(昭和 32 年 5 月造船協会春季講演会に於て講演)

有限幅平板の摩擦抵抗に関する理論的研究

正 員 笹 島 秀 雄*

正 員 高 木 又 男*

The Effect of Breadth on the Frictional Resistance
of a Flat PlateBy Hideo Sasajima, *Member*
and Matao Takagi, *Member*

Abstract

The effect of breadth on the frictional resistance of a flat plate can be explained by the boundary layer around edges of the plate. As the first approximation this may be obtained without considering an athwart flow induced by non-uniform thickness of the layer. To solve this problem, the authors showed that when the coordinate system is properly chosen the equations of motion can be reduced to a single equation in the direction of main flow, and that the elliptic coordinates are almost satisfactory to this condition. Thus the equation to be solved is simplified as eq. (4.1) in this paper.

The velocity distribution is obtained by the momentum transfer theory with some modifications corresponding to the elliptic coordinates. Putting this velocity in the momentum equation, the frictional resistance of the plate is calculated as a function of its Reynolds number and aspect ratio.

The results are shown in figs. 3, 4 and 5. Fig. 3 is the distribution of shearing stress in the athwart direction, Fig. 4 the experiments by several authorities, and Fig. 5 the percentage increase of the resistance.

1. 緒 論

平板の摩擦抵抗が其の形状、特に縦横比の影響を受けることは、かなり古くから認められていた様で、故平賀博士の下縁効果などもこれを表わしていたと見られるが、最近 Hughes¹⁾²⁾ によつて行われた一連の実験は明瞭にこの影響の存在を示し、しかも量的にも相当のものであることを教えている。

しかしながらこの種の云わば二次的な微小差を実験で見出す場合には、実験の精度が極めて高いことを要求される。勿論 Hughes もこの点に就ては随分苦心を払つてはいるが、例えば縦横比の小さい時は、必然的に板の長さが減じて R 数を上げることが困難になるばかりでなく、計器の idle 抵抗の割合が大きくなること、又浮舟による実験では自由表面の影響が避けられないことなど、本質的な曖昧さが残つていて、彼自身既に水槽壁の影響として大きな量を仮定し明かな実験差をこの中に押込めている。従つて Wieghardt³⁾ も指摘している様に、彼が導いた結論の一つである R 数の影響を受けないこと、並に無限幅平板に対する basic line の値の低過ぎることには多くの疑問を抱かざるを得ない。これらの点を明かにするため、著者等は混合距離理論に依つて有限幅平板の摩擦抵抗を計算し、その抵抗増加率を求めた。この方面の基礎的な実験が皆無に等しい現在、定量的に問題を論ずることは困難であるが定性的な結論は誤っていないと信ずる。

2. 有限幅平板に関する簡単な考察

有限幅平板の摩擦抵抗が無限幅のそれに比して割高になる原因は、たとい平板と雖、無限幅の一部から切出し

原稿受付. 1 月 10 日

* 大阪大学工学部

たと考えたものよりも運動に参加する——逆に言えば板が引摺らねばならぬ——流体量が多く、従つて運動量変化の量も増すことにある。

これを求めるには今日の境界層理論では少くとも二度に分けて近似計算をする以外に方法はない。即ち第一近似は境界層外の流れは板の中心線の方に平行であるとして問題を解き、第二近似はかくして得られた境界層の厚さを考慮して、方程式の境界条件である境界層外側の流れを修正して計算を行うのである。しかしこの第二近似を求めるには余程の困難が予想され、本報告は第一近似の結果だけに過ぎないが、一応簡単に全般的な考察をして見る。説明の便宜上、第一近似に含まれる抵抗増加の原因を第一原因と呼び、第二近似のものを第二原因とする。

先づ第一原因を直観的に見易くするために、次の様な大雑把な計算を行つて見る。仮りに有限幅平板の周りの境界層が均一であるとすれば、抵抗は無限幅としての受持ちの外に、その両側縁に恰も細い針金の抵抗を半分づつ加えたか様の様になる。半径 r_0 なる針金の抵抗は、表面からの距離を y として次の式で与えられる。

$$R = 2\pi\rho \left\{ r_0 \int_0^\delta (U-u)u \, dy + \int_0^\delta y(U-u)u \, dy \right\}$$

第一項は平坦な部分と同型であるから単に側縁部の厚さに応ずる面積増加に基づくもので、板の縦横比を見掛けの値よりも低めるに過ぎない。第二項が有限幅なるための増分で、 r_0 なる半径には無関係である。

このように簡単化して考えると、有限幅の影響は境界層の運動量厚さに比して板幅が狭い程顕著に現われることがわかる。従つて一定 R 数では縦横比の大なる程又一定縦横比なら R 数が小なる程抵抗増加率は大きい。第5図にはこの計算による結果も入れてある。勿論乱棒な仮定のため、量的に実験に合わないのは当然であるが、定性的な関係は誤っていない。実際には側縁附近の境界層の曲率の影響で局部抵抗が増すと共に速度分布が急になり、境界層は薄くなつてこの計算程度大きな抵抗増加は起らない。

抵抗増加の第二原因を簡単化すれば、境界層の排除厚さだけ板厚が増したことにある。このために周囲の流体は扁平紡錘体の場合の様に均一な流れではなくなり、それに応じて抵抗変化の起ることが考えられる。Wieghardt は有限幅の影響としてこれに相当するものをあげ抵抗増加の機構を次の様に説明している。即ち板の中心部以外では横流れを生ずるため中心部では外から流入する流れが存在せねばならぬが、横流れは側縁に二個の近接した渦を置いたものと等価であり、この渦が勢力を消費するだけ抵抗増加が起ると云うのである。これは速度場の表現としては巧みであるけれども、板の両面の境界層を連続させるのに必ずしも横流れを必要としないから、渦の強さを定めるための条件が、例えば翼の循環の場合の様に存在しないことを思う時、実際の計算には利用し難いと予想される。又渦の勢力を如何に扱うかも困難な問題であろう。

計算方法は別としてこの抵抗増加の傾向は第一の場合の運動量厚さの代りに排除厚さを入れたのと同様である。 R 数一定なら縦横比が大なる程厚い紡錘体になり、縦横比一定では R 数小なる程紡錘体長さの方向の変化が大きくて、何れも横流れを増加させる。従つて抵抗増加も亦第一の場合と同一傾向にあると考えられる。

3. 楕円座標による有限幅平板の取扱ひ

本節では境界層外側の流れが板の中心線に平行である場合の有限幅平板の摩擦抵抗を計算する。厳密にこれを求めるためには境界層が薄いとする仮定を採用してもなお問題は二次元の連立方程式を解かねばならぬ。このような正攻法は層流を取扱うのならばまだしも、乱流の現象を取扱うには現在の乱流理論の知識を以てしては不可能である。それ故第一に考えるべき手段は運動方程式の次元を一個減じてもよいような座標系を仮令近似的にもせよ見出すことであろう。

第1図

今第1図に示す如き楕円座標をとり、 z 軸を平板の中心線に一致して流れの方向に向け、板幅を $2c$ とする。この時直交坐標との変換式は

$$\left. \begin{aligned} x &= c \cosh \xi \cdot \cos \eta \\ y &= c \sinh \xi \cdot \sin \eta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

により与えられる。 ξ, η, z の増す方向の平均流速を夫々 u, v 及び w とし、

乱動速度には『∨』を附し、『-』を以つてその時間平均を表わすものとすれば、連続条件及び境界層の厚さ方向以外の運動方程式は次の如く書ける

$$\frac{1}{c\lambda} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\cosh \xi \sinh \xi}{c\lambda^3} u + \frac{1}{c\lambda} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\cos \eta \sin \eta}{c\lambda^3} v + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} & \rho \left(\frac{u}{c\lambda} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{v}{c\lambda} \frac{\partial v}{\partial \eta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\cosh \xi \sinh \xi}{c\lambda^3} u \cdot v - \frac{\cos \eta \sin \eta}{c\lambda^3} u^2 \right) \\ &= \frac{1}{c\lambda} \frac{\partial \tau_{\eta\xi}}{\partial \xi} + \frac{1}{c\lambda} \frac{\partial \bar{p}_{\eta\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{\eta z}}{\partial z} + \frac{\cos \eta \sin \eta}{c\lambda^3} (\bar{p}_{\xi\xi} - \bar{p}_{\eta\eta}) - \frac{2 \cosh \xi \sinh \xi}{c\lambda^3} \tau_{\eta\xi}, \\ & \rho \left(\frac{u}{c\lambda} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{v}{c\lambda} \frac{\partial w}{\partial \eta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{1}{c\lambda} \frac{\partial \tau_{z\xi}}{\partial \xi} + \frac{1}{c\lambda} \frac{\partial \tau_{z\eta}}{\partial \eta} + \frac{\cosh \xi \sinh \xi}{c\lambda^3} \tau_{z\xi} \\ &+ \frac{\cos \eta \sin \eta}{c\lambda^3} \tau_{z\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

但し $\bar{p}_{\eta\eta} = \bar{p}_{\eta\eta} - \rho \bar{v}^2$, $\tau_{\eta\xi} = \overline{\tau_{\eta\xi}} - \rho \overline{u'v'}$, $\tau_{\eta z} = \overline{\tau_{\eta z}} - \rho \overline{v'w'}$, $\bar{p}_{z\xi} = \bar{p}_{z\xi} - \rho \bar{w}^2$
及び $\tau_{z\xi} = \overline{\tau_{z\xi}} - \rho \overline{u'w'}$

であり、 $\bar{p}_{\eta\eta}$, $\tau_{\eta\xi}$ 等は粘性のみによる応力を示す。

又 $\lambda = \sqrt{\sin^2 \eta + \sinh^2 \xi}$

である。

然るに今日の乱流理論では $\tau_{\eta z}$ に就ては殆んど知られて居ないから、これを含め座標系であることが望ましい。それで両式とも右辺のこれを含む項は省略し得るものと仮定して計算を進める。

この仮定に従えば (3.3) の運動量積分方程式は、第一式及び第二式に就て夫々

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\xi_s} \rho w (W - w) c^2 \lambda^2 d\xi + \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^{\xi_s} \rho v (W - w) c \lambda d\xi = c \sin \eta (\tau_{\xi z})_{\xi=0}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\xi_s} \rho w (V - v) c^2 \lambda^2 d\xi + \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^{\xi_s} \rho v (V - v) c \lambda d\xi = c \sin \eta (\tau_{\xi \eta})_{\xi=0} \quad (3.5)$$

となる。ここに

W, V 境界層外側の流速

ξ_s 境界層の厚さに対応する ξ の値

$(\tau_{\xi z})_{\xi=0}, (\tau_{\xi \eta})_{\xi=0}$ 板面上 ξ の剪断応力

扱て v の大きさを調べるために ε を z 及び η の函数として

$$v = \varepsilon w, \text{ 従つて又 } (\tau_{\xi \eta})_{\xi=0} = \varepsilon (\tau_{\xi z})_{\xi=0}$$

と置き、(3.5) に代入し z 及び η に関する微分を実行して (3.4) より差引くと

$$\left\{ \int_0^{\xi_s} \rho w (W - \omega) c^2 \lambda^2 d\xi \right\} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \left\{ 2 \varepsilon \int_0^{\xi_s} \rho w (W - \omega) c \lambda d\xi \right\} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} = 0$$

を得る。然るに板の先端では明かに $\varepsilon=0$ であるから ε は到る処零である。即ち v は $\tau_{\eta z}$ が省略出来る時は零と見做して差支えなく、従つて運動量積分方程式は z 方向のみを考えればよい。このことは今の場合についてのみ得られる結果ではなく、一般にどの様な座標系の場合にも云える事柄であつて、座標系選択の適否は一つにかかつて、 $\tau_{\eta z}$ に相当する量が無視し得るか否かにあると云える。而してこの判断は計算を終つた後始めて行い得るのであつて楕円座標の場合には後に示す様に一応満足すべきものであると判断される。

4. 速度分布

速度分布の導出は著者の一人が先に発表⁴⁾した方法による。即ち剪断力分布を運動方程式より近似的に求め、運動量輸送理論によつて剪断力と速度勾配の関係式を得るからこれを積分して速度分布を出す。

前節の所論により η 方向の変化が無視されるものとして z 方向の運動方程式は

$$\frac{u}{c\lambda} \frac{\partial w}{\partial \xi} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\rho c\lambda} \frac{\partial \tau}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \cdot \tau \quad (4.1)$$

である。ここに τ は $\tau_{\xi z}$ で以後脚符を除いて書くことにする。(4.1) 式に於て左辺の慣性項を無視すれば剪断力

の分布は

$$\tau = \tau_0 \frac{\sin \eta}{\lambda} \quad (4.2)$$

層流底層部分では μ を流体の粘性係数として $\tau = \mu \frac{1}{c\lambda} \frac{\partial w}{\partial \xi}$ であるから、之を (4.2) に代入し積分すればこの部分の速度分布として

$$w/w_* = \alpha \quad (4.3)$$

を得る。ここに

$$w_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \quad \alpha = R_* \sin \eta \cdot \xi \quad \text{及び} \quad R_* = \frac{w_* c}{\nu}$$

である。層流底層の厚さは直交坐標の時に倣い $\eta = \text{const.}$ に沿つて計つた長さ s により普遍的な関係⁴⁾

$$s_1^2 \left(\frac{\tau}{\mu} \right)_{s=s_1} = k \quad (4.4)$$

により与えられるものとする。但し s_1 は層流底層の厚さ、 k は常数である。 $s=s_1$ に対応する値にはすべて脚符『1』を附して表わすものとすれば、 ξ と s の関係及び (4.2) を考慮して (4.4) は

$$\alpha_1 = 2\sqrt{\frac{k}{\nu}} \gamma_1 \sqrt[4]{1+\gamma_1^2} / \{ \gamma_1 \sqrt{1+\gamma_1^2} + \log(\gamma_1 + \sqrt{1+\gamma_1^2}) \} \quad (4.5)$$

となる。但し ν は動粘性係数、 $\gamma = \frac{\xi}{\sin \eta}$ である。

次に乱流領域に於ても上述の s をとつて混合距離理論が成立つものとすれば、壁面近傍の遷移領域を無視して

$$\tau = \rho K^2 s^2 \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 \quad (K: \text{定数}) \quad (4.6)$$

本報告の目的は摩擦抵抗の相対的な増分計算にあるから、計算の簡単化のため Prandtl に倣つて剪断力分布は、其の誤差が混合距離を直線とおくための影響と互に打消し合うことが予想される様な形 (4.2) を用いることにすれば、乱流領域の速度分布として

$$\frac{w}{w_*} = \frac{2}{K} \int_{\gamma_1}^{\gamma} \frac{\sqrt[4]{1+\gamma^2}}{\gamma \sqrt{1+\gamma^2} + \log(\gamma \sqrt{1+\gamma^2})} d\gamma + \alpha_1 \quad (4.7)$$

を得る。ここで無限幅平板の速度分布との比較を明かにするために $\beta = R_* \sin^2 \eta$ を導入する。 $\gamma = \alpha/\beta$ であるから (4.7) は

$$\frac{w}{w_*} = \frac{2}{K \cdot \beta} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{\sqrt[4]{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}{\frac{\alpha}{\beta} \sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2} + \log\left(\frac{\alpha}{\beta} \sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}\right)} d\alpha + \alpha_1 \quad (4.8)$$

第2図

となる。 w/w_* を、 β_2 を副変数とし $\log_{10} \alpha$ を横軸にとつて描けば第2図の通りである。(4.8) に於て $\beta \rightarrow \infty$ とすれば、無限幅平板の速度分布として

$$w/w_* = \frac{1}{K} \log \frac{\alpha}{\sqrt{k/\nu}} + \sqrt{k/\nu}$$

が得られ、一般に用いられる対数分布と一致させるには、 $K=0.4$ として $\sqrt{\frac{k}{\nu}} = 11.5$ を用いればよい。(4.3)、(4.8) を運動量積分方程式に代入して摩擦抵抗を計算するわけであるが、以後の計算を簡単に遂行するために乱流領域の速度分布を単に $\log \frac{\alpha}{\alpha_1}$ の一次式として次の様に置き

かえる。即ち

$$\frac{w}{w_*} = \varphi(\alpha) = \alpha_1 \left(1 + \frac{1}{4.6} \log \frac{\alpha}{\alpha_1} \right) \quad (4.9)$$

第2図に破線をもつてこれを示す。

5. 摩 擦 抵 抗

摩擦抵抗は Kármán の運動量積分方程式

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\xi_8} \rho w (W-w) c^2 \lambda^2 d\xi = c \sin \eta \tau_0 \quad (5.1)$$

に速度分布 (4.3), (4.4) を代入して求められる。積分を行つた結果は、

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{[J_1] + [J_2]}{\varphi(\alpha_8)} \right] = \frac{W}{\nu} \left\{ \frac{1}{\varphi(\alpha_8)} \right\}^2 \quad (5.2)$$

但し

$$\begin{aligned} \frac{[J_1]}{\alpha_1^3} &= \xi_1 [0.1229 + 0.04726 \log \xi_1] - (-0.04280 + 0.06144 \log \xi_1), \\ \frac{[J_2]}{\alpha_1^3} &= \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^2 \{ \xi_1^3 (0.02065 + 0.005252 \log \xi_1) - (-0.02935 + 0.01287 \log \xi_1) \}, \\ \xi_1 &= \frac{\xi_8}{\xi_1}, \quad \alpha_8 \cdots \xi_8 \text{ に対応する } \alpha \text{ の値} \end{aligned}$$

である。 α_1 は ξ_1 並に η の函数であり (4.9) より得られる

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1^2} = \frac{1}{R_e \sin^2 \eta} \left(1 + \frac{1}{4.6} \log \xi_1 \right),$$

なる関係と (4.5) より求められる。上式より知れる様に α_1 は ξ_1 即ち z 方向に関する変化が少いから、この変数に関しては定数として (5.2) を積分すれば

$$\alpha_1^4 [K_1] + \frac{\alpha_1^8}{(R_e \sin^2 \eta)^2} [K_2] = \frac{W_2}{\nu} + \text{const.} \quad (5.3)$$

を得る。但し

$$\begin{aligned} [K_1] &= \xi_1 (0.0900 + 0.0535 \log \xi_1 + 0.01027 \log^2 \xi_1) - (-0.0428 + 0.0708 \log \xi_1) \\ [K_2] &= \xi_1^3 (0.01825 + 0.01695 \log \xi_1 + 0.00592 \log^2 \xi_1 + 0.000881 \log^3 \xi_1 + 0.0000540 \log^4 \xi_1) \\ &\quad - (-0.0294 - 0.00500 \log \xi_1 + 0.00421 \log^2 \xi_1 + 0.000911 \log^3 \xi_1 + 0.0000659 \log^4 \xi_1). \end{aligned}$$

(5.3) の定数は先端から乱流が始まるものとすれば近似的に零とおくことが出来るから、結局平板の後端では

$$\alpha_1^4 [K_1] + \frac{\alpha_1^8}{(R_e \sin^2 \eta)^2} [K_2] = R_L \quad (5.4)$$

が成立ち、これから層流底層の厚さと境界層の厚さとの比を求めることが出来る。但し、 $R_L = WL/\nu$ で L は平板の長さである。

平板の単位幅当りの抵抗 D_η は (5.1) を積分して

$$D_\eta = \frac{1}{\sin \eta} \int_0^{\xi_8} \rho c \lambda^2 w (W-w) d\xi \quad (5.5)$$

を得る。再び (4.3), (4.9) を代入して積分すれば

$$C_f' = \frac{D_\eta}{\frac{1}{2} \rho W^2 L} = \frac{2}{R_L} \left[\alpha_1^2 [L_1] + \frac{\alpha_1^6}{(R_e \sin^2 \eta)^2} [L_2] \right] \quad (5.6)$$

を得る。但し

$$\begin{aligned} [L_1] &= \frac{1}{1 + \frac{1}{4.6} \log \xi_1} \{ \xi_1 (0.1229 + 0.0473 \log \xi_1) - (-0.0428 + 0.0614 \log^2 \xi_1) \} \\ [L_2] &= \xi_1^3 (0.0207 + 0.00974 \log \xi_1 + 0.001142 \log^2 \xi_1) \\ &\quad - (-0.0294 + 0.00649 \log \xi_1 + 0.00280 \log^2 \xi_1). \end{aligned}$$

平板の全抵抗係数 C_f は (5.6) の平均値であるから、

$$C_f = \frac{1}{c} \int_0^c C_f' dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} C_f' \sin \eta d\eta$$

に依り計算出来る。

無限幅平板の抵抗係数を $C_{f\infty}$ とすれば、有限幅平板の無限幅平板に対する全抵抗の増加の割合 r は、

$$r = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{C_{f'}}{C_{f\infty}} - 1 \right) \sin \eta d\eta \quad (5.7)$$

に依つて与えられる。

斯くして、与えられた R_L, R_e , 及び η に対して (5.4) によつて ξ_1 を求め、(5.6) に依つて $C_{f'}$ を求めれば (5.7) から r が求まる筈であるが、ただ η が小さい処及び $C_{f'}$ と $C_{f\infty}$ との差の小さい処では特別の計算を必要とする。即ち η が極めて小さい時は (5.3), (5.6) は夫々

$$R_L = \frac{(529)^2}{\left(1 + \frac{1}{4.6} \log \xi_1\right)^2} [K_2],$$

$$C_{f'} = \frac{2}{R_L} \left\{ \left(\frac{529}{1 + \frac{1}{4.6} \log \xi_1} \right)^{\frac{3}{2}} (R_e \sin^2 \eta)^{-\frac{1}{2}} [L_2] \right\}$$

となり、又 $C_{f'}$ と $C_{f\infty}$ との差が小さい所では $R_e \rightarrow \infty$ の時 $\xi_1 \rightarrow \xi_\infty$ とすれば $\Delta \xi = -(\xi_1 - \xi_\infty)$ は (5.4) を展開して

$$\frac{\Delta \xi}{\xi_\infty} = - \frac{\frac{\alpha_1^4}{(R_e \sin^2 \eta)^2} [K_2]}{[K_1'] + \frac{\alpha_1^4}{(R_e \sin^2 \eta)^2} [K_2']}$$

によつて与えられる。ここに

$$[K_1'] = \xi_\infty (0.1435 + 0.0740 \log \xi_\infty + 0.01027 \log^2 \xi_\infty) - 0.0708,$$

$$[K_2'] = \xi_\infty^3 (0.0352 + 0.0288 \log \xi_\infty + 0.0856 \log^2 \xi_\infty + 0.01097 \log^3 \xi_\infty + 0.00540 \log^4 \xi_\infty)$$

$$- (-0.00500 + 0.00842 \log \xi_\infty + 0.00273 \log^2 \xi_\infty + 0.000264 \log^3 \xi_\infty).$$

同様な展開を (5.6) に対して行えば、

$$C_{f'} - C_{f\infty} = \frac{2}{R_L} \left\{ \frac{\alpha_1^6}{(R_e \sin^2 \eta)^2} [L_2] - \left\{ \alpha_1^2 [L_1'] + \frac{\alpha_1^6}{R_e \sin^2 \eta} [L_2'] \right\} \frac{\Delta \xi}{\xi_\infty} \right\}$$

が得られる。ここに

$$[L_1'] = \frac{1}{1 + \frac{1}{4.6} \log \xi_\infty} \left\{ \xi_\infty (0.1702 + 0.0473 \log \xi_\infty) - 0.0614 \right\} - \frac{1}{4.6} [L_1],$$

$$[L_2'] = \xi_\infty^3 (0.0304 + 0.01202 \log \xi_\infty + 0.001142 \log^2 \xi_\infty) - (0.00649 + 0.00560 \log \xi_\infty).$$

以上によつて (5.7) に必要な被積分函数の値は知れるから、数値積分によつて r を求めることが出来る。

最後に以上の計算の仮定である (3.3) 式の $\tau_{\eta z}$ の大きさに就て調べる。 $\tau_{\eta z}$ が如何なる形で表わされるかは知られていないから、その値を計算することは出来ないが、次の様にして $\tau_{\xi z}$ と比較することが出来る。乱流に於ける Reynolds 応力と雖、其の発生の原因は主流の速度勾配にあると見られるから——単に形式的に運動量輸送理論に模した形を考えると勾配の自乗に比例する——両剪断力の比較は $\partial w / \partial \xi$ と $\partial w / \partial \eta$ との大小によつて判断してよいであろう。この微係数の比は w 一定の曲線と ξ 一定の曲線とのなす角の余切で与えられるが、今は大体の程度を知ればよいのであるから全ての点に就て調べなくても、例えば境界層の外側即ち $w = W$ なる曲線に対して当て見れば充分である。境界層の厚さは次式によつて与えられる。

$$\xi_\delta = \frac{\xi_1 \cdot \alpha_1^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{4.6} \log \xi_1\right)}{R_e \sin^2 \eta}$$

第3図の上段の図は各 R 数に対し両曲線の関係を描いたもので、 ξ 一定の線は水平に直してあるから曲線の傾斜が所要の角を与える。これをみると $\partial w / \partial \eta$ は板幅の大部分に涉つて殆んど無視出来、側縁の極く近傍になると $\partial w / \partial \xi$ と同じ程度の大きさになるが、これが全体の抵抗値に及ぼす影響は同図の下段の幅方向の抵抗分布を示す $(C_{f'}/C_{f\infty} - 1) \sin \eta$ の曲線と対応させて見ると高々数 % に過ぎないことが推測される。それ故楕円坐標に

よる計算は始めの仮定を略々満足していることがわかる。

6. 実験値との比較

第 4 図は諸氏の実験結果を示したもので、各 R 数毎に相当の散布はあるが、大体の平均線を画いた。直線は著

第 3 図

者、曲線は Hughes のものである。

第 5 図は抵抗増加率 r を比較してある。何れも R 数及び縦横比に対し第 2 節で予想した傾向をもつ点では一致しているが、値は計算値が約半分である。殊に Hughes の線からみるとその差は更に大きく、しかも R 数に無関係とする点は根本的な相違である。以下これ等の差異に就て考える。

先づ実験値は前図の様に相当の幅があつて、ある程度の誤差は勿論存在するであろうが、傾斜が半分になるとは思えない。一方計算値は混合距離、剪断力分布等に仮定があるし、又途中の計算にも略算を含んでいる等問題となる点は少くないから、数値の比較は今後の研究に俟た

第 4 図

第 5 図

量的な関係を離れて質的な面から見ると、Hughes が実験のみから R 数に無関係とした点はどうも無理の様

である。 R 数が増せば物体寸法と相対的な境界層厚さは薄くなる筈なのに、彼の結論に合わす為には側縁の境界層だけはこの法則に従わず不変に残らねばならぬ。仮令第二の原因を考慮しても、 R 数の増加につれて排除厚さは減ずるから、やはり不合理である。彼の第一報は R 数の影響を入れていたのに、第二報では低 R 数の実験に重きを置いて、これを水槽壁の干渉に帰したことが原因である。又このために全体の r が低 R 数の値迄水増しされた結果になつているから、Wieghardt の指摘した様に彼の basic line は R 数と共に上昇して Schoenherr の線に接近すべきである。

7. 総 括

a) 有限平板の摩擦抵抗増加の原因は、板の側縁に於ける境界層の形成にあるが、これは二つに分けて取扱わねばならない。第一は境界層外の流れが板の中心線に平行である場合で、本報告はこれを計算したものである。第二は境界層の厚みが不均一である為め横流れを生ずるから、これを運動方程式の境界条件に取り入れて考えるものである。

b) 前条の二つの原因は何れも同傾向の影響を生じ、 R 数小なる程、板の縦横比大なる程抵抗増加が著しい。

c) 第一の原因の計算を行うにあたり、楕円坐標を用いると運動方程式は単一のしかも簡単な形として大きな誤りは生じない。

d) 計算方法は運動量輸送理論に倣つて速度分布を求め、運動量積分式に入れて抵抗値を計算した。

e) 抵抗増加率の計算値は実験と比較して、量的には約半分にしかならぬが、定性的な傾向は合っている。Hughes が R 数に無関係としたのは無理であり、従つて彼の basic line は R 数の大なる程 Schoenherr の線に近づけなければならぬ。

終りに臨み数値計算の労を煩わした仲渡工学修士に感謝の意を呈する。

文 献

- (1) Hughes, TINA, 1952
- (2) Hughes, TINA, 1954
- (3) Wieghardt, Schiff und Hafen, 1955, H 2.
- (4) Sasajima, Tech. Report of Osaka Univ., 1951, Vol. 1.