圧縮力を受ける補強板の塑性挫屈について

——第 1 報 軸対称型防撓材を有する場合——

正員 楠 田 忠 雄*

On the Plastic Buckling of Stiffened Panels under Axial Compression

Part 1 Panels with Axi-symmetric Type of Stiffeners

By Tadao Kusuda, *Member*

Abstract

The general instability of a stiffened flat plate under axial compression is a problem of primary buckling of a bending type of deformation of the stiffener about an axis parallel to the plane of the sheet and a twisting type of deformation in which the stiffener rotates about an axis in the plane of the sheet. The paper treats the primary buckling of stiffened plates in the strain-hardening range as well as in the elastic range. The secondary or local buckling of the stiffener or plate such as crippling of the stiffener or interfastener buckling of plate are excluded.

From consideration of the yielding process of structural steel it has been shown that the material becomes anisotropic when strained into the strain-hardening range. Introducing appropriate moduli the problem may then be treated as buckling of an orthotropic plate.

Buckling in the elastic range, then, is a particular case of the orthotropic solution with the elastic moduli of steel. The application of the integral equation to the buckling of a stiffened plate simplifies the problem and saves labor and time for computation. The single basic integral equation covers the whole domain of the plate. The stiffener reactions enter as transverse or twisting loads but do not introduce new boundary conditions.

The required minimum bending rigidity of a stiffener is obtained in both elastic and strain-hardening range. The effect of torsional resistance of a stiffener on buckling strength is investigated for the stiffener with a symmetric type of thin-walled open cross-section.

§ 1. 緒 言

補強板の塑性挫屈強度は防撓材を溶接した際の残留応力の大きさ並に分布状態によつてかなり異り、正確にこれを解析する事は困難である。然し塑性変形が進行するにつれて残留応力は減少してゆき、歪硬化が始まる近傍では残留応力の影響は殆ど無視する事が出来る¹⁾。従つて歪硬化が始まる点迄圧縮しても挫屈しないように補強板を設計すればその挫屈応力は正確に推定する事が出来る。一方塑性設計の見地からも構造物が塑性変形によつて崩壊する以前に塑性挫屈を生じないという事が必要であり、挫屈限界を歪硬化の開始点迄高めるという事は塑性設計を可能にする為にも必要条件となつてくる²⁾。

補強板の板並びに防撓材の両者がいずれも歪硬化の開始点で挫屈するように設計されておれば、塑性挫屈崩壊はパネル全体にわたつて同時に生じ、最小重量設計の条件も満足される事になる³⁾。次に弾性挫屈を生じた補強板はさらに大きな荷重に耐える事が出来るので、最大荷重を求めるのには線型理論は無力であるが、塑性挫屈の場合には挫屈荷重と最大荷重との差は小さく線型理論から最大荷重を推定する事が出来る¹⁾。以上の点より圧縮を受ける補強板の設計には歪硬化の開始点で挫屈するように各部の寸法を決定するのが合理的であると考えられる。

§ 2. 補強板の塑性挫屈強度に影響する諸因子

鋼板を挫屈する事なしに歪硬化領域迄圧縮すると、板は直交異方性板の性質を示し²⁾、応力-歪曲線の tangent

原稿受付 昭和 34 年 1 月 10 日

* 運輸技術研究所

modulus は圧縮方向と荷重のない方向とは異つた値をとる。剛性率も変化しこれら材料の歪硬化領域での諸係数 $E_x, E_y, G_t, \nu_x, \nu_y$ によつて塑性挫屈強度が異つてくる。

防撓材側の因子としては上記の材料の機械的性質の他に防撓材の曲げ剛性並びに捩り剛性がある。曲げ剛性に關連して板の歪硬化域での有効幅の問題があり、また捩り剛性は St. Venant の成分と warping の成分とに分かれる。即ち

(a) St. Venant torsion ($G_t K$)

(b) warping torsion ($E_t W$)

但し E_t は tangent modulus, W は warping constant, K は St. Venant の torsion constant である。防撓材の捩り剛性はまた断面形状が中実の場合、薄肉の open cross section の場合、同じく closed cross section の場合等によつて異つた性質を示す。第1報では板に垂直な軸の周りに対称な断面について報告する。特に実用的な薄肉中空の open cross section について理論解を求めたが、closed cross section の場合例えば hat shape 等にも直ちに応用出来る。中実の場合例えば矩形断面の場合には捩り剛性は曲げ剛性に対して省略出来る。

§ 3. 直交異方性板の Green 函数

(a) 単位荷重に対する Green 函数

横荷重を受ける直交異方性板の微分方程式⁴⁾

$$K_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 K_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + K_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y)$$

より単純支持の場合、単位横荷重に対して Green 函数は

$$G(x, y; \xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{mn}(x, y) \cdot \varphi_{mn}(\xi, \eta)}{\lambda_{mn}^2} \quad (1)$$

で与えられる。ここに

$$\varphi_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2)$$

$$\lambda_{mn}^2 = K_x \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 K_{xy} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + K_y \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \quad (3)$$

a, b は矩形板の長さおよび幅である。

(b) 単位モーメントに対する Green 函数

近接した2つの反対方向の集中荷重 P による撓みを合成し、 $M_x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P \cdot \varepsilon = 1$ の極限をとれば x 方向の単位モーメントに対する Green 函数は単位横荷重に対する Green 函数の x 方向の微係数 $\partial G / \partial \xi(x, y; \xi, \eta)$ で与えられ、 y 方向の単位モーメントに対するものは y 方向の微係数 $\partial G / \partial \eta(x, y; \xi, \eta)$ で与えられる事が直ちに導かれる。

4. 防撓材を有する直交異方性板の有効幅

Fig. 1 に示す如き縦防撓材、或いは Fig. 2 の如き横防撓材を有する板が、圧縮力を受けて挫屈する瞬間の微小撓み変形に対する板の有効幅は、次の如き仮定のもとに直交異方性板に対して求める事が出来る。

(a) 防撓材に対しては曲げ理論を採用する。

(b) 板の曲げ剛性は防撓材の曲げ剛性に比して無視する。

Fig. 1 Longitudinally Stiffened Plate

Fig. 2 Transversely Stiffened Plate

(c) 横防撓材は弾性のまま残り、縦防撓材は歪硬化域まで圧縮されている。

(d) Fig. 3 の有効幅の中では応力の増分 σ^* は一定で撓みによる y 方向の板の面内応力の増分 $d\sigma_y$ を x 方向に積分したものと次の関係で結ばれる。

$$2b_e\sigma^*h = h \int_{-a/2}^{a/2} (d\sigma_y) dx \quad (4)$$

ここに h = 板厚, $2b_e$ = 有効幅, a = 板の長さ, である。

歪硬化領域にある板の応力-歪関係は Flow Theory に従つて次の如くに表わす事が出来る²⁾。

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_x &= \frac{1}{E_x} d\sigma_x - \frac{\nu_y}{E_y} d\sigma_y \\ d\varepsilon_y &= \frac{1}{E_y} d\sigma_y - \frac{\nu_x}{E_x} d\sigma_x \\ d\gamma_{xy} &= \frac{1}{G_t} d\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

また応力の増分に対する釣合方程式は

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}(d\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(d\tau_{xy}) &= 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x}(d\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(d\sigma_y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

歪の増分に対する適合条件式は

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}(d\varepsilon_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(d\varepsilon_x) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(d\gamma_{xy}) = 0 \quad (7)$$

応力増分に対して応力函数 ϕ を導入して,

$$d\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, d\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, d\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (8)$$

(5)~(8) 式より応力函数 ϕ の満足する微分方程式は

$$D_x \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - 2F \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (9)$$

但し

$$D_x = \frac{E_x}{1-\nu_x\nu_y}, D_y = \frac{E_y}{1-\nu_x\nu_y}, 2F = D_x \left(\nu_y - \frac{E_y}{G_t} \right) + \nu_x D_y \quad (10)$$

である。

横防撓材が中央に 1 本ある場合の境界条件は

$$x=0 \text{ で } u=0, d\sigma_y = \sigma^* \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$x=\pm a/2 \text{ で } u=0, d\gamma_{xy}=0$$

で与えられる。ここに u は x 方向の変位の増分である。(9) 式をこの境界条件のもとに解き、(4) 式に代入して有効幅を求めると

$$\begin{aligned} \frac{b_e}{b} &= \frac{2b\omega_1}{\pi^2\mu\psi} \left[(\psi + \rho^2) \sinh \frac{\omega_1 a}{2} \cos \frac{\omega_2 a}{2} - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{\omega_2}{\omega_1} \psi \right) \rho \sinh \frac{\omega_1 a}{2} \sin \frac{\omega_2 a}{2} \right. \\ &\quad \left. - (1 + \psi) \cdot \rho \cdot \left(\cosh \frac{\omega_1 a}{2} \cos \frac{\omega_2 a}{2} - 1 \right) + \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \rho^2 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \psi \right) \cosh \frac{\omega_1 a}{2} \sin \frac{\omega_2 a}{2} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

ここに

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{E}{D_x}, q^2 = \sqrt{\frac{D_x}{D_y}}, q^2 > p^2 \\ \mu &= \left(1 + 2\rho^2 \cdot \frac{1}{\psi} \right) \cdot (q^2 - p^2) - (q^2 + p^2) \end{aligned}$$

$$\rho = \frac{\sinh \frac{\omega_1 a}{2} \cosh \frac{\omega_1 a}{2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \psi \cdot \sinh \frac{\omega_2 a}{2} \cos \frac{\omega_2 a}{2}}{\cosh^2 \frac{\omega_1 a}{2} \sin^2 \frac{\omega_2 a}{2} + \sinh^2 \frac{\omega_1 a}{2} \cos^2 \frac{\omega_2 a}{2}}$$

Fig. 3 Effective Width of Plate

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{n\pi}{b} \right) \sqrt{q^2 - p^2}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{n\pi}{b} \right) \sqrt{q^2 + p^2}$$

$$\psi = \frac{\sqrt{D_x D_y} - \nu_y D_x}{\sqrt{D_x D_y} + \nu_y D_x}$$

A-7 Steel に対しては次の数値が求められている²⁾。

$$D_x = 3,000 \text{ ksi}, D_y = 32,800 \text{ ksi}, G_t = 2,400 \text{ ksi}, \nu_x D_y = \nu_y D_x = 8,100 \text{ ksi} \quad (12)$$

(12) 式の値を (11) 式に代入すると Fig. 4 の鎖線の如くなり、弾性の場合より有効幅は小さくなる。なお図の中の α は板の長さとの比 a/b である。幅 b で無限帯板の場合は

$$\frac{b_e}{b} = \frac{b\omega_1}{\pi^2} \cdot \frac{1+\psi}{\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \sqrt{q^4 - p^4} - p^2 \psi} \quad (13)$$

となり (12) 式の値を代入すれば $b_e/b = 0.148$ で与えられる。

縦防撓材が中央に 1 本ある場合も同様にして求める事が出来、Fig. 5 の如くなる。長さ a で幅が無限の場合には有効幅は全幅が長さ a に等しくなる。有効幅が横防撓材の場合よりも広がっているのは板の異方性に起因する。防撓材と有効幅を含めた断面の曲げ剛性は縦防撓材自身が降伏しており、その曲げ剛性も EI から $E_t I$ へと約 3/100 に落ちているので、有効幅だけからでは縦横防撓材の比較にはならない。

Fig. 4 Effective Width of Plate for Transverse Stiffener

Fig. 5 Effective Width of plate for Longitudinal Stiffener

§ 5. 軸対称型防撓材と板との相互作用

(a) 縦防撓材の場合

軸圧縮力を受ける薄肉 open cross section の捩り曲げ挫屈に関しては古くから多くの研究が行われている^{5~8)}。いま薄い板に取りつけられた軸対称型防撓材が軸圧縮力を受ける場合を考えるとその釣合方程式⁹⁾は

$$E_t I_z^L \frac{d^4 v_s}{dx^4} + \sigma_x A^L \left[\frac{d^2 v_s}{dx^2} + z_s^L \frac{d^2 \varphi^L}{dx^2} \right] + k_y [v_s + (z_s^L - z_A^L) \varphi^L] = 0 \quad (14)$$

$$E_t I_y^L \frac{d^4 w_s}{dx^4} + \sigma_x A^L \left[\frac{d^2 w_s}{dx^2} - y_s^L \frac{d^2 \varphi^L}{dx^2} \right] + k_z [w_s - (y_s^L - y_A^L) \varphi^L] = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} E_t W^L \frac{d^4 \varphi^L}{dx^4} - [G_t K^L - \sigma_x A^L (r_0^L)^2] \frac{d^2 \varphi^L}{dx^2} - \sigma_x A^L \left[y_s^L \frac{d^2 w_s}{dx^2} - z_s^L \frac{d^2 v_s}{dx^2} \right] \\ + k_y [v_s + (z_s^L - z_A^L) \varphi^L] \cdot (z_s^L - z_A^L) \\ - k_z [w_s - (y_s^L - y_A^L) \varphi^L] \cdot (y_s^L - y_A^L) \\ + k_\varphi \cdot \varphi^L = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

で与えられる。ここに座標軸は Fig. 6 に示す通りで図の C は重心、 S は剪断中心、 A は板との接点である。板の防撓材に対する影響は水平方向、垂直方向並びに回転の 3 個の spring で防撓材に拘束しているとする。

(14) 式は weak axis の周りの変形に対するもので v_s は剪断中心の y 方向の変位、 φ^L は防撓材の A 点の周

りの回転角である。

$E_t I_z^L = z$ 軸 (weak axis) の周りの防撓材の曲げ剛性

$\sigma_x A^L =$ 防撓材の軸圧縮力

$z_s^L =$ 重心と剪断中心との距離の z 方向の成分

$z_A^L =$ 重心と接点 A との距離の z 方向の成分

$E_t I_y^L = y$ 軸 (strong axis) の周りの防撓材の曲げ剛性

$w_s =$ 剪断中心の z 方向の変位

$y_s^L =$ 重心と剪断中心との距離の y 方向の成分

$y_A^L =$ 重心と接点 A との距離の y 方向の成分

$W^L =$ 防撓材の warping constant

$K^L =$ 防撓材の St. Venant torsion の振り常数

$r_0^2 = 1/A^L(I_y^L + I_z^L) + (y_s^L)^2 + (z_s^L)^2$

$k_x, k_y, k_\varphi =$ Fig. 6 の spring の常数

軸対称型の防撓材の場合は $y_s^L = y_A^L = 0$ である。また防撓材と板との接点 A の y 方向の変位 v_A は零であるので、

$$v_A = v_s + (z_s^L - z_A^L) \varphi^L = 0 \quad (17)$$

然し spring constant k_y と v_A との積 $k_y v_A$ は有限で水平方向の反力 H に等しい。Fig. 6 の T 型防撓材の場合は更に

$$z_s^L - z_A^L = -d_w^L \quad (\text{但し } d_w^L = \text{防撓材の深さ})$$

である。従つて (17) 式より

$$v_s = d_w^L \cdot \varphi^L \quad (18)$$

また接点 A の z 方向の変位 w_A は

$$w_A = w_s - (y_s^L - y_A^L) \cdot \varphi^L = w_s \quad (19)$$

(18) (19) を (14), (15), (16) 式に代入し、水平反力 H を消去すると

$$E_t I_y^L \frac{d^4 w_A}{dx^4} + \sigma_x A^L \frac{d^2 w_A}{dx^2} + k_z w_A = 0 \quad (20)$$

$$[E_t W^L + E_t I_z^L \cdot (d_w^L)^2] \cdot \frac{d^4 \varphi^L}{dx^4} - [G_t K^L - \sigma_x A^L (R^L)^2] \cdot \frac{d^2 \varphi^L}{dx^2} + k_\varphi \cdot \varphi^L = 0 \quad (21)$$

但し

$$(R^L)^2 = 1/A^L(I_y^L + I_z^L) + (z_A^L)^2$$

Fig. 7 Coordinates of Transverse Stiffener (Symmetric Cross-Section)

Fig. 6 Coordinates of Longitudinal Stiffener (Symmetric Cross-Section)

T 型防撓材の場合は warping constant $W=0$ であるので結局板が挫屈変形する場合の防撓材の抵抗 $k_z w_A$ および $k_\varphi \varphi^L$ は (20) および (21) 式よりそれぞれ

$$k_z w_A = -E_t I_y^L \frac{d^4 w_A}{dx^4} - \sigma_x A^L \frac{d^2 w_A}{dx^2} \quad (22)$$

$$k_\varphi \varphi^L = -E_t I_z^L \cdot (d_w^L)^2 \cdot \frac{d^4 \varphi^L}{dx^4} + [G_t K^L - \sigma_x A^L (R^L)^2] \cdot \frac{d^2 \varphi^L}{dx^2} \quad (23)$$

で表わされる。

(b) 横防撓材の場合

横防撓材には軸力が働いておらずまだ弾性であるので E_t の代りに E をまた (22), (23) 式で σ_x を零とおけば直ちに

$$k_z w_A = -E I_y^T \frac{d^4 w_A}{dy^4} \quad (24)$$

$$k_\varphi \cdot \varphi^T = -E I_z^T \cdot (d_w^T)^2 \cdot \frac{d^4 \varphi^T}{dy^4} + G K^T \cdot \frac{d^2 \varphi^T}{dy^2} \quad (25)$$

を得る。但し座標系は Fig. 7 の通りである。

§ 6. 補強板の挫屈に対する積分方程式

i 番目の縦防撓材の接点 A の撓み w_{Ai} および回転 φ_i^L は

$$\left. \begin{aligned} w_{Ai}(x) &= w(\xi, \eta_i) \\ \varphi_i^L(x) &= -\frac{\partial w}{\partial \eta}(\xi, \eta_i) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

また j 番目の横防撓材については

$$\left. \begin{aligned} w_{Aj}(y) &= w(\xi_j, \eta) \\ \varphi_j^T(y) &= -\frac{\partial w}{\partial \xi}(\xi_j, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

で板の撓み w と結びつけられる。集中荷重並びに集中モーメントに対する Green 関数と (22), (23), (24), (25), (26), (27) の諸式より n 個の縦防撓材並びに m 個の横防撓材を有する直交異方性板の挫屈に対する積分方程式は次の如くなる。

$$\begin{aligned} w(x, y) = & -\int_0^a \int_0^b N_x \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) \cdot G(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta \\ & - \sum_{i=1}^n \int_0^a \left[E_t I_{y_i}^L \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4}(\xi, \eta_i) + \sigma_x A_i^L \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}(\xi, \eta_i) \right] \cdot G(x, y; \xi, \eta_i) d\xi \\ & - \sum_{i=1}^n \int_0^a \left[E_t I_{x_i}^L (d_{w_i}^L)^2 \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial \eta}(\xi, \eta_i) - \{G_t K_i^L - \sigma_x A_i^L (R_i^L)^2\} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta}(\xi, \eta_i) \right] \\ & \quad \times \frac{\partial G}{\partial \eta}(x, y; \xi, \eta_i) d\xi \\ & - \sum_{j=1}^m \int_0^b E I_{x_j}^T \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4}(\xi_j, \eta) \cdot G(x, y; \xi_j, \eta) d\eta \\ & - \sum_{j=1}^m \int_0^b \left[E I_{x_j}^T \cdot (d_{w_j}^T)^2 \frac{\partial^5 w}{\partial \xi \partial \eta^4}(\xi_j, \eta) - G K_j^T \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2}(\xi_j, \eta) \right] \times \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, y; \xi_j, \eta) d\eta \quad (28) \end{aligned}$$

但し $N_x = \sigma_x \cdot h$ である。

(28) 式は直交関数を用いて解く事が出来、その解は

$$\begin{aligned} \left[N_x \left(\frac{r\pi}{a} \right)^2 - \lambda_{rs}^2 \right] \alpha_{rs} = & \frac{2}{b} \cdot \left(\frac{r\pi}{a} \right)^4 \cdot \sum_{i=1}^n E_t I_{y_i}^L \sin \frac{s\pi \eta_i}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{rp} \sin \frac{p\pi \eta_i}{b} \\ & - \frac{2}{b} \cdot \left(\frac{r\pi}{a} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n \sigma_x A_i^L \sin \frac{s\pi \eta_i}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{rp} \sin \frac{p\pi \eta_i}{b} \\ & + \frac{2}{b} \cdot \left(\frac{r\pi}{a} \right)^2 \cdot \left(\frac{s\pi}{b} \right) \sum_{i=1}^n \left[E_t I_{x_i}^L \cdot (d_{w_i}^L)^2 \cdot \left(\frac{r\pi}{a} \right)^2 + G_t K_i^L - \sigma_x A_i^L (R_i^L)^2 \right] \\ & \quad \times \cos \frac{s\pi \eta_i}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{rp} \left(\frac{p\pi}{b} \right) \cos \frac{p\pi \eta_i}{b} \\ & + \frac{2}{a} \cdot \left(\frac{s\pi}{b} \right)^4 \sum_{j=1}^m E I_{x_j}^T \sin \frac{r\pi \xi_j}{a} \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{qs} \sin \frac{q\pi \xi_j}{a} \\ & + \frac{2}{a} \cdot \left(\frac{s\pi}{b} \right)^2 \cdot \left(\frac{r\pi}{a} \right) \cdot \sum_{j=1}^m \left[E I_{x_j}^T \cdot (d_{w_j}^T)^2 \cdot \left(\frac{s\pi}{b} \right)^2 + G K_j^T \right] \cos \frac{r\pi \xi_j}{a} \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{qs} \\ & \quad \times \left(\frac{q\pi}{a} \right) \cos \frac{q\pi \xi_j}{a} \quad (29) \end{aligned}$$

(29) 式は $\alpha_{rs} (r=1, 2, 3, \dots, \infty, s=1, 2, 3, \dots, \infty)$ についての無限連立 1 次方程式を与え、その解が挫屈境界値となる。

§ 7. 横防撓材を有する場合の挫屈強度

防撓材のない板のみの場合は (29) 式の右辺は零となり、 $\lambda_{rs}^2 = (r\pi/a)^2 N_x$ で表わされる。この式に前述の (3) 式を代入し、 $N_x = \sigma_{cr} \cdot h$ を考慮すれば板の歪硬化領域での最小挫屈応力 σ_{cr} は次の如くなる。(s=1)

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2}{12} \cdot \left(\frac{h}{b} \right)^2 \cdot \left[D_x \left(\frac{rb}{a} \right)^2 + D_y \left(\frac{a}{rb} \right)^2 + 2H \right] \quad (30)$$

但し $2H = \nu_x D_y + \nu_y D_x + 4G_t$, r = 荷重方向の半波形数, $K_x = D_x I$, $K_y = D_y I$, $K_{xy} = HI$

弾性の場合には $D_x = D_y = H = E/1 - \nu^2$ であり (30) 式より直ちに Bryan の式が得られる。

次に横防撓材が板の中央に 1 個ある場合には (29) 式で $i=0, j=1, \xi_j=a/2$ で弾性解は $K_x = K_{xy} = K_y = Eh^3/12(1-\nu^2) = DI$ とすれば直ちに得られる。即ち $s=1$ に対して

$$r^2 [k - k_{r,1}] \alpha_{r,1} = 2 \alpha \gamma_B^T \sin \frac{r\pi}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{q,1} \sin \frac{q\pi}{2} + 2 \frac{r}{\alpha} (\gamma_s^T + \pi^2 \gamma_w^T) \cos \frac{r\pi}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{q,1} \cdot q \cos \frac{q\pi}{2} \quad (31)$$

但し k = 補強板の挫屈係数、即ち $\sigma_{cr} = \pi^2/12 \cdot E/1 - \nu^2 \cdot (h/b)^2 \cdot k$

$k_{r,1}$ = 板のみの $(r, 1)$ の挫屈係数 $= (r/\alpha + \alpha/r)^2$

$\alpha = a/b$,

$\gamma_B^T = EI_B^T/DIb, \gamma_s^T = GK^T/DIb, \gamma_w^T = EI_s^T/DIb \cdot (d_w^T/b)^2$

(31) 式は r が奇数の場合と偶数の場合とに分れ夫々

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot \frac{1}{k - k_{(2n-1),1}} = \frac{1}{2 \alpha \gamma_B^T} \quad (32)$$

および

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k - k_{2n,1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\gamma_s^T + \pi^2 \gamma_w^T} \quad (33)$$

が挫屈係数 k を決定する。(32) および (33) 式は逐次近似法によつて容易に解ける。挫屈係数 k の収斂は極めて早く、Fig. 8 に示す如く、対称挫屈の場合も反対称挫屈の場合も数項で正確な結果が得られる。ここに γ_B^T は板の有効幅を含む防撓材の板の面に平行な軸の周りの慣性モーメント I_B^T に基づく防撓材の曲げ剛性と板の曲げ剛性との比である。板の半波形が偶数の場合には中央にある防撓材は節線となり撓み零となる為に、防撓材の曲げ剛性は板の挫屈強度に影響しないが防撓材が振れる為に振り剛性が入ってくる。(33) 式の γ_s^T は防撓材の St. Venant の振り剛性と板の曲げ剛性との比であり、 γ_w^T は warping rigidity と板の曲げ剛性の比である。T 型断面のみでは warping rigidity は零であるが板に取付けられている為の modified warping rigidity の形で入ってくるのである。(33) 式の解は Fig. 9 に示す如く種々の振り剛性によつて挫屈係数 k (実線) が変わるが、その様子は略々直線に近い。今 (33) 式の k の値を (32) 式の k に等しいとおけば防撓材の “minimum bending rigidity” γ_B^T (Mindeststeifigkeit) におよぼす振り剛性の影響が求まる。Fig. 9 の右側の縦軸はこの値を示す。

歪硬化領域に於ける挫屈の場合には (32) および (33) 式の記号は次の如くなる。即ち $\sigma_{cr} = \pi^2/12 \cdot (h/b)^2 \cdot D_x \cdot k$ において、

Fig. 8 Convergence of Buckling Coefficient k of Transversely Stiffened Plate (Elastic)

Fig. 9 Effect of Torsional Resistance of Stiffener on Buckling of Transversely Stiffened Plate (Elastic)

Fig. 10 Convergence of Buckling Coefficient k of Transversely Stiffened Plate (Strain-Hardening)

Fig. 11 Effect of Torsional Resistance of Stiffener on Buckling of Transversely Stiffened Plate (Strain-Hardening)

が板のみの場合の一般の挫屈強度を与える。縦防撓材のある場合には次の無次元量を導入する。

$$\gamma_B^L = \frac{EI_y^L}{DIb}, \gamma_s^L = \frac{GL^L}{DIb}, \gamma_w^L = \frac{EI_z^L}{DIb} \cdot \left(\frac{dw^L}{b}\right)^2, \delta = \frac{AL}{bh}, D = \frac{E}{1-\nu^2}, I = \frac{h^3}{12}$$

これらの量を使つて (29) 式で $i=1, j=0, \eta_i=b/2$ とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k - k_{r, 2n-1}} = \frac{1}{2 \frac{\bar{r}^2}{\alpha^2} \gamma_B^L - 2 \delta k} \quad (34)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{k - k_{r, (2n)}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\gamma_s^L + \frac{r^2}{\alpha^2} \pi^2 \gamma_w^L - \pi^2 \delta \left(\frac{R^L}{b}\right)^2 k} \quad (35)$$

が横方向に奇数および偶数の半波形をとる場合の挫屈係数 k を与える。(34) 式中の縦方向の半波数 $\bar{r}$ および (35) 式中の縦方向の半波数 r は夫々 a/b の各値に対して k が最小となるように決定されなければならない。(35) 式で撓り剛性を零とおくと偶数次の係数は $k = k_{r, (2n)}$ となり、これを (34) 式に代入すると δ の各値に対して縦防撓材の minimum bending rigidity γ_B^L が得られるがその結果は Barbré¹⁰⁾ の値と 0.2% 以下の差でよく一致した。(35) 式の反対称挫屈係数 k の収斂は Fig. 12 に示す如く極めて早い。

撓り剛性の影響を考える場合、横防撓材と比較して見ると大きな差のある事がわかる。いま正方形板 $\alpha=1$ の場合に同じ大きさの防撓材を横につけた場合と縦につけた場合を考えると、防撓材の曲げ剛性が限界曲げ剛性より大きい場合にはいずれの場合も板の節線と一致するが、前者は Fig. 13-1 に示す如く中央で最も撓られる。これ

Fig. 12 Convergence of Buckling Coefficient k of Longitudinally Stiffened Plate (Elastic)

$$k_{2n,1} = \left(\frac{2n}{\alpha}\right)^2 + 2\lambda + \mu \left(\frac{\alpha}{2n}\right)^2$$

$$\lambda = H/D_s, \quad \mu = D_y/D_s$$

$$\gamma_B^T = \frac{EI_s^T}{D_s Ib}, \quad \gamma_s^T = \frac{GK^T}{D_s Ib},$$

$$\gamma_w^T = \frac{EI_z^T}{D_s Ib} \cdot \left(\frac{dw^T}{b}\right)^2$$

A-7 Steel の場合には (12) 式より $\lambda=4.30$, $\mu=10.93$ となる。この場合の対称挫屈係数 k の収斂は Fig. 10 に示す如く極めて早い。また反対称挫屈係数におよぼす撓り剛性並びに minimum bending rigidity γ_B^T におよぼす撓り剛性の影響は Fig. 11 に示すようにこれまた直線に近い。

§ 8. 縦防撓材を有する場合の挫屈強度

縦防撓材が板の中央に 1 個ある場合を考える。この場合は横方向の半波数 s は 1 の場合が必ずしも最小挫屈値を与えるわけではないので一般形をとる。即ち弾性の場合には

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^2 k_{rs}$$

$$k_{rs} = \left(\frac{r}{\alpha} + s^2 \frac{\alpha}{r}\right)^2$$

に反して後者は Fig. 13-2 のように中央で直立前後で反対方向に撓られる事になる。波長が半分になれば warping rigidity は 4 倍となる。従つて縦防撓材では横防撓材の場合よりも撓り剛性の影響が大きく現われる。いま一例として $\delta=0.05$ の場合につき、防撓材の局部挫屈、横倒れ挫屈の起らないような寸法比の T 型断面について撓り剛性係数を求めると $\gamma_s^L=0.015$,

Fig. 13-1 Warping Deformation of Longitudinal Stiffener

Fig. 13-2 Warping Deformation of Longitudinal Stiffener

$\pi^2 \gamma_w^L = 0.070$, $\pi^2 \cdot \delta \cdot (R^L/b)^2 = 0.0025$ となり, これらを用いて minimum bending rigidity γ_B^L を求めると Fig. 14 に示すような差が生ずる。これは振り剛性によつて反対称挫屈係数が増大し, 従つて曲げ剛性を増大しなければ防撓材の効果を充分に発揮した反対称型挫屈とはならない事を意味している。

歪硬化領域の挫屈の場合には横方向に反対称で挫屈する際の縦方向の半波数 r と side ratio α との関係は

$$\alpha = \frac{\sqrt{r(r+1)}}{2} \cdot \frac{1}{\mu}$$

で与えられる。ここに $\mu = D_y/D_x$ である。

つぎに防撓材の局部および横倒れ挫屈を生じないように断面寸法比を用いて防撓材の振り剛性を求め, 挫屈強度におよぼす影響を調べると次の表のようになる。

Fig. 15 Required Bending Rigidity of Longitudinal T-Stiffener (Strain-Hardening)

Fig. 14 Required Bending Rigidity of Longitudinal T-Stiffener (Elastic)

(36)

$\alpha = a/b$	0.3	0.5	0.8	1.0	1.4	1.6	1.9	2.2
No Torsion	61.235	61.333	60.902	61.333	60.870	60.902	60.861	60.853
With Torsion	65.993	69.368	67.144	69.368	65.777	67.144	66.616	66.250
Increase (%)	7.73	13.10	10.25	13.10	8.06	10.25	9.46	8.87

但し (34), (35) 式で

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2}{12} \cdot \left(\frac{h}{b} \right)^2 \cdot D_x \cdot k, \quad \gamma_B^L = \frac{E_t I_y^L}{D_x I b},$$

$$\gamma_s^L = \frac{G_t K^L}{D_x I b}, \quad \gamma_w^L = \frac{E_t I_z^L}{D_x I b} \cdot \left(\frac{d_w^L}{b} \right)^2$$

この表からわかるように振り剛性が挫屈限界値 σ_{cr} を 8 乃至 13% 増加させている事がわかる。また minimum bending rigidity γ_B^L におよぼす振り剛性の影響は (34), (35) 式より第 15 図に示す如き結果が得られ, 最大 25% の差が生ずる。

§ 9. 結 言

塑性設計を行う為に補強材並びに板の設計を如何に決定したらよいかという問題に対し以上の如き計算を行つた。この結果補強板は歪硬化の開始点まで挫屈する事なく圧縮力に耐える事が出来, パネルの塑性挫屈

Fig. 16 Plate Buckling Curves

があげられ、塑性挫屈では防撓材の捩り剛性の影響が無視出来なくなる事を示している。Fig. 16 中板のみの場合の $\zeta=1.18$ は A-7 Steel では $b/h=34$ に相当し、実験結果¹¹⁾ $b/h=34.7$ とよく一致している。横防撓材の場合には $b/h=44$ また縦防撓材の場合には $b/h=72$ となる。これらの値は防撓材の捩り剛性を考慮した値である。また夫々の場合の防撓材の minimum bending rigidity についても捩り剛性の影響を検討した。この研究は米国海軍の依頼研究としてリーハイ大学フリッツ工学研究所で行った Ph. D. Dissertation の一部、対称型防撓材の部分で、指導を受けた Prof. Thürlimann に感謝の意を表する次第である。

参考文献

- 1) Haaijer, G. Thürlimann, B. : On Inelastic Buckling in Steel. Proc. A.S.C.E. No. 1581, 1958
- 2) Haaijer, G. : Plate Buckling in the Strain-Hardening Range, Proc. A.S.C.E. No. 1212, 1957
- 3) Zahorski, A. : Effect of Material Distribution on Strength of Panels. Journal of Aeronautical Sciences, Vol. XI, No. 3, 1944
- 4) Girkmann, K. : Flächentragwerke. vierte Auflage, Springer-Verlag, Wien, 1956
- 5) Wagner, H. : Verdrehung und Knickung von Offenen Profilen, Technische Hochschule, Danzig 1929, N.A.C.A. Tech. Memo, No. 807, 1936
- 6) Kappus, R. : Drillknicken Zentrisch Gedrückter Stäbe mit Offenen Profile im Elastischen Bereich. Luftfahrtforschung, Vol. 14, No. 9, 1937, N.A.C.A. Tech. Memo, No. 851, 1938
- 7) Lundquist, E.E., : A Theory for Primary Failure of Straight Centrally Loaded Columns. N.A.C.A. Rept. No. 582, 1937
- 8) Goodier, J.N. : The Buckling of Compressed Bars by Torsion and Flexure. Cornell Univ. Engineering Experimental Station, Bulletin, No. 27, 1941
- 9) Timoshenko, S. : Theory of Bending, Torsion and Buckling of Thinwalled Members of Open Cross-Section. Journal of the Franklin Institute 239, (3, 4, 5), 1945
- 10) Barbré, R. : Beulspannungen in Rechteckplatten mit Längssteifen bei Gleichmässiger Druckbeanspruchung. Bauingenieur, Vol. 17, 1936
- 11) Frankland, J.M. : The Strength of Ship Plating under Edge Compression. U.S. Experimental Model Basin, Rept. 469, 1940

を防止する事が出来る。いま T 型、防撓材について一例として $\alpha=0.5$ の場合に板のみの場合、横防撓材 1 個を有する場合並びに縦防撓材 1 個を有する場合について板の挫屈強度を比較すると Fig. 16 の如くなる。即ち板のみの場合は $\zeta=1.18$ で、また横防撓材の場合は $\zeta=1.53$ 、縦防撓材の場合は $\zeta=2.51$ で設計すればよい事になる。弾性限と歪硬化開始点との間は残留応力によつて異つた曲線となるが、実験的には 2 次曲線で近似される。 $\alpha=0.5$ の場合には弾性解では縦横防撓材の差が余りないが塑性になると差が大きくなる。この一つの原因には防撓材の warping rigidity