(昭和 31 年 11 月造船協会秋季講演会に於て講演)

螺旋推進器理論について

正員 工 学 士 山 崎 隆 介*

On the Theory of Screw Propellers

By Ryūsuke Yamasaki, *Kogakushi, Member*

Abstract

The author considered the hydrodynamic characteristics of free-running screw propellers from the point of view of the lifting-surface theory and estimated lift-slope correction factors $k_1(\xi')$ of which the lifting-line theory corresponds to this theory through the medium. Then following results were obtained :

- (i) $k_1(\xi')$ is effected mainly by the contour and the breadth of the blades.
- (ii) $k_1(\xi')$ is mainly due to the self-interference of the blades whereas the mutual interference is secondary.
- (iii) Skews have little influences on the values $k_1(\xi')$.

§ 1. 緒 言

正規の状態で定常的に単独作動中の軸対称な螺旋推進器について考える。空中推進器のように翼の巾の狭いときには河田三治博士¹⁾及び近藤一夫博士²⁾のように翼を一本の渦糸でおきかえても大して誤差はないが、水中推進器のように翼の巾の広いときには一本の渦糸でおきかえることは無理である。今迄の理論では推進器の各翼を、推進器の軸を軸とする円盤で截り、これを平面に展開して得られる直線翼列の一つの翼の性能をとつて、推進器の翼素の二次元的な性能とし、これを三次元翼に適用していた。翼を円盤で截ることは、円盤の同じ面については翼相互の干渉を考えていても、異つた同心円面上の翼素間については何らの影響もないとみなすことである。しかし実際の円盤面内の流れの状態は誘導速度があるために複雑であり、その内部での翼相互の干渉を二次元翼になおして考えるためには物理的にもつと複雑な要素がはいってくるように思われる。そこで翼相互の干渉をなるべく正確に論ずるためには、推進器の翼が薄いとして翼を一枚の渦面又はこれに相当するもので置きかえることが必要である。

他方に於て単独翼自身の場合について考えると、その aspect ratio が小さいときに、翼を一本の渦糸として考える揚力線理論を用いて計算したときには、翼を渦面として考える揚力面理論を用いて計算したときに比べて、はるかに大きな値となる。一般に理論が軽荷重を仮定する場合、迎角が小さく、揚力面理論から出した結果は実験の結果とよく一致している。いいかえると単翼に於ては、その巾が広いときには、揚力線理論から求めた値は実際の値より大きな値をとつており、翼の長さが長くなると、この揚力面理論と揚力線理論の結果は一致するようになる。^{3) 4)}このような単翼の定性的傾向は螺旋推進器にもあてはまるのではないと思われる。

揚力面理論の結果を用いて翼のまわりの流れの curvature correction を考え、揚力線理論の結果を修正することを本論文に於ては考えてみることにする。

§ 2. 揚力面理論による基礎式

軸対称な螺旋推進器〔翼数 N 、ボス半径 r_B 、翼半径 r_0 〕が単独で流体〔一定の密度 ρ 〕中を一定の角速度 Ω で廻転しながら、一定の速度 V で前進していると、この廻転している軸を軸とする円盤座標をとつて考える。軸方向に前進と逆向きに x 、半径方向に r 、廻転の方向と逆向きに角座標 θ をとり、又 dash をつけて翼面上の値を示すことにする。 r 方向の渦面の強さを $\gamma(r', \theta')$ とし、翼の座標を、

原稿受付、7 月 5 日

* 九州大学工学部造船学教室

$$x = x_0(r', \theta'), \text{ 但し } \theta_1(r') \leq \theta' \leq \theta_2(r'), r_B < r' < r_0 \quad (2.1)$$

とすると、古典的ポテンシャル論を用いて翼面上の x 方向, θ 方向の誘導速度 w_x' , w_θ' は次のようになる。

$$\begin{aligned} w_x' &= \frac{1}{4\pi} \int_{r_B}^{r_0} dr'' \int_{\theta_1(r'')}^{\theta_2(r'')} \gamma(r'', \theta'') d\theta'' \left[\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_x} \left(\frac{r''}{h} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_x} - \frac{h}{r''} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_\theta} \right) \right. \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^\infty \frac{d\varphi}{\sqrt{h^2(\varphi + \varepsilon_x)^2 + r'''^2 + r'^2 - 2r''r' \cos(\varphi + \varepsilon_\theta + 2\pi k/N)}} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_x} \left(\frac{r''}{a} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_x} - \frac{a}{r''} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_\theta} \right) \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^{\theta'' - \theta'} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2(\varphi + \varepsilon_x)^2 + r'''^2 + r'^2 - 2r''r' \cos(\varphi + \varepsilon_\theta + 2\pi k/N)}} \Big]_{\varepsilon_x=0, \varepsilon_\theta=0}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} w_\theta' &= -\frac{1}{4\pi} \int_{r_B}^{r_0} dr'' \int_{\theta_1(r'')}^{\theta_2(r'')} \gamma(r'', \theta'') d\theta'' \left[\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_\theta} \left(\frac{r''}{h} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_x} - \frac{h}{r''} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_\theta} \right) \right. \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^\infty \frac{d\varphi}{\sqrt{h^2(\varphi + \varepsilon_x)^2 + r'''^2 + r'^2 - 2r''r' \cos(\varphi + \varepsilon_\theta + 2\pi k/N)}} - \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_\theta} \left(\frac{r''}{a} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_x} - \frac{a}{r''} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_\theta} \right) \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^{\theta'' - \theta'} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2(\varphi + \varepsilon_x)^2 + r'''^2 + r'^2 - 2r''r' \cos(\varphi + \varepsilon_\theta + 2\pi k/N)}} \Big]_{\varepsilon_x=0, \varepsilon_\theta=0}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

ここで上の二つの式は、翼を一定ピッチ $2\pi a$ の板でおきかえ、この上に束縛渦面があり、翼面上の $r'' =$ 一定なる如き翼素上の渦は $\theta'' = \theta'$ なる如き点 (r'', θ') から一所になつて自由渦となり、 $2\pi h$ のピッチをもつ螺旋となつて出て行くことから求めている。尚今の場合何れの渦面も近似的に一定ピッチで縮流はないと考え、又ボスを考えに入れてはいるが、ボスに垂直方向の速度は zero であると云う条件は簡単のため無視している。

次に境界条件を求める。 r 方向の誘導速度と rake との積は二次の微少量として無視すると、

$$(\Omega r' + w_\theta') \frac{\partial x_0(r', \theta')}{r' \partial \theta'} - (V + w_x') = 0 \quad (2.4)$$

が得られる。これに (2.2), (2.3) を代入すると基礎式は次のようになる。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r'} \int_{r_B}^{r_0} dr'' \int_{\theta_1(r'')}^{\theta_2(r'')} \gamma(r'', \theta'') S_B(r', \theta'; r'', \theta''; a) d\theta'' \\ &= \Omega r' \frac{\partial x_0(r', \theta')}{r' \partial \theta'} - V - \frac{1}{r'} \int_{r_B}^{r_0} \Gamma(r'') S_T(r', r''; h) dr'', \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\text{但し } \Gamma(r') = \int_{\theta_1(r')}^{\theta_2(r')} \gamma(r', \theta') d\theta',$$

翼面上の渦面による項

$$\begin{aligned} S_B(r', \theta'; r'', \theta''; a) &= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{r'}{a} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_x} - \frac{a}{r'} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_\theta} \right) \left(\frac{r''}{a} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_x} - \frac{a}{r''} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_\theta} \right) \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^{\theta'' - \theta'} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2(\varphi + \varepsilon_x)^2 + r'''^2 + r'^2 - 2r''r' \cos(\varphi + \varepsilon_\theta + 2\pi k/N)}} \Big]_{\varepsilon_x=0, \varepsilon_\theta=0}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

自由渦による項

$$\begin{aligned} S_T(r', r''; h) &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{r'}{h} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_x} - \frac{h}{r'} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_\theta} \right) \left(\frac{r''}{h} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_x} - \frac{h}{r''} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_\theta} \right) \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^\infty \frac{d\varphi}{\sqrt{h^2(\varphi + \varepsilon_x)^2 + r'''^2 + r'^2 - 2r''r' \cos(\varphi + \varepsilon_\theta + 2\pi k/N)}} \Big]_{\varepsilon_x=0, \varepsilon_\theta=0}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

(2.5) は γ について一次形であるから $\partial x_0(r', \theta') / \partial \theta'$ の値に近い a [$=$ 一定]を用いると、

$$\Omega \cdot \partial x_0(r', \theta') / \partial \theta' - V = (\Omega \cdot \partial x_0(r', \theta') / \partial \theta' - \Omega a) + (\Omega a - V)$$

として (2.5) を二つの積分方程式に分けることが出来る。ピッチ $2\pi a$ を shock-free entrance になるようにとすると第一項に相当する積分方程式は Ludwig-Ginzler⁵⁾ の取扱つた場合に相当し、第二項に相当する式は平板の単翼の場合に相当する。しかし Ludwig-Ginzler は (2.5) のような積分方程式を解いているわけではなく、 γ の分布を最初から仮定して、翼巾の中心線上の曲率を求め、このような curved flow の中の二次元翼の性能から推進器性能を求めている。

さて流体を非粘性且つ非圧縮性と考えるとき、推進器の推力 T_0 及びトルク Q_0 は次のようになる。

$$T_0 = \rho N \int_{r_B}^{r_0} dr' \int_{\theta_1(r')}^{\theta_2(r')} \gamma(r', \theta') (\Omega r' + w_\theta') d\theta', \quad Q_0 = \rho N \int_{r_B}^{r_0} dr' \int_{\theta_1(r')}^{\theta_2(r')} \gamma(r', \theta') (V + w_x') r' d\theta'. \quad (2.8)$$

又翼素の抗力係数を C_D とすると、それによる推力 T_D 及びトルク Q_D は

$$\left. \begin{aligned} T_D &= -\frac{1}{2} \rho N \int_{r_B}^{r_0} dr' \int_{\theta_1(r')}^{\theta_2(r')} C_D \left\{ 1 + \left(\frac{\partial x_0(r', \theta')}{r' \partial \theta'} \right)^2 \right\} (\Omega r' + w_\theta') (V + w_\theta') r' d\theta', \\ Q_D &= -\frac{1}{2} \rho N \int_{r_B}^{r_0} dr' \int_{\theta_1(r')}^{\theta_2(r')} C_D \left\{ 1 + \left(\frac{\partial x_0(r', \theta')}{r' \partial \theta'} \right)^2 \right\} (\Omega r' + w_\theta')^2 r'^2 d\theta' \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

となり、結局全体の推力 T 、トルク Q 及び効率 η は次のようになる。

$$T = T_0 + T_D, \quad Q = Q_0 + Q_D, \quad \eta = (VT)/(\Omega Q). \quad (2.10)$$

積分方程式 (2.5) を解いて $\gamma(r', \theta')$ の値を求めると、(2.8), (2.9), (2.10) を用いて T, Q, η を計算出来る。そこで問題は (2.5) を解くことである。そのためには (2.6), (2.7) の $S_B(r', \theta'; r'', \theta''; a)$, $S_T(r', r; h)$ を求めなくてはならない。次に S_B, S_T について考える。

尚螺旋推進器設計上最も重要な“エネルギー損失最小なるための条件”を満足する束縛渦分布を揚力面理論に於て計算したら揚力線理論による結果と一致した。〔附録1参照〕このことは“Betz の条件”が揚力面理論に於てもそのまま成立することを示す。

§ 3. S_B, T_T の値

先ず次のような記号を定義する。

$$\xi = r/r_0, \quad \xi_B = r_B/r_0, \quad v = a/r_0, \quad v' = h/r_0, \quad (3.1)$$

且つ (2.5) の $\gamma(r', \theta')$, $\theta_1(r')$, $\theta_2(r')$ 等は $\gamma(\xi', \theta')$, $\theta_1(\xi')$, $\theta_2(\xi')$ 等の如く書き直し、 S_B, S_T は

$$S_B(r', \theta'; r'', \theta''; a) = (1/r_0) S_B(\xi', \theta'; \xi'', \theta''; v), \quad S_T(r', r; h) = (1/r_0) S_T(\xi', \xi''; v') \quad (3.2)$$

と書きかえて、

$$\left. \begin{aligned} \lambda_N(\xi', \theta'; v) &= \frac{1}{\xi'} \int_{\xi_B}^1 d\xi'' \int_{\theta_1(\xi'')}^{\theta_2(\xi'')} \gamma(\xi'', \theta'') S_B(\xi', \theta'; \xi'', \theta''; v) d\theta'', \\ \mu_N(\xi'; v') &= \frac{1}{\xi'} \int_{\xi_B}^1 \Gamma(\xi'') S_T(\xi', \xi''; v') d\xi'', \\ \Gamma(\xi') &= \int_{\theta_1(\xi')}^{\theta_2(\xi')} \gamma(\xi', \theta') d\theta' \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

$$\Gamma(\xi') = \int_{\theta_1(\xi')}^{\theta_2(\xi')} \gamma(\xi', \theta') d\theta' \quad (3.4)$$

とおくと、(2.5) は次のように書ける。

$$\lambda_N(\xi', \theta'; v) = r_0 (\Omega \partial x_0(\xi', \theta') / \partial \theta' - V) - \mu_N(\xi'; v'). \quad (3.5)$$

(3.5) を解くには、先ず $S_B(\xi', \theta'; \xi'', \theta''; v)$, $S_T(\xi', \xi''; v')$ の計算出来る形を求めなくてはならぬ。 S_T を (2.7), (3.2) 用いて計算すると次のようになる。²⁾

$$\begin{aligned} S_T(\xi', \xi''; v') &= -\frac{N}{2\pi v'} \left(\frac{\xi'}{v'} + \frac{v'}{\xi'} \right) \left(\frac{\xi''}{v'} + \frac{v'}{\xi''} \right) \sum_{m=1}^{\infty} m^2 N^2 K_{mN} \left(mN \frac{\xi''}{v'} \right) I_{mN} \left(mN \frac{\xi'}{v'} \right) \cos mN\sigma' \Big|_{\sigma'=0}, \quad (\xi' < \xi'') \\ &= -\frac{N}{2\pi v'} \left(\frac{\xi'}{v'} + \frac{v'}{\xi'} \right) \left(\frac{\xi''}{v'} + \frac{v'}{\xi''} \right) \sum_{m=1}^{\infty} m^2 N^2 I_{mN} \left(mN \frac{\xi''}{v'} \right) K_{mN} \left(mN \frac{\xi'}{v'} \right) \cos mN\sigma' \Big|_{\sigma'=0}, \quad (\xi' > \xi'') \end{aligned}$$

これを漸近展開すれば次のようになる。

$$\begin{aligned} S_T(\xi', \xi''; v') &\doteq -\frac{N^2 v'}{4\pi} \frac{(p' p'')^{3/2}}{\xi' \xi''} \frac{s'^N s''^N}{(s'^N - s''^N)^2}, \\ \text{但し } p' &= \sqrt{1 + \left(\frac{\xi'}{v'} \right)^2}, \quad p'' = \sqrt{1 + \left(\frac{\xi''}{v'} \right)^2}, \quad s' = \frac{\xi'/v'}{1+p'} e^{v'}, \quad s'' = \frac{\xi''/v'}{1+p''} e^{v''}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

更に $S_B(\xi', \theta'; \xi'', \theta''; v)$ は (2.6), (3.2) を用いて計算すると次のようになる。

$$S_B(\xi', \theta'; \xi'', \theta''; v) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} M_k(\xi', \xi''; \theta'' - \theta'; v), \quad (3.7)$$

但し

$$\begin{aligned} M_k(\xi', \xi''; \theta'' - \theta'; v) &= \frac{\xi' \xi'' (\theta'' - \theta') + v^2 \sin(\theta'' - \theta' + 2\pi k/N)}{\sqrt{v^2 (\theta'' - \theta')^2 + \xi'^2 + \xi''^2 - 2\xi' \xi'' \cos(\theta'' - \theta' + 2\pi k/N)}}^3 \\ &\quad + 3(v^2 + \xi'^2)(v^2 + \xi''^2) \int_0^{\theta'' - \theta'} \frac{\varphi \sin(\varphi + 2\pi k/N) d\varphi}{\sqrt{v^2 \varphi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 - 2\xi' \xi'' \cos(\varphi + 2\pi k/N)}}^5 \\ &= -\frac{\partial}{\partial \xi''} \left[\frac{\{v^2 (\theta'' - \theta') \cos(\theta'' - \theta' + 2\pi k/N) + \xi'^2 \sin(\theta'' - \theta' + 2\pi k/N)\} \{\xi'' - \xi' \cos(\theta'' - \theta' + 2\pi k/N)\}}{\sqrt{v^2 (\theta'' - \theta')^2 + \xi'^2 + \xi''^2 - 2\xi' \xi'' \cos(\theta'' - \theta' + 2\pi k/N)}} \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$+\int_0^{\theta''-\theta'} \frac{\xi' \xi'' \{\xi'' - \xi' \cos(\varphi + 2\pi k/N)\} + v^2 \{\varphi \xi'' \sin(\varphi + 2\pi k/N) + \xi'' \cos(\varphi + 2\pi k/N) - \xi'\} d\varphi}{v^2 v^2 + \xi''^2 + \xi'^2 - 2\xi'' \xi' \cos(\varphi + 2\pi k/N)^3} \quad (3.9)$$

(3.8) で $(\theta'' - \theta')$ があまり大きくないとして計算すると、次のようになる。

$$M_k(\xi', \xi''; \theta'' - \theta'; v) = \frac{\bar{H} + \bar{G}(\theta'' - \theta') + \bar{F}(\theta'' - \theta')^2 + \bar{E}(\theta'' - \theta')^3}{\sqrt{d + 2c(\theta'' - \theta') + b(\theta'' - \theta')^2}} - \frac{\bar{H}}{\sqrt{d^3}}, \quad (3.8)'$$

但し $\bar{H} = v^2 \sin(2\pi k/N) + (\xi'^2 + v^2)(\xi''^2 + v^2)H$, $\bar{G} = \xi' \xi'' + v^2 \cos(2\pi k/N) + (\xi'^2 + v^2)(\xi''^2 + v^2)G$,
 $\bar{F} = -(1/2)v^2 \sin(2\pi k/N) + (\xi'^2 + v^2)(\xi''^2 + v^2)F$, $\bar{E} = (\xi'^2 + v^2)(\xi''^2 + v^2)E$,
 $H = [d/(c^2 - bd^2)][2cd \cos(2\pi k/N) - (c^2 + bd - d^2) \sin(2\pi k/N)]$, $G = (3cd/d)H$,
 $F = 3 \sin(2\pi k/N)/2d + [3(c^2 + bd)/2c^2]H$,
 $E = (1/d) \cos(2\pi k/N) - (c/2d^2) \sin(2\pi k/N) + (c/2d^3)(3bd - c^2)H$,
 $d = \xi''^2 + \xi'^2 - 2\xi'' \xi' \cos(2\pi k/N)$, $c = \xi' \xi'' \sin(2\pi k/N)$, $b = v^2 + \xi' \xi'' \cos(2\pi k/N)$.

さてここで $c^2 - bd = 0$ のときは、これを満足する ξ'' , ξ' は特異点となりそうであるが、各翼が互に消去しあつて、一般には S_B は $\xi' = \xi''$ 以外では有限な値をもち、無限大とはならぬ。又 M_k は ξ'' , ξ' に関して対称形である。

更に $\theta'' - \theta'$ が小さいとし、又 ξ'' に無関係な項を無視して (3.9), (3.7) を計算すると次のようになる。

$$S_B(\xi', \theta'; \xi'', \theta''; v) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \xi''} \left[\frac{v'(\nu^2 + \xi' \xi'')(\theta'' - \theta')^2 + (\xi'' - \xi')^2}{(\theta'' - \theta')(\xi'' - \xi')} \right. \\
+ \frac{\{\xi'/2 - (3\nu^2 - \xi'^2)(\xi'' - \xi')/6(\nu^2 + \xi'^2)\}(\theta'' - \theta')}{v'(\nu^2 + \xi' \xi'')(\theta'' - \theta')^2 + (\xi'' - \xi')^2} \\
+ \sum_{k=1}^{N-1} \left\{ \frac{(\nu^2 - \xi'^2)(\xi'' \cos(2\pi k/N) - \xi') + v^2 \xi' \sin^2(2\pi k/N)}{\xi'^2 \sin^2(2\pi k/N) \sqrt{\xi''^2 + \xi'^2 - 2\xi'' \xi' \cos(2\pi k/N)}} \right. \\
\left. + \frac{v^2(\xi'' \cos(2\pi k/N) - \xi')}{\sqrt{\xi''^2 + \xi'^2 - 2\xi'' \xi' \cos(2\pi k/N)^3}} \right\} (\theta'' - \theta') - \frac{v^2 + \xi''}{2(\xi'' + \xi')} (\theta'' - \theta') \quad (3.10)$$

但し $\sum'$ は N =偶数のとき、 $k=N/2$ の項を省き、点線以下の項を加えることを表わし、 N =奇数のときは省略する。

尚 v と v' との関係について考えておく。揚力面理論では翼面の上の一点から出る自由渦は明らかに翼面の方向に流れているから $v \equiv v'$ となつてゐる。翼の位置から離れると v と v' は少し値が異なるかも知れぬが、O. Flamm⁶⁾ の推進器の open test の場合の空洞現象の写真集によると trailing cavitation の渦巻きのピッチを測定した結果〔これは勿論重荷重であるが〕 $v' \equiv v$ となつてゐた。軽荷重の場合は初めから $v \equiv v'$ として差支えない。即ち何れにしろ $v \equiv v'$ としてよいと思われる。しかしこのことは今後の実験結果にまつ所が大きい。

§ 4. 翼長が翼幅に比べ非常に長い場合

Aspect ratio が無限大に近く、即ち $\theta'' - \theta'$ が zero に近いときについて考える。(3.10) を用いて $(\theta'' - \theta')$ の二次以上の微小量は無視すると

$$S_B(\xi', \theta'; \xi'', \theta''; v) \approx -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\theta'' - \theta'} \frac{\partial}{\partial \xi''} \frac{\xi'' - \xi'}{|\xi'' - \xi'|} \quad (4.1)$$

となるから、(3.3) を用いて (3.5) を書きかえると、

$$-\frac{1}{4\pi \xi'} \int_{\xi_B}^1 \frac{\partial}{\partial \xi''} \frac{\xi'' - \xi'}{|\xi'' - \xi'|} d\xi'' \int_{\theta_1(\xi'')}^{\theta_2(\xi'')} \gamma(\xi'', \theta'') \frac{d\theta''}{\theta'' - \theta'} \\
= r_0 \left(\Omega \frac{\partial x_0(\xi', \theta')}{\partial \theta'} - V \right) - \frac{1}{\xi'} \int_{\xi_B}^1 \Gamma(\xi'') S_T(\xi', \xi'', v) d\xi''$$

が得られ、この両辺に積分演算子

$$\frac{2}{\pi(\theta_2(\xi') - \theta_1(\xi'))} \int_{\theta_1(\xi')}^{\theta_2(\xi')} d\theta' \sqrt{\frac{\theta' - \theta_1(\xi')}{\theta_2(\xi') - \theta'}} \quad (4.2)$$

を掛けると、 α_q を翼素の zero lift line と廻転面とのなす角として、〔附録2参照〕

$$\frac{2}{\pi(\theta_2(\xi') - \theta_1(\xi'))} \int_{\theta_1(\xi')}^{\theta_2(\xi')} \frac{\partial x_0(\xi', \theta')}{\xi' \partial \theta'} \sqrt{\frac{\theta' - \theta_1(\xi')}{\theta_2(\xi') - \theta'}} d\theta' = r_0 \tan \alpha_q, \quad (4.3)$$

又
$$\frac{2}{\pi(\theta_2(\xi') - \theta_1(\xi'))} \int_{\theta_1(\xi')}^{\theta_2(\xi')} \frac{1}{\theta'' - \theta'} \sqrt{\frac{\theta' - \theta_1(\xi')}{\theta_2(\xi') - \theta'}} d\theta' = \frac{-2}{\theta_2(\xi') - \theta_1(\xi')}^*$$

であるから次の式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi\xi'(\theta_2(\xi') - \theta_1(\xi'))} \int_{\xi_B}^1 \Gamma(\xi'') - \frac{\partial}{\partial \xi''} \frac{\xi'' - \xi'}{|\xi'' - \xi'|} d\xi'' \\ &= r_0(\Omega r_0 \xi' \tan \alpha_0 - V) - \frac{1}{\xi'} \int_{\xi_B}^1 \Gamma(\xi'') S_T(\xi', \xi''; \nu) d\xi'', \end{aligned}$$

故に
$$\frac{\Gamma(\xi')}{\pi\xi'(\theta_2(\xi') - \theta_1(\xi'))} = r_0(\Omega r_0 \xi' \tan \alpha_0 - V) - \frac{1}{\xi'} \int_{\xi_B}^1 \Gamma(\xi'') S_T(\xi', \xi''; \nu) d\xi''. \quad (4.4)$$

この式は揚力線理論による螺旋推進器の基礎方程式である。

尚ボス比が大きく、翼巾に比べて翼長が非常に短いときには、zero lift line が翼の後端に於ける skeleton に対する切線方向であることが証明出来るが、翼の aspect ratio があまり小さくないときには (4.4) を基にして考えて差支えないと思う。

§ 5. 揚力勾配修正係数

二次元翼の場合断面揚力勾配は、理論的にも⁷⁾ N. A. C. A. 翼型⁸⁾ 等の実験結果でも、略々 2π [単位 radian] である。[翼が厚いときにはもう少し大きくなる。] 三次元流体中の有限長の単翼の場合では、翼は自分自身即ち束縛渦とそのつくる自由渦のため一種の curved flow の中にあるのと同じ影響をうける。普通の場合翼の camber が減少するような向きの curved flow の中にあり、所謂 curvature effect⁹⁾ をうけるのである。而して curved flow による翼の camber の減少量は揚力に比例している。即ち三次元翼の場合には curvature effect を考慮すると揚力勾配は $2\pi k_1$ [普通 $k_1 < 1$] となる。この curvature correction factor 即ち揚力勾配修正係数 k_1 が、二次元翼の考えを三次元翼の場合に拡張するときには導入されるべきである。而してこの k_1 は翼の各断面に対して異なる値をもっている筈である。

さて (4.4) をみても分るように翼の巾がせまいときには揚力勾配は 2π 即ち $k_1 = 1$ として差支えない。しかし翼巾が広いときには $k_1 = k_1(\xi')$ を導入しなくてはならない。即ち (4.4) は次のように書きかえられる。

$$\frac{\Gamma(\xi')}{\pi k_1(\xi') \xi' (\theta_2(\xi') - \theta_1(\xi'))} = r_0(\Omega r_0 \xi' \tan \alpha_0 - V) - \frac{1}{\xi'} \int_{\xi_B}^1 \Gamma(\xi'') S_T(\xi', \xi''; \nu) d\xi''. \quad (5.1)$$

この推進器の揚力線理論に於ける基礎方程式の $k_1(\xi')$ を定量的に求めてみる。

さて翼巾従つて $\theta_2(\xi') - \theta_1(\xi')$ があまり大きい値でないとき、(3.5) に (4.2) の積分演算子を掛けると (4.3) を用いて次の式が得られる。

$$\lambda_N(\xi'; \nu) = r_0(\Omega r_0 \xi' \tan \alpha_0 - V) - \mu_N(\xi'; \nu), \quad (5.2)$$

但し
$$\lambda_N(\xi'; \nu) = \frac{2}{\pi(\theta_2(\xi') - \theta_1(\xi'))} \int_{\theta_1(\xi')}^{\theta_2(\xi')} \lambda_N(\xi', \theta'; \nu) \sqrt{\frac{\theta' - \theta_1(\xi')}{\theta_2(\xi') - \theta'}} d\theta'. \quad (5.3)$$

(5.1) と (5.2) の各項を比べ、(3.3) を用いると、

$$k_1(\xi') = \frac{\Gamma(\xi')}{\pi \xi' (\theta_2(\xi') - \theta_1(\xi')) \lambda_N(\xi'; \nu)} \quad (5.4)$$

が得られる。 $k_1(\xi')$ は揚力面理論による揚力線理論の修正係数であつて、(5.4) から明かなように、翼の contour、ピッチ比、 ξ' 、従つて Γ 分布の変化によつて、夫々違つた値をとり、一義的に決められるものではない。勿論今の場合完全流体を考えているのであつて、粘性及び翼表面の粗度による $k_1(\xi')$ の低下は考えていない。

尚翼素の skeleton が直線のとき、即ち $\partial x_0(r', \theta') / \partial \theta' \equiv a_0(\xi')$ のときは、明かに (3.5) の右辺は θ' に無関係となつており、従つて $\lambda_N(\xi', \theta'; \nu)$ は θ' に無関係である。故に

$$\lambda_N(\xi'; \nu) = \lambda_N(\xi', \theta'; \nu) \quad (5.5)$$

が成立する。

aspect ratio があまり大きくない平板の単翼の場合について、 $k_1(\xi')$ に相当する係数を計算すると¹⁰⁾、迎角一定の場合楕円翼では一定値、矩形翼では楕円分布、△翼では中央が小さく両端で無限大となつてゐる。螺旋推進器の場合でも、ボスが非常に大きく、翼巾に比べて翼長が非常に短いときには、その翼の aspect ratio を A とすると、 $k_1(\xi')$ の平均値 $\bar{k}_1$ は $A/2$ となつており、 $k_1(\xi')$ は翼の contour によつて ξ' と共に大きくも小

* 厳密には $\theta_1(\xi') < \theta' < \theta_2(\xi')$ なることが必要である。

さくもなる。これから考えても一般の推進器の場合にはもつと複雑な管である。しかしそれはそれとしても、 $k_1(\xi')$ の大体の形が求まれば、揚力線理論の基礎式を用いて揚力面理論を用いたのと大体同じ結果が得られるのである。

§ 6. 近似計算法

本研究の目的の一つである揚力勾配の修正係数 $k_1(\xi')$ を求めるためには、(3.5) を解いて γ を求め (5.4) から $k_1(\xi')$ を計算するのが理想ではあるが、しかしこれは仲々困難である。そこで簡単のため翼を何本かの渦糸でおきかえ、これに対応する同じ本数の線上で (3.5) を満足するような渦糸の強さを求め $k_1(\xi')$ を計算するのである。その最も簡単なのは、翼巾があまり大きくないとき、翼を一本の渦糸でおきかえることである。Scholz¹¹⁾ によると平板状の楕円翼を翼の長さの一本の渦糸でおきかえ、 $k_1(\xi')$ の平均値 $\bar{k}_1$ [翼の中央に於ける値をとる] のよい近似を与えている。この事からピッチが殆んど一定である推進器翼を一本の渦糸でおきかえても妥当でないかと思われる。

さて r' = 一定なる如き翼素の skeleton を直線でおきかえ、平板単翼についての Weissinger の方法¹²⁾ を適用する。即ち一本の束縛渦の強さを $\Gamma(\xi')$ とし、渦の位置を $\theta'' = \theta_0''(\xi'')$ 、但し $\theta_0''(\xi'') = (3/4)\theta_1(\xi'') + (1/4)\theta_2(\xi'')$ とし、更に $\theta' = \theta_1'(\xi')$ 、但し $\theta_0'(\xi') = (1/4)\theta_1(\xi') + (3/4)\theta_2(\xi')$ をとつて計算する。勿論この場合 (5.5) はそのまま成立する。このように θ' 、 θ'' として $\theta_0'(\xi')$ 、 $\theta_0''(\xi'')$ を用いて (3.3) を計算し、且つ (5.5) を用いると次のようになる。[ここで $\Gamma(t'') \equiv \Gamma(\xi'')$ とする。]

$$\left. \begin{aligned} \lambda_N(\xi'; \nu) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Gamma(t'') F_0^B(t'', t') \frac{dt''}{(t'' - t')^2}, \\ \mu_N(\xi'; \nu) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Gamma(t'') F_0^T(t'', t') \frac{dt''}{(t'' - t')^2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

$$\text{但し} \quad \xi''^2 = (1 + \xi_B^2)/2 + t''(1 - \xi_B^2)/2, \quad \xi'^2 = (1 + \xi_B^2)/2 + t'(1 - \xi_B^2)/2, \quad (6.2)$$

$$\left. \begin{aligned} F_0^B(t'', t') &= -\frac{(\xi'^2 - \xi''^2)^2}{4(1 - \xi_B^2)\xi'\xi''} \sum_{k=0}^{N-1} M_k(\xi', \xi''; \theta_0''(\xi'') - \theta_0'(\xi'); \nu), \\ F_0^T(t'', t') &= \frac{N^2 \nu' (p' p'')^{3/2} s' N s' N}{4(1 - \xi_B^2)\xi'^2 \xi''^2} \left(\frac{\xi'^2 - \xi''^2}{s' N - s' N} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

しかるとき (5.2) から

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Gamma(t'') [F_0^B(t'', t') + F_0^T(t'', t')] \frac{dt''}{(t'' - t')^2} = r_0(\Omega r_0 \xi' \tan \alpha_g - V) \quad (6.4)$$

が得られる。これを附録 3 の方法を用いて多元連立方程式に変形して解くと $\Gamma(t'')$ の形が得られる。[今の場合 § 3 にも述べたように $\nu \equiv \nu'$ としてよい。] しかる後に附録 3 の方法を用いて (6.1) の $\lambda_N(\xi'; \nu)$ を計算すると、(5.4) から $k_1(\xi')$ が求まる。

又次の § 7 の例でも示すように skew back 等の影響が殆んどないことを考えると、一本の束縛渦は近似的に直線状としてよく、その位置での $w_{\pi'}$ 、 $w_{\theta'}$ は

$$w_{\pi'} = \mu_N(\xi'; \nu) \xi'^2 / r_0(\xi'^2 + \nu^2), \quad w_{\theta'} = -\mu_N(\xi'; \nu) \xi' \nu / r_0(\xi'^2 + \nu^2) \quad (6.5)$$

となる。計算の都合上近似的に一定ピッチ $[\partial x_0(\xi', \theta') / \partial \theta' = a : \xi'$ に無関係] をとつて考え、更に

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Gamma}(\xi') &= \Gamma(\xi') / r_0(\Omega a - V), \quad \bar{\lambda}_N(\xi'; \theta') = \lambda_N(\xi'; \theta') / r_0(\Omega a - V), \quad \bar{\mu}_N(\xi'; \nu) = \mu_N(\xi'; \nu) / r_0(\Omega a - V), \\ C_T &= \pi^2 T / 4 \rho \Omega^2 r_0^4, \quad C_Q = \pi^2 Q / 8 \rho \Omega^2 r_0^5, \quad s = 1 - V / \Omega a : \text{slip ratio} \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

を定義するとき (6.1)、(6.4) は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda}_N(\xi'; \nu) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \bar{\Gamma}(t'') F_0^B(t'', t') \frac{dt''}{(t'' - t')^2}, \\ \bar{\mu}_N(\xi'; \nu) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \bar{\Gamma}(t'') F_0^T(t'', t') \frac{dt''}{(t'' - t')^2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.1)''$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \bar{\Gamma}(t'') [F_0^B(t'', t') + F_0^T(t'', t')] \frac{dt''}{(t'' - t')^2} = 1 \quad (6.4)''$$

又 (6.6) により (2.8)、(2.9)、(2.10) を用いて

$$\begin{aligned}
C_{T0} &= \frac{\pi^2}{4} N \nu s \int_{\xi_B}^1 \bar{\Gamma}(\xi') \xi' \left(1 - s \frac{\nu^2}{\xi'^2 + \nu^2} \bar{\mu}_N(\xi'; \nu)\right) d\xi', \\
C_{Q0} &= \frac{\pi^2}{8} N \nu^2 s \int_{\xi_B}^1 \bar{\Gamma}(\xi') \xi' \left(1 - s \left\{1 - \frac{\xi'^2}{\xi'^2 + \nu^2} \bar{\mu}_N(\xi'; \nu)\right\}\right) d\xi', \\
C_{TD} &= -\frac{\pi^2}{8} N \nu \int_{\xi_B}^1 C_D(\nu^2 + \xi'^2) (\theta_2(\xi') - \theta_1(\xi')) \left(1 - s \frac{\nu^2}{\xi'^2 + \nu^2} \bar{\mu}_N(\xi'; \nu)\right) \\
&\quad \times \left(1 - s \left\{1 - \frac{\xi'^2}{\xi'^2 + \nu^2} \bar{\mu}_N(\xi'; \nu)\right\}\right) d\xi', \\
C_{QD} &= \frac{\pi^2}{16} N \int_{\xi_B}^1 C_D(\nu^2 + \xi'^2) (\theta_2(\xi') - \theta_1(\xi')) \left(1 - s \frac{\nu^2}{\xi'^2 + \nu^2} \bar{\mu}_N(\xi'; \nu)\right)^2 \xi'^2 d\xi', \\
C_T &= C_{T0} + C_{TD}, \quad C_Q = C_{Q0} + C_{QD}, \quad \eta = (1/2\pi)(V/nD)(C_T/C_Q), \quad V/nD = \pi\nu(1-s)
\end{aligned} \tag{6.7}$$

が得られ、これらにより推進器の性能が計算出来る。尚一定ピッチであると、 $k_1(\xi')$ は slip ratio に無関係である。

§7 数値計算例

次の例について計算してみた。即ち (a) $N=3$, $\nu=0.2$, $\xi_B=0$, (b) $N=3$, $\nu=0.2$, $\xi_B=0.2$, (c) $N=4$, $\nu=0.2$, $\xi_B=0.2$. 以下の計算に用いる $\xi'' \rightarrow \xi_j$, $\xi' \rightarrow \xi_i$ の場合の ξ_i , ξ_j の suffix i, j は、(6.2) により $i'' \rightarrow t_j$, $j' \rightarrow t_i$ の i, j と対応し、これを更に $t_j = -\cos \theta_j$, $t_i = -\cos \theta_i$, $\theta_j = j\pi/(m+1)$, $\theta_i = i\pi/(m+1)$, 但し $i, j=1, 2, \dots, m$ なる如くおく。今の場合 $m=7$ とおいている。これらの i, j に対応する ξ_i , ξ_j の値を第1表に示す。

先ず M_k の値は (a), (b) については (3.8)' を用い、(c) については (3.8) [積分はプラニメーターによる] を用いた。その一つの例として (b) の場合を第2表に示す。この例から明かなように [他の例も同様であるが]

M_0 に比べて、それ以外の項、従つてその和 $\sum_{k=1}^{N-1} M_k$ は殆んど無視出来る。このことは翼相互の干渉 [cascade effect] よりも、その翼自身の巾による影響が大きいことを示しており、Guilotton⁹⁾, Lerbs²⁾ 及び Ludwig-Ginzler⁽⁵⁾ の説と一致する。しかし本節では無視しないで計算を進めた。これらの M_k

第1表

(a) $N=3, \nu=0.2$ (b) $N=3, \nu=0.2, \xi_B=0.2$

i	ξ_i	ξ_i	i	ξ_i	ξ_i
1	0.1951	1	0.2767		
2	0.3827	2	0.4249		
3	0.5556	3	0.5800		
4	0.7071	4	0.7211		
5	0.8315	5	0.8388		
6	0.9239	6	0.9270		
7	0.9808	7	0.9815		

第2表 $N=3, \nu=0.2, \xi_B=0.2$ (b)

θ'	ξ'	1	2	3	4	5	6	7	θ'	ξ'	1	2	3	4	5	6	7
-0.1	1 M_0		-4.688	-0.712	-0.272	-0.153	-0.108	-0.089	-0.5	1 M_0		-14.810	-2.984	-1.233	-0.716	-0.511	-0.425
	1 M_1+M_2		-0.058	-0.053	-0.043	-0.037	-0.033	-0.031		1 M_1+M_2		-0.236	-0.237	-0.207	-0.180	-0.162	-0.152
	2 M_0		-7.269	-1.309	-0.553	-0.340	-0.263			2 M_0		-19.425	-4.797	-2.260	-1.456	-1.151	
	2 M_1+M_2		-0.059	-0.051	-0.045	-0.041	-0.038			2 M_1+M_2		-0.287	-0.250	-0.226	-0.205	-0.193	
	3 M_0		-14.722	-2.927	-1.351	-0.925				3 M_0		-31.488	-8.877	-4.698	-3.403		
	3 M_1+M_2		-0.052	-0.046	-0.043	-0.041				3 M_1+M_2		-0.263	-0.235	-0.222	-0.211		
	4 M_0		-32.707	-7.517	-4.021					4 M_0		-55.714	-17.885	-10.762			
-0.3	4 M_1+M_2		-0.045	-0.042	-0.041				-0.75	4 M_1+M_2		-0.234	-0.222	-0.214			
	5 M_0		-83.282	-24.920						5 M_0		-114.166	-43.658				
	5 M_1+M_2		-0.041	-0.039						5 M_1+M_2		-0.215	-0.209				
	6 M_0		-286.56							6 M_0		-326.20					
	6 M_1+M_2		-0.038							6 M_1+M_2		-0.203					
	7 M_0									7 M_0							
	7 M_1+M_2									7 M_1+M_2							
-0.5	1 M_0		-11.473	-2.000	-0.787	-0.448	-0.317	-0.263	-0.75	1 M_0		-16.134	-3.795	-1.666	-0.996	-0.722	-0.604
	1 M_1+M_2		-0.169	0.153	-0.130	-0.111	-0.098	-0.093		1 M_1+M_2		-0.203	-0.306	-0.229	-0.260	-0.236	-0.221
	2 M_0		-16.101	-3.461	-1.538	-0.963	-0.752			2 M_0		-20.978	-5.684	-2.832	-1.881	-1.509	
	2 M_1+M_2		-0.176	-0.153	-0.135	-0.122	-0.114			2 M_1+M_2		-0.416	-0.386	-0.347	-0.318	-0.299	
	3 M_0		-27.987	-7.003	-3.483	-2.451				3 M_0		-32.873	-9.862	-5.448	-4.040		
	3 M_1+M_2		-0.154	-0.140	-0.130	-0.124				3 M_1+M_2		-0.420	-0.388	-0.360	-0.343		
	4 M_0		-52.135	-15.421	-9.027					4 M_0		-56.983	-18.937	-11.882			
-0.75	4 M_1+M_2		-0.136	-0.129	-0.124					4 M_1+M_2		-0.391	-0.371	-0.356			
	5 M_0		-110.562	-40.664						5 M_0		-115.325	-44.752				
	5 M_1+M_2		-0.124	-0.120						5 M_1+M_2		-0.365	-0.354				
	6 M_0		-322.66							6 M_0		-327.36					
	6 M_1+M_2		-0.116							6 M_1+M_2		-0.348					
	7 M_0									7 M_0							
	7 M_1+M_2									7 M_1+M_2							

* Guilotton の論文⁹⁾ に対する Lerbs の討論

を用いて, (6.3) により F_0^B を算計し, 更に F_0^T を (3.6), (6.3) によつて計算した。

今簡単のため翼の projected contour が扇形〔翼の前後端のなす角を Θ とする〕の推進器を考える。 $\theta_0'(\xi') = \theta_0'$, $\theta_0''(\xi'') = \theta_0'$ とし, (6.4)' を解いて $\bar{\Gamma}(\xi')$ を求め, (6.1)', (6.6), (5.4) を用いて $k_1(\xi')$ を計算すると第1図ようになる。(a) と (b) を比べると, $\xi' = 0$ の近くではボスがないときの方がかなり大きな値となつてゐるが, 先端 [$\xi' > 0.5$] では殆んど一致している。又 (b) と (c) を比べると, ボス半径, 翼の形, 面積が等しいとき3翼と4翼では $k_1(\xi')$ の値は殆んど一致する。第1図に Hill の結果¹³⁾ と Ludwig-Ginzler⁵⁾ の結果の大体の order をしるしておく。著者の結果はこの二つの中間値をとつてゐる。尚 Hill の結果は実験的解析によつて得られたものである。

次に普通の翼の contour に近い場合について計算してみた。その一例として $N=3$, $\nu=0.2$, $\xi_B=0.2$ とし次の三つの場合について考える。[B. A. R.=0.542]

$$(d_1) \quad \theta_0'(\xi') = 0.4 \sqrt{1-\xi'^2}, \quad \theta_0''(\xi'') = -0.4 \sqrt{1-\xi''^2},$$

(normal)

$$(d_2) \quad \theta_0'(\xi') = 0, \quad \theta_0''(\xi'') = -0.8 \sqrt{1-\xi''^2}, \quad (\text{skew back})$$

$$(d_3) \quad \theta_0'(\xi') = 0.8 \sqrt{1-\xi'^2}, \quad \theta_0''(\xi'') = 0. \quad (\text{skew fore})$$

各々の翼の中心線の skew を第2図に画く。この三つの場合について (6.4)' を解くと, $\bar{\Gamma}(\xi')$ は第3表のようになる。これらは殆んどが $\pm 1\%$ 以内で一致している。即ち skew の影響は推進器の open test の性能には殆んど関係がないことが分る。このことは実験結果からも云われていることである。更に $k_1(\xi')$ を計算し, Hill の結果¹³⁾ 及び Ludwig-Ginzler の結果⁵⁾ と併せて画くと第3図のようになる。これは扇形翼の場合と傾向が大分異なる。これは $k_1(\xi')$ の値が翼の contour によつて異なることを示している。

更にこの (d) の場合について $C_D=0.01$ として (6.7) を用いて推進器の性能を計算すると第4図のようになる。これは実験的にも大体妥当な値である。更に揚力線理論 [$k_1(\xi') \equiv 1$] の結果と比較するため, それによる計算結果を同時に記しておく。これをみても明かなように, $k_1(\xi')$ が約 0.5 の order であるのに C_T , C_Q は約 0.8 倍位にしか低下していない。このことは $k_1(\xi')$ の値が大約の所をおさえれば十分である事を示す。

以上に於て $k_1(\xi')$ の大体の性質が分つたが, 具体的にはもつと数値計算することが必要であり, これを螺旋推進器の設計に如何に適用して行くか今後の問題である。(未完)

附録 1. エネルギー損失最小の問題

螺旋推進器に於て, エネルギー損失が最も少くなるような束縛渦分布を揚力面理論に於て導いてみる。記号は本文の記号をそのまま用いる。単位時間について, 推進器のなした仕事は VT で, 推進器に加えられた仕事は ΩQ であるから, 問題は

$$VT = \text{一定で } \Omega Q = \text{最小, 又は } \Omega Q = \text{一定で } VT = \text{最大}$$

なる条件を求めることである。これは条件付きの変分問題である。適当な Lagrange の不定常数 $(1+\lambda)$ を用い, $N\gamma$ を未知函数として $\Omega Q - (1+\lambda) VT$ の変分を考え, これが zero のときが求める条件である。即ち

$$\delta[\Omega Q - (1+\lambda) VT] = 0. \quad (1)$$

さて $C_D=0$ とし, 軽荷重の場合を考えると, $a \doteq h \doteq V/\Omega$, 且つ λ は小さいから, (2.2), (2.3), (2.9) を用いて

$$\Omega Q - (1+\lambda) VT = \rho N \int_{r_B}^{r_0} dr' \int_{\theta_1(r')}^{\theta_2(r')} \gamma(r', \theta') \left\{ -\lambda V \Omega r' + \Omega \int_{r_B}^{r_0} dr'' \int_{\theta_1(r'')}^{\theta_2(r'')} \gamma(r'', \theta'') P(r', \theta'; r'', \theta'') d\theta'' \right\} d\theta',$$

但し

$$P(r', \theta'; r'', \theta'') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{r'}{h} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_\theta} - \frac{h}{r'} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_\theta} \right) \left(\frac{r''}{h} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_\theta} - \frac{h}{r''} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_\theta} \right) \\ \times \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\theta''-\theta_0}^{\theta''+\theta_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{h^2(\varphi + \varepsilon_\theta)^2 + r''^2 + r'^2 - 2r''r' \cos(\varphi + \varepsilon_\theta + 2\pi k/N)}} \Big]_{\varepsilon_\theta=0, \theta_0=0}$$

となり, これを (1) に代入して計算すると

第3表

$\bar{\Gamma}(\xi')$ の値 (d)					
ξ'	(d ₁)	(d ₂)	(d ₃)	Hill ¹³⁾	Ludwig-Ginzler ⁵⁾
0.2767	0.288	0.285	0.290	0.336	
0.4249	0.424	0.420	0.426	0.489	
0.5800	0.460	0.457	0.460	0.547	
0.7211	0.441	0.439	0.438	0.544	
0.8388	0.377	0.377	0.375	0.486	
0.9270	0.276	0.277	0.272	0.367	
0.9815	0.145	0.146	0.140	0.197

$$\rho N \Omega \int_{r_B}^{r_0} dr' \int_{\theta_1(r')}^{\theta_2(r')} \delta \gamma(r', \theta') \{ -\lambda V r' + \int_{r_B}^{r_0} dr'' \int_{\theta_1(r'')}^{\theta_2(r'')} \gamma(r'', \theta'') [P(r', \theta'; r'', \theta'') + P(r'', \theta''; r', \theta')] d\theta'' \} d\theta' = 0$$

が得られ、且つ $\delta \gamma$ は不定函数であるから、 $\{ \quad \}$ 内は zero とならなくてはならぬ。即ち

$$-\frac{1}{r'} \int_{r_B}^{r_0} dr'' \int_{\theta_1(r'')}^{\theta_2(r'')} \gamma(r'', \theta'') [P(r', \theta'; r'', \theta'') + P(r'', \theta''; r', \theta')] d\theta'' = \lambda V \quad (2)$$

となる。 $\lambda = w/V$ とおき、又 $P(r', \theta'; r'', \theta'') + P(r'', \theta''; r', \theta')$ を計算すると $2 S_T(r', r''; h)$ となるから、(2) は

$$-\frac{1}{r'} \int_{r_B}^{r_0} dr'' \int_{\theta_1(r'')}^{\theta_2(r'')} \gamma(r'', \theta'') S_T(r', r''; h) d\theta'' = -\frac{w}{2},$$

即ち $\frac{1}{r'} \int_{r_B}^{r_0} \Gamma(r'') S_T(r', r''; h) dr'' = \frac{w}{2} \quad (3)$

となる。揚力線理論では初めから $\theta'' = \theta'$ として計算するから、直ちに (3) が得られる。即ち揚力面理論によるエネルギー損失最小の問題の解 $\Gamma(\xi') = \Gamma_{opt}(\xi')$ は揚力線理論による結果と一致する。そこで $\xi_B = 0$ のときには S. Goldstein の結果と一致する筈である。¹⁴⁾ 一つの例を第5図に示す。この例は更に附録3の方法の妥当性を示している。

附録 2. Zero Lift Line の決定法

推進器の軸を軸とする同円心で推進器翼を切つた面について考える。その翼素の skeleton は左図の通りである。 x' 軸は巾の方向、 θ は翼の後端、 x 軸は翼の廻転の方向、向きをあらわすものとする。しかるとき、

$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta, x' = x \cos \theta + y \sin \theta = x / \cos \theta + y' \tan \theta \approx x \cos \theta$$

が成立する。翼の形を $y' = y'(x')$ とし、翼巾を c' とし、 $c' = c / \cos \theta$ とおくと、zero lift angle を α_{g1} とし

$$\tan \alpha_{g1} = \frac{2}{\pi c'} \int_0^{c'} \frac{dy'(x')}{dx'} \sqrt{\frac{c' - x'}{x'}} dx'$$

$$= \frac{2}{\pi c'} \int_0^c \frac{d\{y(x) \cos \theta - x \sin \theta\}}{dx} \sqrt{\frac{c - x}{x}} dx = \frac{2 \cos^2 \theta}{\pi c} \int_0^c \frac{dy(x)}{dx} \sqrt{\frac{c - x}{x}} dx - \cos \theta \sin \theta$$

が二次元薄翼理論⁷⁾ から得られるから、 α_{g1} が小さいことを考えると、

$$\tan(\theta + \alpha_{g1}) \approx \tan \theta + \frac{1}{\cos^2 \theta} \tan \alpha_{g1} = \frac{2}{\pi c} \int_0^c \frac{dy(x)}{dx} \sqrt{\frac{c - x}{x}} dx, \text{ 但し } \theta + \alpha_{g1} = \alpha_g$$

となる。

附録 3. 特異点を含む積分の近似計算法

$F(t'', t')$ を特異点を含まず、 $F(\pm 1, t') = 0$ なる如き実函数とする。しかるとき次の積分形

$$B(t') = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 F(t'', t') \frac{dt''}{(t' - t'')^2}$$

の近似値を求める。今 $t'' = -\cos \theta''$, $t' = -\cos \theta'$, $t_j = -\cos \theta_j$, $t_i = -\cos \theta_i$, $\theta_j = j\pi/(m+1)$, $\theta_i = i\pi/(m+1)$; $i, j = 1, 2, \dots, m$ とし、 $0 < \theta'' < \pi$, $0 < \theta' < \pi$ で、 m は 3, 7, 15, ... の何れかをとり、 $\theta'' \rightarrow \theta_j$, $\theta' \rightarrow \theta_i$ とする。しかるとき近似的に

K_{ij} の表

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
1	-0.9239	-0.7071	-0.3827	0	0.3827	0.7071	0.9239
2	-0.9239	0.4520	-3.7651	0	-0.2929	0	-0.0665
3	-0.3827	-2.0378	5.6569	-2.7084	0	-0.1944	0
4	0	-1.6803	4.3294	-1.7088	0	-0.1488	0
5	0	-0.1121	0	-1.5787	4.0000	-1.5787	0
6	0.3827	0	-0.1488	0	-1.7088	4.3294	-1.6803
7	0.7071	-0.0665	0	-0.1944	0	-2.2084	5.6569
8	0.9239	0	-0.0665	0	-0.2929	0	-3.7651

$$F(t'', t') \approx \frac{2}{m+1} \sum_{j=1}^m F(t_j, t') \sum_{i=1}^m \sin p \theta_j \sin p \theta''$$

とおける。これを用いて上の積分を計算すると形式的に次のようになる。

$$B(t_i) = \sum_{j=1}^m K_{ij} F(t_j, t_i)$$

$$\text{但し } K_{ij} = -\frac{1}{m+1} \frac{(1 - (-1)^{i+j}) \sqrt{1 - t_j^2}}{(t_i - t_j)^2}$$

$$(i \neq j),$$

$$= \frac{m+1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-t_j^2}} \quad (i=j),$$

$m=7$ のときの K_{ij} の値は上表のようになる。

参考文献

- (1) S.Kawada, "Calculation of Induced Velocity by Helical Vortices and its Application to Propeller Theory," 東京帝国大学航空研究所報告 第172号 (1939)
- (2) K.Kondo, "The Potential-theoretical Fundamentals of Aerodynamics concerning the Screw Propeller," 九州帝国大学工学部紀要 第3号 (1942) p.145
- (3) W.Kinner, "Die Kreisförmige Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage," Ing. Arch. Bd. 8 (1937) p. 47
- (4) M.Hansen, "Messungen an Kreistragflächen und Vergleich mit der Theorie der tragenden Fläche," Ing. Arch. Bd. 10 (1939) p. 251
- (5) H.Ludwig und G.I. Ginzl, "Zur Theorie der Breitblattschraube," Aerodynamische Versuchsanstalt, Göttingen, Rep.44/A/08 (1944)
G.I. Ginzl, "Theory of the Broad-Bladed Propeller", Admiralty Research Laboratory, A.R.L. /R3/G/HY/7/1 (1952)
- (6) O.Flamm, "Die Schiffsschraube und ihre Wirkung auf das Wasser," Druck und Verlag von R.Oldenbourg, München und Berlin
- (7) 谷 一郎, "流体力学上巻理想流体の力学", 岩波書店, 東京 (1944)
- (8) I.H.Abbott and A.E.von Doenhoff, "Theory of Wing Sections" McGraw-Hill Book Company, Ing. New York (1949)
- (9) R.Guilloton, "The Calculation of ship Screws," T.I.N.A. Nol.91 (1949) p.1
- (10) 山崎隆介, "単翼の幅の影響について", (未発表)
- (11) N. Scholz, "Beitrage zur Theorie der tragenden Fläche," Ing. Arch. Bd.18 (1950) p.84
- (12) J. Weissinger, "The Lift Distribution of Swept-Back Wings," N.A.C.A. T.M. 1120 (1947)
- (13) J.G.Hill, "The Design of Propellers," T.S.N.A. & M.E. Vol. 57 (1949) p. 143
- (14) 近藤一夫, "漸近方程式によるプロペラの計算", 応用数学力学第一巻第三号 (1947) p. 97