frac{y}{r} K_1 \left(\frac{vr}{2k} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(4)の最初の項は移動坐標の原点において x 軸の正方向即ち熱源の進行方向に作用する大きさ $2\pi \left(\frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \cdot \frac{2k}{v} \right)$ なる集中力による応力に相当し⁽⁷⁾、この項は原点に発生した瞬間線状熱源によるものである。また式(3)と式(4)

* 式(3)は $vT \neq 0$ として導かれたものであるから、 $vT=0$ の場合には成立しない。

第3図(a) 熱源移動中の熱応力 (x 軸上の σ_x の分布) 第3図(b) 熱源移動中の熱応力 (x 軸上の σ_y の分布) 第3図(c) 熱源移動中の熱応力 y 軸上の応力分布

とを比較すると、式(3)の第1項は不定常状態の影響をあらわしている事がわかる。なお当然の事であるが応力分布は x 軸に關し対称で x 軸上では $\tau_{xy}=0$ となる。

以上の式について数値計算を行つてみる。今 $\frac{vx}{2k} \equiv X$, $\frac{vy}{2k} \equiv Y$, $\frac{vr}{2k} \equiv R$, $\frac{v^2 T}{2k} \equiv m$ なる無次元数を用い、 $m=2, 6$, 及び ∞ (準定常状態) の場合について x 軸上及び y 軸上の応力分布を計算してみると第3図のようになる。これから次の特性が明かになった。すなわち(1)現在の熱源のやや前方では σ_x, σ_y ともに圧縮応力、熱源のやや後方では σ_x, σ_y ともに引張応力で現在の熱源位置において応力分布の不連続がおこる。これは原点に発生した瞬間線状態熱源による x の正方向の集中力の影響によるものと考えられる。(2)原点から或程度離れるとこの集中力の影響が小さくなる為、 σ_x は大体において圧縮応力、 σ_y は引張応力となる。(3)不定常状態 (m = 有限値) では熱源の始点のやや後方に応力のピークを生じ、その値は m の増大に伴つて漸次小さくなるとともに後方へ移動する。(5)現在の熱源の近傍では熱源の前方の応力の勾配の方が後方のそれに比して大きい。この特性は移動する熱源による温度分布の特性と類似している。次に y 軸上の応力分布についていえば、(6) σ_y

は常に圧縮応力であるが、 σ_x は熱源の近傍では圧縮応力熱源から或程度離れると引張応力となる。(7) τ_{xy} の符号*は熱源の近傍で正であるが、これは原点に働く x の正方向の集中力の影響によるものと考えられ、熱源から或程度離れると当然 $\tau_{xy} < 0$ となる。

4. 熱の供給が停止せられた直後の熱応力

次に或時間 (T 秒間) だけ線状熱源が直線的に移動して後、ここで熱の供給が停止せられて温度が下つていく状態での熱応力を求めてみる。坐標軸を前節と同様にとり、熱の供給が停止せられてから t_a 秒後の状態について考える。この場合には $s(x, y, t) = (q/4\pi\lambda)(t+t_a)^{-1} \exp(-r'^2/4k(t+t_a))$ で与えられるから、前の場合と同様の方法で応力を求めると次のようになる。(附録1参照)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \left[\frac{2k}{v} \left\{ \frac{x+vt}{r^2} (1 - e^{-\frac{rT^2}{4k(T+t_a)}}) - \frac{x}{r^2} (1 - e^{-\frac{r^2}{4kt_a}}) \right\} \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{vx}{2k}} \left\{ [S_0(z)]_{\beta_2}^{\beta_1} - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+y^2}} [S_1(z)]_{\beta_2}^{\beta_1} \right\} \right] \\ \sigma_y &= \frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \left[-\frac{2k}{v} \left\{ \frac{x+vt}{r^2} (1 - e^{-\frac{rT^2}{4k(T+t_a)}}) - \frac{x}{r^2} (1 - e^{-\frac{r^2}{4kt_a}}) \right\} \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{vx}{2k}} \left\{ [S_0(z)]_{\beta_2}^{\beta_1} + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+y^2}} [S_1(z)]_{\beta_2}^{\beta_1} \right\} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \left[\frac{2k}{v} \left\{ -\frac{y}{r^2} (1 - e^{-\frac{rT^2}{4k(T+t_a)}}) - \frac{y}{r^2} (1 - e^{-\frac{r^2}{4kt_a}}) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{y}{\sqrt{\xi^2+y^2}} e^{-\frac{vx}{2k}} [S_1(z)]_{\beta_2}^{\beta_1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

但し $\xi \equiv x - vt_a$, $z \equiv \frac{v}{2k} \sqrt{\xi^2 + y^2}$, $\beta_1 \equiv \frac{v^2 t_a}{4k} (T+t_a)$, $\beta_2 \equiv \frac{v^2 t_a}{4k}$ である。

式(5)の応力は無限遠で零となる。その他の点には特異点はないのでこれがこの場合の熱応力となる。なお $t_a \rightarrow \infty$ の場合にも上の応力は当然零となる。

式(5)において $\frac{vr}{2k}, \frac{v^2 T}{2k} \gg \frac{v^2 t_a}{2k}$ の場合には近似的に次のように書換えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \left[\frac{2k}{v} \left\{ \frac{x+vt}{r^2} (1 - e^{-\frac{rT^2}{4kT}}) - \frac{x}{r^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{vx}{2k}} \left\{ [S_0\left(\frac{vr}{2k}\right)]^\beta - \frac{x}{r} [S_1\left(\frac{vr}{2k}\right)]^\beta \right\} \right] \\ \sigma_y &= \frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \left[-\frac{2k}{v} \left\{ \frac{x+vt}{r^2} (1 - e^{-\frac{rT^2}{4kT}}) - \frac{x}{r^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{vx}{2k}} \left\{ [S_0\left(\frac{vr}{2k}\right)]^\beta + \frac{x}{r} [S_1\left(\frac{vr}{2k}\right)]^\beta \right\} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \left[\frac{2k}{v} \left\{ -\frac{y}{r^2} (1 - e^{-\frac{rT^2}{4kT}}) - \frac{y}{r^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{y}{r} e^{-\frac{vx}{2k}} [S_1\left(\frac{vr}{2k}\right)]^\beta \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

この式は熱の供給の停止せられた直後 ($t_a \rightarrow +0$) の熱応力をあらわす近似式である。但し原点の極く近傍ではその誤差が大となる。なお式(6)を式(3)と比較すると応力函数 $-x \log r$ に対応する項だけが異つている。

前節と同様の無次元数を用いて式(6)の数値計算を行つた結果を第4図に示す。これを第3図と比較すると次のような相異点が見出される。すなわち熱源の後方では σ_x, σ_y とともに圧縮応力になるとともに、全体として熱源の前方の応力は+側へ、また熱源の後方の応力は-側へ移動している。しかし熱源の近傍を除いて応力分布の傾向は前の場合と大差がない。また式(3)と式(6)とを比較すれば明かなように y 軸上の σ_x, σ_y の分布は前の場合と全く同様であるが、 τ_{xy} の符号は全体として負となる。第3図と第4図に示される以上のような相異は原点における特異点の有無に基因するものと考えられる。

* τ_{xy} の正負は第3図(c)に示すようにとつてゐる。

第4図(a) 熱源停止後の熱応力

—x 軸上の σ_x の分布

第4図(b) 熱源の停止後の熱応力

—x 軸上の σ_y の分布

第4図(c) 熱源停止直後の熱応力

—y 軸上の τ_{xy} の分布

直後の主応力方向を求めてみた。式(6) (但し $T \rightarrow \infty$ とおいたもの) を使用すると、速度 v が零でない有限値をとる限り $\tan 2\theta = \tan \varphi$ が得られ、従つて主応力方向は

$$\theta = \frac{n\pi}{2} + \frac{\varphi}{2} \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (8)$$

という簡単な形で与えられる。式(8)は熱の供給が停止せられた直後の状態における主応力方向であるが、ここでは熱源移動中(準定常状態)の主応力方向も近似的に式(8)で与えられると仮定する*。

式(8)からわかるように任意の点の主応力方向は今の場合熱源の強さ q 及びその移動速度 v に無関係で、その点と現在の熱源位置とを結ぶ直線が x 軸となす角度 φ だけで定まつてしまう。なお任意の点 P の主応力方向は第5図に示すように x 軸上に $OA \equiv OP$ なる点 A をとり AP を結ぶという簡単な作図によつて求める事が出来る。以上の特性は溶接時の熱応力状態を考えるのに極めて興味ある特性である。

次に主応力曲線を求めてみる。主応力曲線 $y=f(x)$ は微分方程式 $dy/dx = \tan \theta$ の解として与えられる。今式

* x 軸上 ($\varphi=0$ 又は π) 及び y 軸上 ($\varphi=\pi/2$) では式(7)から求めた主応力方向は式(8)から求めたものと一致する。 $\varphi=\pi/4$ 及び $(3/4)\pi$ の場合には式(7)から主応力方向を求めると次のようになる。

$R' \equiv \frac{vr}{2k}$	2.0	4.0	6.0	8.0
$\varphi = \frac{\pi}{2}$	36°35'	35°25'	35°25'	35°25'
$\varphi = \frac{3\pi}{4}$	94°50'	100°20'	124°0'	134°0'

一方式(8)から求めた一つの主応力方向は $\varphi=\pi/4$ の場合 $22^\circ 30'$ 、 $\varphi=(3/4)\pi$ の場合 $157^\circ 30'$ であるから、 $\varphi=(3/4)\pi$ の附近では R の小さい場合誤差が大きいが、その他の点では熱源移動中の主応力方向を式(8)によつてあらわしても第一近似としては許容し得るであろう。

(8)から主応力方向の一つを $\phi_1 = \frac{\varphi}{2}$, 他の一つを $\phi_2 = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}$ とし, それぞれに対応する主応力曲線群を曲線群 I 及び II と名付けることとすれば, 主応力曲線の微分方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm 1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\pm \sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}$$

で与えられる。但し複号は曲線群 I 及び II に対応するものとする。(以下同様) これを解けば主応力曲線は

$$\sqrt{x^2 + y^2} \mp x = C \quad (9)$$

で与えられる。(但し C : 積分常数) これより主応力曲線は x 軸に関して対称な抛物線群で, 曲線群 I は右開き, 曲線群 II は左開きであることがわかる。(第 6 図参照)

次にこの主応力曲線と準定常状態における等温度曲線との関係について吟味してみよう。中根, 藤本両氏の研究⁽⁸⁾によると, 準定常状態における等温度曲線は現在の熱源の近傍 $0 < R \left(\equiv \frac{vr}{2k} \right) \lesssim 4$ の範囲では近似的に楕円となり, 熱源から充分遠い処では略々抛物線状になる事が明かにせられている。従つて現在の熱源から或程度離れると主応力曲線と等温度曲線とが一致する可能性が考えられる。これを調べる為に主応力曲線群 II と等温度曲線との切線の勾配を比較してみる。準定常状態の温度上昇 $\theta = (q/4\pi\lambda) \times 2K_0(R)e^{-R\cos\varphi}$ から, 等温度曲線の切線の勾配は,

$$\tan \theta_0 = - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) / \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = - \left\{ \frac{K_0(R)}{K_1(R)} + \cos \varphi \right\} / \sin \varphi$$

で与えられる。一方主応力曲線群 II の切線の勾配は前述のように $\tan \phi_2 = -(1 + \cos \varphi) / \sin \varphi$ で与えられるから, 若し $K_0(R)/K_1(R) = 1$ ならば両曲線群は一致することとなる。しかるに $K_0(R)/K_1(R)$ の値は $R = 0 \sim \infty$ の範囲で次表に示すようになる。

$R \left(\equiv \frac{vr}{2k} \right)$	0	1.0	2.0	3.0	4.0	6.0	8.0	10.0	∞
$K_0(R)/K_1(R)$	0	0.699	0.812	0.866	0.890	0.922	0.945	0.951	1.000

これから $R \gtrsim 10$ の場合には等温度曲線と主応力曲線群 II とは殆んど一致すると見て差支えなからう。例えば $\varphi = \frac{\pi}{2}$ すなわち y 軸上では $R = 10$ の時 $\phi_0 = 136^\circ 30'$, $\phi_2 = 135^\circ 0'$ でその誤差は 1% 程度に過ぎない。以前筆者の一人は内的拘束度の見地から等温度曲線と主応力方向との関係を論じ, 等温度曲線の切線方向に主応力 σ_1 , 法線方向に主応力 σ_2 ($\sigma_1 < \sigma_2$) が働くとの結論を与えた⁽⁹⁾。本研究により現在の熱源から或程度離れると上述の事が近似的に成立つ事が確められた。

最後に主応力の大きさを計算してみた。現在の熱源位置を中心として半径 $R = 3.0, 6.0$ 及び 10.0 なる同心円上の主応力分布は第 7 図に示すようになる。

第 5 図 準定常状態における任意の点の主応力方向

第 6 図 準定常状態における主感力曲線

6. 現在の熱源位置のまわりに孔を仮想した場合の応力の乱れ 第 7 図(a) 準定常状態における主応力——熱源移動中の場合

最初に述べたように熱源の強さが或程度以上大になると, 熱源の現在位置の近傍は高温の為に変形抵抗を失つ

第7図(b) 準定常状態における主応力—熱の供給の停止せられた直後の状態

準定常状態の温度分布に対応する熱応力の特解は既に述べたように次式で与えられる(脚註①参照)。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} e^{-\frac{v x}{2k}} \left\{ K_0 \left(\frac{v r}{2k} \right) - \frac{x}{r} K_1 \left(\frac{v r}{2k} \right) \right\} \\ \sigma_y &= -\frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} e^{-\frac{v x}{2k}} \left\{ K_0 \left(\frac{v r}{2k} \right) + \frac{x}{r} K_1 \left(\frac{v r}{2k} \right) \right\} \\ \tau_{xy} &= \frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} e^{-\frac{v x}{2k}} \cdot \frac{y}{r} K_1 \left(\frac{v r}{2k} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

この応力に円孔 ρ_0 の存在による攪乱応力が加わる。これを求めるには式(10)から円 ρ_0 の周上の応力を求め、これを打消して円 ρ_0 の周上での境界条件 ($\sigma_r = \tau_{r\eta} = 0$) を満足するような応力を求めればよい。なお式(10)の応力からは多価変位を生じないので、この附加応力も変位の一価連続性を満足するものでなくてはならない。

式(10)から円 ρ_0 の周上での σ_r 及び $\tau_{r\eta}$ を求める為に、式(10)において $r = r_0$ とおいた後これを極坐標 (ρ, η) に関する応力成分に変換する。この場合次の特性を利用する。すなわち準定常状態の温度上昇を点 O に関する極坐標 (ρ, η) であらわすと $\theta_m = (q/4\pi\lambda) \cdot 2K_0 \left(\frac{v\rho_0}{2k} H \right) \exp \left\{ -\frac{v\rho_0}{2k} (\cos\eta - \delta) \right\}$ で与えられる。

(但し $\delta \equiv d/\rho_0$, $H \equiv (1 + \delta^2 - 2\delta\cos\eta)^{1/2}$) これを η で微分し且 $\partial\theta_m/\partial\eta = 0$ なる事を考慮すると、

$$(q/4\pi\lambda) K_1 \left(\frac{v r_0}{2k} \right) \exp \left(-\frac{v r_0}{2k} \cos\varphi \right) = -\frac{H}{2\delta} \theta_m$$

となる。以上の特性を利用すると円 ρ_0 の周上における応力は次のような簡単な形で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r|_{\rho_0} &= -\frac{\alpha E \theta_m}{2} \left(1 - \frac{\cos\eta}{\delta} + \cos 2\eta \right) \\ \tau_{r\eta}|_{\rho_0} &= -\frac{\alpha E \theta_m}{2} \left(\frac{\sin\eta}{\delta} - \sin 2\eta \right) \end{aligned} \right\}$$

そこで円 ρ_0 の周上でこの応力を打消し、且無限遠で零となるような応力を求める。応力函数として次のものを採用すればよい⁽¹⁰⁾。

$$\phi = \frac{\alpha E \theta_m}{2} \left[A_0 \log \rho + \frac{A_1}{\rho} \cos\eta + \frac{A_2}{\rho^2} \cos 2\eta + B_1 \left\{ \rho \eta \sin\eta - \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \rho \cos\eta \cdot \log \rho \right\} + B_2 \cos 2\eta \right]$$

但し A_0, A_1, A_2, B_1, B_2 は積分常数で、これらは円孔 ρ_0 の周上での境界条件から決定せられる。これから所要の附加応力を求める事が出来る。式(10)の応力に加算する為に直交坐標に関する応力成分の形で与えた方が都合がよい。その結果は次のようになる。

* 材料が変形抵抗を失う温度がはつきり存在するとは考えられぬが、便宜上 θ_m 以上の温度では変形抵抗を失うものと仮定する。実際には θ_m 等温度曲線は x 軸方向に長い卵形となるが、熱源の近傍では近似的に円と見なしても大した誤差はおこらない。

第8図

力の乱れを調べてみる。

今上述の仮想孔が $\theta = \theta_m$ なる等温度曲線に一致し、これが第8図に示したように点 O' を中心とした半径 ρ_0 なる円であると仮定する*。以下 O' に関する極坐標を (ρ, η) 、円 ρ_0 上の任意の点の原点(現在の熱源) O に関する極坐標を (r_0, φ) 、 $OO' = d$ とする。

て応力をうけもたない状態となる。この場合にはこの領域に孔があいていると仮想して議論を進めなくてはならない。ここでは準定常状態の場合について孔の影響による応

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\alpha E \theta_m}{2} \left\{ -\frac{5+\nu}{4\delta z} \cos \eta + \frac{3}{z^2} \cos 2\eta - \frac{1+\nu}{2\delta} \left(\frac{1}{2z} - \frac{1}{z^3} \right) \cos 3\eta + \left(\frac{2}{z^2} - \frac{3}{z^4} \right) \cos 4\eta \right\} \\ \sigma_y &= \frac{\alpha E \theta_m}{2} \left\{ \frac{1-3\nu}{4\delta z} \cos \eta + \frac{1}{z^2} \cos 2\eta + \frac{1+\nu}{2\delta} \left(\frac{1}{2z} - \frac{1}{z^3} \right) \cos 3\eta + \left(-\frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^4} \right) \cos 4\eta \right\} \\ \tau_{xy} &= \frac{\alpha E \theta_m}{2} \left\{ -\frac{3-\nu}{4\delta z} \sin \eta + \frac{1}{z^2} \sin 2\eta - \frac{1+\nu}{2\delta} \left(\frac{1}{2z} - \frac{1}{z^3} \right) \sin 3\eta + \left(\frac{2}{z^2} - \frac{3}{z^4} \right) \sin 4\eta \right\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

但し $z \equiv \rho/\rho_0$

一例として $\delta (\equiv d/\rho_0) = 0.4$ の場合の x 軸上の応力分布を求めてみる。準定常状態の温度分布からこれは $\theta_m / \frac{q}{4\pi\lambda} = 2.74$, $vd/2k = 0.157$, $v\rho_0/2k = 0.392$ の場合に相当する。計算の結果を第9図に示す。この結果によると応力状態は円孔の極く近傍を除いては孔のない場合と大差なく、また応力の大きさについては円孔の周上からその半径の4~5倍程度離れると孔の影響は殆ど無視し得る程度である事がわかる。

最後に式(10)と式(11)とを加えた結果から主応力方向を求めてみると先に求めた式(8), すなわち $\theta = \frac{n\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}$ と同様になる。この事は溶接時の応力状態を考えるのに甚だ都合のよい事である。

7. 結 論

本研究では最初に平板上に任意の熱源が任意の速度で移動する場合の熱応力函数の特解を求める方法を考えた。その結果移動する熱源による任意の時刻の熱応力函数の特解は或る瞬間の熱源による現在の温度上昇に対する応力函数の特解を時間について積分する事によつて求められる事がわかつた。この事は各瞬間の温度上昇が時間及び位置に関する少くとも二次微係数まで連続であれば成立する。若しどこかに特異点があればその部分を除外して考えればよい。

次にこの方法を利用して、無限板上を等速直線移動する線状熱源による熱応力を求めた。先ず熱源移動中の応力を求め、次に熱の供給が停止せられた後の応力を導いた。前者の場合には現在の熱源位置が特異点となり、ここに発生した瞬間線状熱源の為に、この位置で熱源の進行方向に集中力が作用したと同様の効果をうける。

次に熱源の近傍に存在する高温領域に孔を仮想した場合、その周囲の応力状態に及ぼす影響を準定常状態の場合について調べた。その結果、応力分布の傾向は孔の近傍を除いて孔のない場合と大差なく、また応力の大きさについては、仮想した孔の周上から孔の半径の4~5倍程度離れると孔の影響は殆どなくなる事がわかつた。

準定常状態の主応力曲線についても興味ある結果が得られた。すなわち板のどこにも特異点のない場合には任意の点の主応力方向は熱源の条件に無関係に一定で、主応力曲線は二組の拋物線群で与えられる。また熱源から或程度離れたところで主応力曲線群の一つは等温度曲線と略々一致する。

最初に述べたように本研究は具体的には溶接熱応力の問題を対象として考えているのであるが、問題を弾性問題に限定している為、得られた結果は特に熱源の近傍では実際の溶接熱源の場合と多少異なる事も予想せられる。しかし応力分布の全般的な特性は熱源から或程度離れたところについては本研究により略々察知出来る。

附 録 1

任意の瞬間の熱源による現在の温度上昇に対応する熱応力函数の特解は

$$\left. \begin{aligned} \psi &= -\alpha E \int_0^r \frac{dr'}{r'} \int_0^{r'} sr' dr' \\ \text{但し } s &= \frac{q}{4\pi\lambda} \cdot \frac{e^{-\frac{r^2}{4kt}}}{t} \end{aligned} \right\} \quad (A.1)$$

で与えられる。これを $\sigma_x = \int_0^r \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} dt$ に代入すると、

第9図 現在の熱源の周囲に孔を仮想した場合の熱応力

($\theta_m / \frac{q}{4\pi\lambda} = 2.74$ は場合)——点線の孔のない場合を示す。

$$\sigma_x = -\frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \int_0^T \left\{ \frac{2kt}{r'^2} \cdot \frac{(x+vt)^2 - y^2}{r'^2} (1 - e^{-\frac{r'^2}{4kt}}) + \frac{y^2}{r'^2} e^{-\frac{r'^2}{4kt}} \right\} \frac{dt}{t}$$

となる。この積分を行う為、

$$\frac{v^2}{k4} = a, \quad \frac{x^2}{k4} = b, \quad \frac{y^2}{4k} = c, \quad ab = \left(\frac{vx}{4k} \right)^2 = d, \quad ac = \left(\frac{vy}{4k} \right)^2 = g, \quad f = \frac{v^2 t}{4k} = at$$

なる置換を行うと、上の積分は次のように書換えられる。

$$\sigma_x = -\frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \left[\frac{1}{2} \int_0^{aT} \frac{d-g+2\sqrt{d}f+f^2}{(d+g+2\sqrt{d}f+f^2)^2} \cdot df - \frac{1}{2} e^{-2\sqrt{d}} \times \int_0^{aT} \frac{d-g+2\sqrt{d}f+f^2}{(d+g+2\sqrt{d}f+f^2)^2} \cdot e^{-f-\frac{d+g}{f}} \cdot df + g e^{-2\sqrt{d}} \int_0^{aT} \frac{e^{-f-\frac{d+g}{f}}}{d+g+2\sqrt{d}f+f^2} \cdot \frac{df}{f} \right] \quad (A.2)$$

上式の〔 〕内の積分をそれぞれ I_1, I_2, I_3 、とすれば

$$I_1 = - \left| \frac{f+\sqrt{d}}{(f+\sqrt{d})^2+g} \right|_0^{aT} = \frac{4k}{v} \left(-\frac{x+vt}{rT^2} + \frac{x}{r^2} \right)$$

また I_2 を部分積分すると、

$$I_2 = - \left| \frac{f+\sqrt{d}}{(f+\sqrt{d})^2+g} \cdot e^{-f-\frac{d+g}{f}} \right|_0^{aT} - \int_0^{aT} \frac{(f+\sqrt{d})(f^2-d-g)}{(f^2+2\sqrt{d}f+d+g)f^2} \cdot e^{-f-\frac{d+g}{f}} \cdot df$$

故に式(A.2)より

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{2} I_1 - \frac{1}{2} e^{-2\sqrt{d}} \cdot I_2 + g e^{-2\sqrt{d}} \cdot I_3 \right) \\ &= \frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \left[\frac{2k}{v} \left\{ \frac{x+vt}{rT^2} (1 - e^{-\frac{rT^2}{4kT}}) - \frac{x}{r^2} \right\} - \frac{e^{-2\sqrt{d}}}{2} \int_0^{aT} \frac{e^{-f-\frac{d+g}{f}}}{f} \cdot df \right. \\ &\quad \left. + \frac{vx}{8k} e^{-\frac{vx}{2k}} \int_0^{aT} \frac{e^{-f-\frac{d+g}{f}}}{f^2} \cdot df \right] = \frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \left[\frac{2k}{v} \left\{ \frac{x+vt}{rT^2} (1 - e^{-\frac{rT^2}{4kT}}) - \frac{x}{r^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{vx}{2k}} \left\{ \left[S_0 \left(\frac{vr}{2k} \right) \right]^\beta - \frac{x}{r} \left[S_1 \left(\frac{vr}{2k} \right) \right]^\beta \right\} \right] \quad (A.3) \end{aligned}$$

σ_y, τ_{xy} についても同様にして次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \left[-\frac{2k}{v} \left\{ \frac{x+vt}{rT^2} (1 - e^{-\frac{rT^2}{4kT}}) - \frac{x}{r^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{vx}{2k}} \left\{ \left[S_0 \left(\frac{vr}{2k} \right) \right]^\beta + \frac{x}{r} \left[S_1 \left(\frac{vr}{2k} \right) \right]^\beta \right\} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \left[\frac{2k}{v} \left\{ \frac{y}{rT^2} (1 - e^{-\frac{rT^2}{4kT}}) - \frac{y}{r^2} \right\} + \frac{y}{r} e^{-\frac{vx}{2k}} \left[S_1 \left(\frac{vr}{2k} \right) \right]^\beta \right] \end{aligned} \right\} \quad (A.3)'$$

但しここに $r_T = \{(x+vt)^2 + y^2\}^{1/2}$, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\beta \equiv v^2 T / 4k$ である。

また

$$[S_n(z)]_{\beta_2}^{\beta_1} \equiv \frac{z^{\beta_1}}{2^{n+1}} \int_{\beta_2}^{\beta_1} \frac{e^{-f-\frac{z^2}{4f}}}{f^{n+1}} \cdot df \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

上の積分で特に下限 $\beta_2=0$ の時は簡単の為下限を省略することとする。特に $\beta_1=\infty, \beta_2=0$ の場合には $S_n(z)^\infty = K_n(z)$ (n 次の変形ベッセル函数)となる⁽¹¹⁾。なお $n=0$ 及び 1 の場合には次のような物理的意味を持つている。

$$\left. \begin{aligned} \frac{q}{2\pi\lambda} \cdot e^{-\frac{vx}{2k}} \left[S_0 \left(\frac{vr}{2k} \right) \right]^\beta &= \theta \\ \frac{q}{4\pi\lambda} e^{-\frac{vx}{2k}} \left[S_1 \left(\frac{vr}{2k} \right) \right]^\beta &= - \left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{x}{r} + \frac{k}{v} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (A.4)$$

原点に働く x 方向の力の総和 $-\int_0^{2\pi} (\sigma_x \cos \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi) r_0 d\varphi$ を計算するには式(A.3)と式(A.4)とを使用した。

熱の供給が停止せられた後の状態の応力も上の場合と類似の置換によつて求められる。この場合の熱応力は

$$\sigma_x = -\frac{\alpha E q}{4\pi\lambda} \int_0^T \left\{ \frac{2k(t+ta)}{r'^2} \cdot \frac{(x+vt)^2 - y^2}{r'^2} (1 - e^{-\frac{r'^2}{4k(t+ta)}}) + \frac{y^2}{r'^2} e^{-\frac{r'^2}{4k(t+ta)}} \right\} \frac{dt}{t+ta}$$

で与えられる。ここで

$$\xi = x - vt_a, \quad \frac{v^2}{4k} = a, \quad \frac{\xi^2}{4k} = b, \quad \frac{y^2}{4k} = c, \quad ab = d, \quad ac = g, \quad f = a(t+ta)$$

なる置換をすると、上の場合と同様にして式(5)を得る。

附 録 2

式(A.3)から求められる歪は第2節で論じた事から明かなように、当然適合条件を満足しているはずである。念の為にこれを調べてみる。この場合函数 $[S_n(z)]_{\beta_1}^{\beta_2}$ についての次の特性を利用する。

$$\left. \begin{aligned} [S_n(z)]_{\beta_2}^{\beta_1} &= [S_n(z)]^{\beta_1} - [S_n(z)]^{\beta_2} \\ \frac{d}{dz} [S_n(z)]^{\beta} &= \frac{n}{z} [S_n(z)]^{\beta} - [S_{n+1}(z)]^{\beta} \\ \frac{2n}{z} [S_n(z)]^{\beta} &= -\frac{z^{n-1}}{2^n} \cdot \frac{e^{-\beta - \frac{z^2}{4\beta}}}{\beta^n} + [S_{n+1}(z)]^{\beta} - [S_{n-1}(z)]^{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (A.5)$$

(但し $n=0, 1, 2, \dots$)

$\beta \rightarrow \infty$ とするとこれらはベッセル函数 $K_n(z)$ に関する公式と一致する。

式(A.3)の各項の中 $\left(\frac{x+vt}{r'^2}, -\frac{y}{r'^2} \right)$ を含む項、及び $\left(\frac{x}{r'^2}, -\frac{y}{r'^2} \right)$ を含む項は各々単独で適合条件を満足しているから、他のものについて調べる。 $\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha\theta, \dots$ に式(A.3)を代入して、更にこれを $g \equiv \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$ に代入する。式(A.5)の第2式を利用すると、

$$g \equiv \frac{\alpha q}{4\pi\lambda} \left[(1+\nu) \frac{2k}{v} \cdot \frac{x+vt}{4k^2 T^2} e^{-\frac{r'^2}{4kT}} + e^{-\frac{vx}{2k}} \left\{ \frac{v^2}{4k} [S_0]^{\beta} + \left(\frac{v^2 x}{4k^2 r} + \frac{v}{kr} \right) [S_1]^{\beta} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{2vx}{kr^2} - \frac{v^2}{4k^2} \right) [S_2]^{\beta} - \frac{v^2 x}{4k^2 r} [S_3]^{\beta} \right\} \right]$$

上式において $[S_1]^{\beta}$, $[S_2]^{\beta}$ の項の一部を式(A.5)の第3式を用いて書きなおすと $g=0$ となり、適合条件を満足している。

参 考 文 献

- (1) N.S. Boulton & H.E. Lance Martin; Proc. Inst. Mech. Eng. Vol. 133, p. 295/339, (1936)
- (2) 渡辺; 造船協会論文集 86号 p. 173/184 (昭和29年)
- (3) 渡辺, 佐藤; 同上 86号 p. 185/197 (昭和29年)
- (4) D. Rosenthal; The Welding Journal, Vol. 20, No. 5 (1941年)
- (5) 例えば, 渡辺; 熔接学会誌, 17巻8号 (昭和23年)
- (6) 例えば, H.S. Carslaw; Mathematical Theory of the Conduction of Heat in Solid, 2nd Ed. p. 103, (1921年)
- (7) 例えば, 倉西; 弾性学 p. 334 (昭和23年)
- (8) 中根, 藤本; 熔接学会誌, 22巻7号, p. 231/237 (昭和28年)
- (9) 渡辺; 熔接学会誌 18巻, 4号, p. 44/51 (昭和24年)
- (10) J. Prescott; Applied Elasticity, p. 381 (1924年)
- (11) A. Gray & G.B. Mathews; Bessel Functions, p. 51 (1922年)