(昭和 26 年 11 月造船協会秋季講演会に於て講演)

非 定 常 造 波 抵 抗 理 論

(其の二, —三次元流場の一般理論)

正 員 花 岡 達 郎*

Non-uniform Theory of Wave Resistance, Part 2—

General Theory for Three-Dimensional Fluid Field

By Tatsuro Hanaoka, *Member*

Abstract

The author has already analysed non-uniform wave-system in two dimensional case generated by a ship moving with constant velocity describing harmonic oscillation in his other paper "1". In this paper he develops it in three dimensional case.

The process to obtain the velocity potential will be given in the first chapter. In the second, the relation between various kinds of harmonic oscillations of a ship and the fluid field will be mentioned.

は し が き

著者は前論文¹⁾に於て二次元流場の非定常造波現象の理論的方法に就て述べたが、これはそのまま三次元流場に拡張する事が出来る。

流場の攪乱源である船が振動率 ν で調和振動をしている場合、加速度場は調和振動をしているものと考えてよい。従つて加速度場の攪乱源のポテンシャルとしては定常流場のものに $e^{i\nu t}$ を乗じたものを用いる事が出来る。この攪乱源の加速度ポテンシャルに就ては著者の別の論文²⁾の中で詳細に論じてあるから、ここではその結果をそのまま用いる事にする。

本論文では水深は無限大の場合のみを取扱う。 z 軸の正の方向は沿直上方にとり、静止自由表面は $z=0$ の面とする。又船は振動率 ν で調和振動をしながら x 軸の負の方向に一定速度 V で前進するものとする。

第 1 章 速度ポテンシャル

§ 1 攪 乱 源

調和振動をする船に依つて生ずる水の攪乱流速を微小と仮定する時は、攪乱源の加速度ポテンシャルは定常理論³⁾の場合と同型の式を導く事が出来る。その理論的操作は定常理論の場合と全く同様であるから、ここではそれを省略して結果のみを記す事にする。

浅吃水船の攪乱源の加速度ポテンシャルは、浸水面上の圧力を $pe^{i\nu t}$ とすれば、

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi\rho} \iint_{\bar{S}} p(x', y') e^{i\nu t} \left[\frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{R_1} \right]_{z'=0} d\bar{S} \quad (1.1)$$

但し

$$R_1 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

と書かれる。

深吃水船の非対称流場に関する攪乱源の加速度ポテンシャルは、 $\phi_r' - \phi_l' = \phi' e^{i\nu t}$ と書けば、

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\hat{S}} \phi'(x', z') e^{i\nu t} \left[\frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right]_{y'=0} d\hat{S} \quad (1.2)$$

但し

$$R_2 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}$$

* 運輸技術研究所

1) 花岡達郎：非定常造波抵抗理論（其の一）。

2) 花岡達郎：定常造波抵抗理論の基礎問題。

3) 前掲 2) 参照。

である。

深吃水船の対称流場の場合は、定常理論の場合で示した様に、加速度場に頼らずに、直接速度場の攪乱源のポテンシャルを求める事が出来る。これは加速度場のものと全く同型であるから、

$$\Phi(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\hat{S}} w(x', z') e^{i\gamma t} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]_{y'=0} d\hat{S} \quad (1.3)$$

と書かれる。この式の $w e^{i\gamma t}$ は $\frac{\partial \Phi_r'}{\partial y'}$ に相当するものである。(1.1), (1.2) 及び (1.3) の面積分の領域 $\hat{S}$ 及び $\hat{S}$ は定常理論の場合と同様に浸水面の自由表面及び船体中心線面に対する射影面である。以下では (1.3) の R_1 及び R_2 は $y'=0$ の意味を表わすものとして特に $\left[\frac{1}{R_1} \right]_{y'=0}$ と記さない事にする。

定常理論の場合と同様に、非定常理論に於ても、表面波動の存在しない時の加速度場又は速度場のポテンシャルとしては (1.1), (1.2) 及び (1.3) の三種に就てのみ考察すればよい。

§2 浅吃水船

自由表面が攪乱される時の加速度ポテンシャルは、(1.1) に波動の項を加えればよい。

自由表面条件式

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{2}{V} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \kappa' \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z=0 \quad (2.1)$$

を利用して、未定係数の方法を用いれば波動の項が求められる。

その結果

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) = & -\frac{1}{2\pi^2 \rho} \iint p(x', y') e^{i\gamma t} d\hat{S} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty k e^{kz} \cos k\tilde{\omega} dk d\alpha \\ & + \frac{\kappa'}{2\pi^2 \rho} \iint p(x', y') e^{i\gamma t} d\hat{S} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty k^2 e^{kz} \frac{2 \frac{i\gamma}{V} k \cos \alpha \sin k\tilde{\omega} - \left\{ k^2 \cos^2 \alpha + \left(\frac{\gamma}{V} \right)^2 - \kappa' k \right\} \cos k\tilde{\omega}}{\left\{ \left(k \cos \alpha - \frac{\gamma}{V} \right)^2 - \kappa' k \right\} \left\{ \left(k \cos \alpha + \frac{\gamma}{V} \right)^2 - \kappa' k \right\}} dk d\alpha \end{aligned} \quad (2.2)$$

が得られる。これは加速度ポテンシャルの主要部であるが、無限遠方の流れの条件は満足しない。

加速度ポテンシャル ϕ は速度ポテンシャル Φ と

$$\phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + V \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (2.3)$$

なる関係にある。故に初期条件を考慮しなければ、速度ポテンシャルは加速度ポテンシャルに依つて、

$$\Phi = \frac{1}{V} \int_{-\infty}^x \phi(X, y, z, t - \frac{x-X}{V}) dX \quad (2.4)$$

の形に書表わされる。これは (2.3) を Φ に関する微分方程式と考えた時の一般解である。(2.2) を (2.4) に適用して求められる速度ポテンシャルを Ψ と書く事にすれば、 Ψ は、

$$\Psi = \frac{i}{4\pi^2 \rho V} \iint p(x', y') e^{i\gamma t} d\hat{S} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty k e^{kz} \left\{ -\frac{\left(k \cos \alpha - \frac{\gamma}{V} \right) e^{-ik\tilde{\omega}}}{\left(k \cos \alpha - \frac{\gamma}{V} \right)^2 - \kappa' k} + \frac{\left(k \cos \alpha + \frac{\gamma}{V} \right) e^{ik\tilde{\omega}}}{\left(k \cos \alpha + \frac{\gamma}{V} \right)^2 - \kappa' k} \right\} dk d\alpha \quad (2.5)$$

と書かれる。これは速度ポテンシャルの一つの特解であつて、速度ポテンシャルの完全解の主要部をなすものである。(2.5) から無限遠方の流れの条件を満足する速度ポテンシャルを導く為に、先ず Ψ の $x-x' \rightarrow \pm\infty$ の近傍に於ける漸近函数を求めてみる。これ等を夫々 Ψ_∞ 及び $\Psi_{-\infty}$ と書く事にする。 $(k \cos \alpha - \gamma/V)^2 - \kappa' k = 0$ 及び $(k \cos \alpha + \gamma/V)^2 - \kappa' k = 0$ の二根を夫々 a_1', a_2' 及び b_1', b_2' と書けば、

$$\left. \begin{aligned} a_1', a_2' &= \frac{\kappa' + 2 \frac{\gamma}{V} \cos \alpha \pm \sqrt{\kappa'^2 + 4 \frac{\gamma}{V} \kappa' \cos \alpha}}{2 \cos^2 \alpha} \\ b_1', b_2' &= \frac{\kappa' - 2 \frac{\gamma}{V} \cos \alpha \pm \sqrt{\kappa'^2 - 4 \frac{\gamma}{V} \kappa' \cos \alpha}}{2 \cos^2 \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

である。この二組の根を用いれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{k \left(k \cos \alpha - \frac{v}{V} \right)}{\left(k \cos \alpha - \frac{v}{V} \right)^2 - \kappa' k} &= \frac{M_1' \sec \alpha}{k - a_1'} - \frac{M_2' \sec \alpha}{k - a_2'} + \sec \alpha \\ \frac{k \left(k \cos \alpha + \frac{v}{V} \right)}{\left(k \cos \alpha + \frac{v}{V} \right)^2 - \kappa' k} &= \frac{N_1' \sec \alpha}{k - b_1'} - \frac{N_2' \sec \alpha}{k - b_2'} + \sec \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

但し

$$\left\{ \begin{aligned} M_1' &= \frac{a_1'^2 - a_1' \frac{v}{V} \sec \alpha}{a_1' - a_2'} \\ M_2' &= \frac{a_2'^2 - a_2' \frac{v}{V} \sec \alpha}{a_1' - a_2'} \\ N_1' &= \frac{b_1'^2 + b_1' \frac{v}{V} \sec \alpha}{b_1' - b_2'} \\ N_2' &= \frac{b_2'^2 + b_2' \frac{v}{V} \sec \alpha}{b_1' - b_2'} \end{aligned} \right. \quad (2.8)$$

である。(2.7) を (2.5) に代入すれば,

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{i}{4\pi^2 \rho V} \iint p(x', y') e^{i\gamma t} d\bar{S} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{kz} \sec \alpha \left\{ - \left(\frac{M_1'}{k - a_1'} - \frac{M_2'}{k - a_2'} \right) e^{-ik\bar{\omega}} + \left(\frac{N_1'}{k - b_1'} - \frac{N_2'}{k - b_2'} \right) e^{ik\bar{\omega}} \right\} \\ &\quad \times dk d\alpha - \frac{1}{2\pi^2 \rho V} \iint p(x', y') e^{i\gamma t} d\bar{S} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{kz} \sec \alpha \sin k\bar{\omega} dk d\alpha \end{aligned} \quad (2.9)$$

と書かれる。

T を正の非常に大きな数とすれば,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{u \rightarrow T} \int_0^\infty \frac{e^{\xi z \pm i\xi u}}{\xi - m} d\xi &= \pm i\pi e^{mz \pm imu} & z < 0 \\ \lim_{u \rightarrow T} \int_0^\infty \frac{e^{\xi z \pm i\xi u}}{\xi - m} d\xi &= 0 & \xi \neq m \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

なる公式がある⁴⁾。故に

$$\begin{aligned} \Psi_{-\infty} &= -\Psi_\infty = \frac{1}{4\pi \rho V} \iint p(x', y') e^{i\gamma t} d\bar{S} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec \alpha (M_1' e^{a_1' z - i a_1' \bar{\omega}} - M_2' e^{a_2' z - i a_2' \bar{\omega}}) d\alpha \\ &\quad + \frac{1}{4\pi \rho V} \iint p(x', y') e^{i\gamma t} d\bar{S} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} \right\} \sec \alpha (N_1' e^{b_1' z + i b_1' \bar{\omega}} - N_2' e^{b_2' z + i b_2' \bar{\omega}}) d\alpha \end{aligned} \quad (2.11)$$

と書かれる。茲に $\alpha_1 = \cos^{-1} \kappa' V / (4v)$ であつて, $\frac{1}{\kappa'} \frac{v}{V} \leq \frac{1}{4}$ のときは $\alpha_1 = 0$ である。(2.11) は自由表面条件式の固有函数である。

(2.11) の右辺第2項は夫々 $v/(b_1' \cos \alpha)$ 及び $v/(b_2' \cos \alpha)$ の速度を以て x 軸の負の方向に伝播する波群を表わしている。その伝播速度と船の前進速度 V とは,

$$\left. \begin{aligned} \frac{v}{b_1' \cos \alpha} &= \frac{2v \cos \alpha}{\kappa' - 2 \frac{v}{V} \cos \alpha + \sqrt{\kappa'^2 - 4 \frac{v}{V} \kappa' \cos \alpha}} < V \\ \frac{v}{b_2' \cos \alpha} &= \frac{2v \cos \alpha}{\kappa' - 2 \frac{v}{V} \cos \alpha - \sqrt{\kappa'^2 - 4 \frac{v}{V} \kappa' \cos \alpha}} > V \end{aligned} \right\}, \quad \frac{1}{\kappa'} \frac{v}{V} \cos \alpha < \frac{1}{4} \quad (2.12)$$

の関係にある。故に船の無限前方には b_2' を固有値とする固有函数のみが存在するの合理的である。

従つて, 実際の現象を表わす速度ポテンシャルは (2.5), (2.11) 及び (2.12) より,

$$\Phi = \frac{i}{4\pi^2 \rho V} \iint p(x', y') e^{i\gamma t} d\bar{S} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty k e^{kz} \left\{ - \frac{\left(k \cos \alpha - \frac{v}{V} \right) e^{-ik\bar{\omega}}}{\left(k \cos \alpha - \frac{v}{V} \right)^2 - \kappa' k} + \frac{\left(k \cos \alpha + \frac{v}{V} \right) e^{ik\bar{\omega}}}{\left(k \cos \alpha + \frac{v}{V} \right)^2 - \kappa' k} \right\} dk d\alpha$$

4) 前掲 1) 参照。

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4\pi\rho V}\iint p(x', y')e^{i\gamma t}d\hat{S}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sec\alpha(M_1'e^{a_1'z-ia_1'\bar{\omega}}-M_2'e^{a_2'z-ia_2'\bar{\omega}})d\alpha \\
& -\frac{1}{4\pi\rho V}\iint p(x', y')e^{i\gamma t}d\hat{S}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha_1}+\int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}}\right\}\sec\alpha(N_1'e^{b_1'z+ib_1'\bar{\omega}}+N_2'e^{b_2'z+ib_2'\bar{\omega}})d\alpha \quad (2.13)
\end{aligned}$$

と書かれる。これが浅吃水船が調和振動をしながら直進するときの速度ポテンシャルである。

§ 3 深吃水船の対称流場

自由表面が攪乱される時の速度ポテンシャルは (1.3) に波動の項を加えたものである。波動の項の求める方法は前節の場合と同じである。結果のみ記せば、

$$\begin{aligned}
\Psi = & -\frac{1}{2\pi}\iint w(x', z')e^{i\gamma t}d\hat{S}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)d\hat{S} \\
& +\frac{\kappa'}{2\pi^2}\iint w(x', z')e^{i\gamma t}d\hat{S}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\oint_0^\infty ke^{k(z+z')}\left\{\frac{e^{-ik\bar{\omega}}}{\left(k\cos\alpha-\frac{v}{V}\right)^2-\kappa'k}+\frac{e^{ik\bar{\omega}}}{\left(k\cos\alpha+\frac{v}{V}\right)^2-\kappa'k}\right\}dkd\alpha \quad (3.1)
\end{aligned}$$

となる。これは速度ポテンシャルの主要部である。

Ψ の $x-x'\rightarrow\pm\infty$ に於ける漸近函数を求める操作は § 2 と全く同様に行われ、その結果は、

$$\begin{aligned}
\Psi_{-\infty} = & -\Psi_{\infty} = \frac{i\kappa'}{2\pi}\iint w(x', z')e^{i\gamma t}d\hat{S}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2\alpha}{a_1'-a_2'}\left\{a_1'e^{a_1'(z+z')-ia_1'\bar{\omega}}-a_2'e^{a_2'(z+z')-ia_2'\bar{\omega}}\right\}d\alpha \\
& -\frac{i\kappa'}{2\pi}\iint w(x', z')e^{i\gamma t}d\hat{S}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha_1}+\int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}}\right\}\frac{\sec^2\alpha}{b_1'-b_2'}\{b_1'e^{b_1'(z+z')+ib_1'\bar{\omega}}-b_2'e^{b_2'(z+z')+ib_2'\bar{\omega}}\}d\alpha \quad (3.2)
\end{aligned}$$

となる。無限遠方の流れの条件を § 2 の場合と同様に考えれば速度ポテンシャル Φ は、

$$\begin{aligned}
\Phi = & -\frac{1}{2\pi}\iint w(x', z')e^{i\gamma t}d\hat{S}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)d\hat{S} \\
& +\frac{\kappa'}{2\pi^2}\iint w(x', z')e^{i\gamma t}d\hat{S}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\oint_0^\infty ke^{k(z+z')}\left\{\frac{e^{-ik\bar{\omega}}}{\left(k\cos\alpha-\frac{v}{V}\right)^2-\kappa'k}+\frac{e^{ik\bar{\omega}}}{\left(k\cos\alpha+\frac{v}{V}\right)^2-\kappa'k}\right\}dkd\alpha \\
& -\frac{i\kappa'}{2\pi}\iint w(x', z')e^{i\gamma t}d\hat{S}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2\alpha}{a_1'-a_2'}\{a_1'e^{a_1'(z+z')-ia_1'\bar{\omega}}-a_2'e^{a_2'(z+z')-ia_2'\bar{\omega}}\}d\alpha \\
& +\frac{i\kappa'}{2\pi}\iint w(x', z')e^{i\gamma t}d\hat{S}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha_1}+\int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}}\right\}\frac{\sec^2\alpha}{b_1'-b_2'}\{b_1'e^{b_1'(z+z')+ib_1'\bar{\omega}}+b_2'e^{b_2'(z+z')+ib_2'\bar{\omega}}\}d\alpha \quad (3.3)
\end{aligned}$$

と書かれる。これが深吃水船の対称動揺の速度ポテンシャルである。

§ 4 深吃水船の非対称流場

自由表面が攪乱される時の加速度ポテンシャルは、(1.2) に波動の項を加えたものである。即ち

$$\begin{aligned}
\phi(x, y, z, t) = & \frac{1}{4\pi}\iint \phi'(x', z')e^{i\gamma t}\left(\frac{y}{R_1^3}+\frac{y}{R_2^3}\right)d\hat{S} \\
& -\frac{1}{2\pi^2}\iint \phi'(x', z')e^{i\gamma t}d\hat{S}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty ke^{k(z+z')}\sin\alpha\sin k\bar{\omega}dkd\alpha \\
& -\frac{\kappa'}{2\pi^2}\iint \phi'(x', z')e^{i\gamma t}d\hat{S}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty k^2e^{k(z+z')}\frac{\sin\alpha\left[\left\{k^2\cos^2\alpha+\left(\frac{v}{V}\right)^2-\kappa'k\right\}\sin k\bar{\omega}+2\frac{iv}{V}k\cos\alpha\cos k\bar{\omega}\right]}{\left\{\left(k\cos\alpha-\frac{v}{V}\right)^2-\kappa'k\right\}\left\{\left(k\cos\alpha+\frac{v}{V}\right)^2-\kappa'k\right\}} \\
& \times dk d\alpha \quad (4.1)
\end{aligned}$$

である。(4.1) に (2.4) を適用すれば、速度ポテンシャルの主要部 Ψ が求められる。整理して書けば、

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{1}{4\pi V} \iint \phi'(x', z') e^{i\nu t} d\hat{S} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{i\nu}{V}(x-X)} \left\{ \frac{y}{\{(X-x')^2 + y^2 + (z-z')^2\}^{3/2}} + \frac{y}{\{(X-x')^2 + y^2 + (z+z')^2\}^{3/2}} \right\} \\ & \times dX + \frac{1}{4\pi^2 V} \iint \phi'(x', z') e^{i\nu t} d\hat{S} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty k e^{k(z+z')} \sin \alpha \left\{ \frac{\left(k \cos \alpha - \frac{\nu}{V}\right) e^{-ik\tilde{\omega}}}{\left(k \cos \alpha - \frac{\nu}{V}\right)^2 - \kappa' k} \right. \\ & \left. + \frac{\left(k \cos \alpha + \frac{\nu}{V}\right) e^{ik\tilde{\omega}}}{\left(k \cos \alpha + \frac{\nu}{V}\right)^2 - \kappa' k} \right\} dk d\alpha \end{aligned} \quad (4.2)$$

となる。

(4.2) の右边を第1項に依つて表わされるものと、第2項に依つて表わされるものとの二つに分け、前者を Ψ_1 、後者を Ψ_2 と書く事にする。

Ψ_1 は自由表面の攪乱には無関係の項で、然もこれに相当する加速度ポテンシャルは (4.1) の右边第1項であつて攪乱源の無限遠方で零となる。従つて Ψ_1 に関しては流れは無限前方で静止しているものと考えてよいから、これに相当する速度ポテンシャル Φ_1 は

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \frac{1}{4\pi V} \iint \phi'(x', z') e^{i\nu t} d\hat{S} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{i\nu}{V}(x-X)} \left\{ \frac{y}{\{(X-x')^2 + y^2 + (z-z')^2\}^{3/2}} \right. \\ & \left. + \frac{y}{\{(X-x')^2 + y^2 + (z+z')^2\}^{3/2}} \right\} dX d\hat{S} \end{aligned} \quad (4.3)$$

と書かれる。これは無限遠方の流れの条件を満足している。

Ψ_2 は自由表面攪乱を表わす項が含まれているから、§2 と同様の方法に依つて無限遠方の流れの条件を満足する速度ポテンシャルを求めればよい。(2.7) を用いれば、

(4.2) の中の Ψ_2 の $x-x' \rightarrow \pm\infty$ に於ける漸近函数 $\Psi_{2\pm\infty}$ は、

$$\begin{aligned} \Psi_{2-\infty} = & -\Psi_{2\infty} = \frac{i}{4\pi V} \iint \phi'(x', z') e^{i\nu t} d\hat{S} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan \alpha \{ M_1' e^{a_1'(z+z') - ia_1'\tilde{\omega}} - M_2' e^{a_2'(z+z') - ia_2'\tilde{\omega}} \} d\alpha \\ & - \frac{i}{4\pi V} \iint \phi'(x', z') e^{i\nu t} d\hat{S} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} \right\} \tan \alpha \{ N_1' e^{b_1'(z+z') + ib_1'\tilde{\omega}} - N_2' e^{b_2'(z+z') + ib_2'\tilde{\omega}} \} d\alpha \end{aligned} \quad (4.4)$$

となる。§2 と同様に考え無限遠方の流れの条件を満足する Ψ_2 に相当する速度ポテンシャルは、

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & \frac{1}{4\pi^2 V} \iint \phi'(x', z') e^{i\nu t} d\hat{S} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty k e^{k(z+z')} \sin \alpha \left\{ \frac{\left(k \cos \alpha - \frac{\nu}{V}\right) e^{-ik\tilde{\omega}}}{\left(k \cos \alpha - \frac{\nu}{V}\right)^2 - \kappa' k} + \frac{\left(k \cos \alpha + \frac{\nu}{V}\right) e^{ik\tilde{\omega}}}{\left(k \cos \alpha + \frac{\nu}{V}\right)^2 - \kappa' k} \right\} \\ & \times dk d\alpha - \frac{i}{4\pi V} \iint \phi'(x', z') e^{i\nu t} d\hat{S} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan \alpha \{ M_1' e^{a_1'(z+z') - ia_1'\tilde{\omega}} - M_2' e^{a_2'(z+z') - ia_2'\tilde{\omega}} \} d\alpha \\ & + \frac{i}{4\pi V} \iint \phi'(x', z') e^{i\nu t} d\hat{S} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} \right\} \tan \alpha \{ N_1' e^{b_1'(z+z') + ib_1'\tilde{\omega}} + N_2' e^{b_2'(z+z') + ib_2'\tilde{\omega}} \} d\alpha \end{aligned} \quad (4.5)$$

と書かれる。非対称流場の速度ポテンシャルは (4.3) と (4.5) を加えたものである。即ち、

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{4\pi V} \iint \phi'(x', z') e^{i\nu t} d\hat{S} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{i\nu}{V}(x-X)} \left\{ \frac{y}{\{(X-x')^2 + y^2 + (z-z')^2\}^{3/2}} + \frac{y}{\{(X-x')^2 + y^2 + (z+z')^2\}^{3/2}} \right\} \\ & \times dX + \frac{1}{4\pi^2 V} \iint \phi'(x', z') e^{i\nu t} d\hat{S} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty k e^{k(z+z')} \sin \alpha \left\{ \frac{\left(k \cos \alpha - \frac{\nu}{V}\right) e^{-ik\tilde{\omega}}}{\left(k \cos \alpha - \frac{\nu}{V}\right)^2 - \kappa' k} + \frac{\left(k \cos \alpha + \frac{\nu}{V}\right) e^{ik\tilde{\omega}}}{\left(k \cos \alpha + \frac{\nu}{V}\right)^2 - \kappa' k} \right\} \\ & \times dk d\alpha - \frac{i}{4\pi V} \iint \phi'(x', z') e^{i\nu t} d\hat{S} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan \alpha \{ M_1' e^{a_1'(z+z') - ia_1'\tilde{\omega}} - M_2' e^{a_2'(z+z') - ia_2'\tilde{\omega}} \} d\alpha \end{aligned}$$

$$+\frac{i}{4\pi V}\iint\phi'(x',z')e^{i\gamma t}d\hat{S}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha_1}+\int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}}\right\}\tan\alpha\{N_1'e^{b_1(z+z')+ib_1'\bar{z}}+N_2'e^{b_2(z+z')+ib_2'\bar{z}}\}d\alpha\quad(4.6)$$

と書かれる。

第2章 境界値

§5 境界条件

第1章に於て求めた速度ポテンシャルは夫々 Laplace の方程式を満足すると共に、自由表面及び無限遠の境界条件を満足している。そこでこれ等の速度ポテンシャルが最後に残された浸水面の境界条件を満足するならば流場に於て要求される総ての条件を充たす事になる。本節ではこの浸水面の境界条件に就て考察する。

一般の船型の境界条件から浅吃水船及び深吃水船の境界条件を導く操作は定常理論の場合に於て詳細に論じてあるから⁵⁾、ここでは一般的議論は省略して、個々の場合に分けて考える事にする。

浸水面上の点の座標を (x, y, z') とする。

i) 浅吃水船：

浸水面上の流体の垂直方向の誘導速度は、浸水面の姿勢及び運動状態に伴つて、

$$\frac{dz'}{dt} = -\frac{\partial z'}{\partial t} + V\frac{\partial z'}{\partial x'} \quad (5.1)$$

と一致しなければならない。浸水面が調和振動をしている場合には、

$$\frac{dz'}{dt} = F(x, y)e^{i\gamma t} \quad (5.2)$$

と書かれる。

今二三の実例に就て $F(x, y)$ を求めてみる。

a) Pitching

二次元流場の場合と同様に、 $F(x, y)$ は y には無関係で、

$$\frac{F(x)}{V} = \left(-\frac{\nu}{V}x + i\right)\alpha \quad \text{となる。}$$

b) Heaving

この場合は $F(x, y)$ は x 及び y に無関係で $F/V = \nu\delta/V$ となる。

c) Rolling

この時は浸水面の z 座標は $z' = -i\beta ye^{i\gamma t}$ と書かれるから、

$$F(y)/V = \nu\beta y/V \quad \text{となる。}$$

この場合は F は x に無関係である。

α, δ 及び β は夫々の振幅である。浸水面上の誘導速度は (2.13) を z で微分して形式的に $z=0$ として Cauchy の主値をとればよい。

ii) 深吃水船の非対称流場：

この場合の取扱は浅吃水船と全く同様である。

船が横方向に調和振動をしている場合、浸水面上の流体粒子は

$$\frac{dy'}{dt} = -\frac{\partial y'}{\partial t} + V\frac{\partial y'}{\partial x'} = F(x, z)e^{i\gamma t} \quad (5.3)$$

の速度で y 軸方向に運動しなければならない。

二三の例に就て F を求めてみる。

d) Yawing

Yawing の動揺中心を船体中央にとれば $y' = i\gamma xe^{i\gamma t}$ と書かれる。故に $F(x)/V = (-\nu x/V + i)\gamma$ である。

e) Rolling

動揺の中心の z 座標を h とすれば $y' = -i\beta(z-h)e^{i\gamma t}$ と書かれるから $F(z)/V = \nu\beta(z-h)/V$ である。

f) 並行左右動

この時は $y' = -i\epsilon e^{i\gamma t}$ であるから $F/V = \nu\epsilon/V$ となる。

茲に、 γ, β 及び ϵ は動揺の振幅である。

5) 前掲 2) 参照。

浸水面上の誘導速度は (4.6) を y で微分して, $y=0$ と置けば求められる。

iii) 深吃水船の対称流場:

この場合は前二者と異り, 曲面の大部分の所で, その接線方向と運動方向とのなす角が小さいと仮定する場合であるから, 曲面の運動に依つて起される流体攪乱は, 主として曲面の勾配に依つて起される。

今浸水面の形状が, 静止状態のとき, $y=f_0(x, z)$ に依つて表わされるものとする。これが非定常運動を行う時は近似的に,

$$y=f_0(x, z)-\frac{\partial f_0}{\partial z}f_1(x, y) \quad (5.4)$$

と置いても大差ないと仮定する。茲に $f_1(x, t)$ は浸水面上の各点の z 方向の変位である。

$$y-f_0(x, z)+\frac{\partial f_0}{\partial z}f_1(x, t)=F(x, y, z, t)$$

と書けば, 浸水面の境界条件は,

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\mathbf{q} \cdot \text{grad } F=0$$

である。茲に $\mathbf{q}$ は流体の速度ベクトルである。流体の誘導速度も $\text{grad } F$ も小さく, その二次以上の項を省略して差支えないとすれば,

$$v_y=-\left(\frac{\partial}{\partial t}+V\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f_0}{\partial z}f_1\right)+V\frac{\partial f_0}{\partial x}$$

となる。茲に v_y は浸水面上に於ける y 軸方向の誘導速度である。この式の右辺第 2 項は時間に無関係であるから除外する。船が調和振動を行う時は $\bar{f}_1=-i\bar{f}_1e^{i\omega t}$ と書かれるから,

$$v_y=\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi}{\partial y}=\left\{-V\frac{\partial f_0}{\partial z}\bar{f}_1+iV\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_0}{\partial z}\bar{f}_1\right)\right\}e^{i\omega t} \quad (5.5)$$

である。(3.3) から $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ を求めれば, 右辺第 1 項以外は消失して,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi}{\partial y}=\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \iint w(x', z')e^{i\omega t} \frac{y}{\{(x-x')^2+y^2+(z-z')^2\}^{3/2}} d\hat{S}=w(x, z)e^{i\omega t}$$

となる。これと (5.5) より,

$$-V\frac{\partial f_0}{\partial z}\bar{f}_1+iV\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_0}{\partial z}\bar{f}_1\right)=w(x, z) \quad (5.6)$$

を得る。これが深吃水船の対称流場の場合の境界条件であつて, 船型及び船の運動状態が与えられた時には, 単に積分を行うだけで, 流場を計算する事が出来る。

簡単な実例に就て $\bar{f}_1$ を求めてみる。

g) Pitching

動揺中心を船体中心にとれば $f_1=i\alpha x e^{i\omega t}$ であるから $\bar{f}_1=-\alpha x$ となる。

h) Heaving

$f_1=-i\delta e^{i\omega t}$ であるから, $\bar{f}_1=\delta$ である。