脆性破壊伝播に関する研究 (第 3 報)

——スリットが定速で拡大する場合の応力場——

正員 秋 田 好 雄*

正員 池 田 一 夫*

Theoretical Research on the Propagation of Brittle Fracture
(Third Report: Stress field for a propagating slit at the constant speed.)By Yoshio Akita, *Member*
and Kazuo Ikeda, *Member*

Abstract

The approximate solution of dynamical stress field for an enlarging or propagating slit at the constant speed under the uniform tensile stress at infinity was obtained by applying the expanding coordinates, and the correlation between the stress distribution and the crack speed was investigated.

1. 序 論

本報告は弾性体内において短軸長さが 0 の楕円孔, すなわちスリットが無限遠において短軸方向に一様引張応力をうけて長軸方向へ定速で拡大する場合の応力場を第 2 報¹⁾と同様に「拡大座標」をもちいてもとめ, 破壊伝播速度と応力場の関係をしらべた。

2. 基礎方程式

x および y 軸方向の応力, 歪, 変位を $\sigma_x, \sigma_y; \varepsilon_x, \varepsilon_y; u, v$, 剪断応力, 剪断歪, ヤング率, 剛性率, ポアソン比を $\tau_{xy}, \gamma_{xy}, E, G, \mu$ とすると応力と歪の関係より

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (1)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (3)$$

運動方程式は密度を ρ とすると

$$\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y = \rho \cdot \partial^2 u / \partial t^2, \quad \partial\sigma_y/\partial y + \partial\tau_{xy}/\partial x = \rho \cdot \partial^2 v / \partial t^2 \quad (4)$$

故に (1)~(4) 式より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad c^2 = E/(1-\mu^2)\rho \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

いま

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \quad (6)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \partial/\partial x &= \partial/\partial z + \partial/\partial \bar{z}, \quad \partial/\partial y = i(\partial/\partial z - \partial/\partial \bar{z}) \\ \partial^2/\partial x^2 &= \partial^2/\partial z^2 + 2\partial^2/\partial z \partial \bar{z} + \partial^2/\partial \bar{z}^2, \quad \partial^2/\partial y^2 = -\partial^2/\partial z^2 + 2\partial^2/\partial z \partial \bar{z} - \partial^2/\partial \bar{z}^2, \\ \partial^2/\partial x \partial y &= i(\partial^2/\partial z^2 - \partial^2/\partial \bar{z}^2) \end{aligned}$$

同様に

$$w = u + iv, \quad \bar{w} = u - iv$$

とおくと

$$u = (w + \bar{w})/2, \quad v = (w - \bar{w})/2i \quad (7)$$

故に (5) 式は

$$\left. \begin{aligned} \partial^2 w / \partial z^2 + K \cdot \partial^2 \bar{w} / \partial z \partial \bar{z} &= (\partial^2 \bar{w} / \partial t^2) / c^2 (1+\mu) \\ \partial^2 \bar{w} / \partial \bar{z}^2 + K \cdot \partial^2 w / \partial z \partial \bar{z} &= (\partial^2 w / \partial t^2) / c^2 (1+\mu), \quad K = (3-\mu)/(1+\mu) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

原稿受付 昭和 34 年 1 月 10 日

* 運輸技術研究所船舶構造部

第1図 拡大座標

いま $z = re^{i\theta}$ とし第2報の場合と同様に第1図に示すように時間に比例して拡大する「拡大座標」 $|r = kRt$ をもちいると孔縁 ($R=1$) における拡大速度は V なる故

$$dr/dt = Rk = V, \quad \text{故に } k = V/R \quad (9)$$

$$\text{故に } r = Vt \cdot R, \quad R = r/Vt \quad (10)$$

$$\text{いま } Z = z/Vt \quad (11)$$

$$\text{また } w = Vt \cdot W(Z, \bar{Z}) \quad (12)$$

とし、独立変数 $z, \bar{z}$ を $Z, \bar{Z}$ に変換すると、(8) 式の第1式は

$$\partial^2 W / \partial Z^2 + K \cdot \partial^2 \bar{W} / \partial Z \partial \bar{Z} = V^2 (Z^2 \partial^2 \bar{W} / \partial Z^2 + 2 Z \bar{Z} \cdot \partial^2 \bar{W} / \partial Z \partial \bar{Z} + \bar{Z}^2 \cdot \partial^2 \bar{W} / \partial \bar{Z}^2) / c^2 (1 + \mu) \quad (13)$$

(13) 式の逐次近似解として

$$W = W_0 + (V/c)^2 W_1 + (V/c)^4 W_2 + \dots \quad (14)$$

$$\text{第0近似は } \partial^2 W_0 / \partial Z^2 + K \cdot \partial^2 \bar{W}_0 / \partial Z \partial \bar{Z} = 0 \quad (15)$$

$$\text{第1近似は } \partial^2 W_1 / \partial Z^2 + K \cdot \partial^2 \bar{W}_1 / \partial Z \partial \bar{Z} = (Z^2 \cdot \partial^2 \bar{W}_0 / \partial Z^2 + 2 Z \bar{Z} \cdot \partial^2 \bar{W}_0 / \partial Z \partial \bar{Z} + \bar{Z}^2 \cdot \partial^2 \bar{W}_0 / \partial \bar{Z}^2) / (1 + \mu) \quad (16)$$

$$(15) \text{ 式を } Z \text{ で積分すると } \partial W_0 / \partial Z + K \cdot \partial \bar{W}_0 / \partial \bar{Z} = f(\bar{Z}) \equiv a \bar{\varphi}_0'(\bar{Z}) \quad (17)$$

ただし a は常数, f, φ_0 は任意函数である。

$$\text{共軛をとると } \partial \bar{W}_0 / \partial \bar{Z} + K \cdot \partial W_0 / \partial Z = a \varphi_0'(Z) \quad (18)$$

$$(17), (18) \text{ 式より } \partial W_0 / \partial Z = a \{ \bar{\varphi}_0'(\bar{Z}) - K \varphi_0'(Z) \} / (1 - K^2) \quad (19)$$

$$(19) \text{ 式を積分すると } W_0 = a \{ Z \bar{\varphi}_0'(\bar{Z}) - K \varphi_0(Z) + g(\bar{Z}) \} / (1 - K^2), \quad a = -(1 - K^2) / 2G, \quad g = \psi_0'(Z) \quad (20)$$

$$\text{故に } W_0 = \{ K \varphi_0(Z) - Z \varphi_0'(Z) - \psi_0'(Z) \} / 2G \quad (21)$$

次に (21) 式を (16) 式に代入すると

$$\partial^2 W_1 / \partial Z^2 + K \cdot \partial^2 \bar{W}_1 / \partial Z \partial \bar{Z} = \{ -Z^2 \bar{\varphi}_0'''(\bar{Z}) - Z^2 \psi_0'''(Z) - 2 Z \bar{Z} \varphi_0''(Z) + K \bar{Z}^2 \varphi_0''(\bar{Z}) \} / E \quad (22)$$

(22) 式を Z で積分した式とその共軛をとった式から $\partial \bar{W}_1 / \partial \bar{Z}$ を消去して $\partial W_1 / \partial Z$ をもとめ、さらに Z で積分し、一般解として B. H. F. (重調和函数) を加えると

$$W_1 = \frac{1}{E(1-K^2)} \left[K Z^2 \bar{Z}^2 \varphi_0''(\bar{Z}) - (1+K^2) \{ Z^2 \bar{Z} \varphi_0'(Z) - 2 Z \bar{Z} \varphi_0(Z) + 2 \bar{Z} \int \varphi_0(Z) dZ \} + K Z \bar{Z}^2 \psi_0''(\bar{Z}) - Z^2 \psi_0'(Z) - 2 K Z \bar{Z} \psi_0'(\bar{Z}) + 4 Z \psi_0(Z) + 2 K Z \bar{\psi}_0(\bar{Z}) - 6 \int \psi_0(Z) dZ \right] + \text{B. H. F.} \quad (23)$$

さらに式を簡単にするために B. H. F. である $K F(Z) - Z \bar{F}(\bar{Z})$, ただし, $F(Z) = 2K \int \psi_0(Z) dZ$ 等を加えて整理すると (23) 式は

$$(1-K^2) E W_1 = K Z^2 \bar{Z}^2 \varphi_0''(\bar{Z}) - (1+K^2) \left\{ Z^2 \bar{Z} \varphi_0'(Z) - 2 Z \bar{Z} \varphi_0(Z) + 2 \bar{Z} \int \varphi_0(Z) dZ \right\} - (1-K^2) \left\{ Z^2 \psi_0'(Z) - 4 Z \psi_0(Z) + 6 \int \psi_0(Z) dZ \right\} + \text{B. H. F.} \quad (24)$$

つぎに楕円座標を導入する。これまでにもちいた物理面 (x, y) での z と拡大座標面 (X, Y) での Z との関係のほかに、楕円座標面 (α, β) での γ との関係をもとめる。すなわち、

第2図 楕円座標

第3図 楕円座標と直角座標の変位の関係

$$\alpha + i\beta = \gamma \quad (25)$$

$$Z = \cosh \gamma \quad (26)$$

第2図の楕円座標での α, β 方向の変位 u_α, u_β と直角座標の x, y 方向の変位 u, v の関係は第3図より

$$\left. \begin{aligned} u_\alpha &= u \cos \phi + v \sin \phi, \\ u_\beta &= v \cos \phi - u \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\text{いま } w_{\alpha\beta} = u_\alpha + i u_\beta \quad (28)$$

$$\text{とおくと } w = u + i v \quad (29)$$

$$\text{なる故 } w_{\alpha\beta} = w e^{-i\phi}$$

一般に α, β 方向の歪 $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$ と剪断歪 $\gamma_{\alpha\beta}$ は次式によりあらわされる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= h \cdot \partial u_\alpha / \partial \alpha + h^2 u_\beta \cdot \partial (1/h) / \partial \beta, & \varepsilon_\beta &= h \cdot \partial u_\beta / \partial \beta + h^2 u_\alpha \cdot \partial (1/h) / \partial \alpha \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \partial (h u_\beta) / \partial \alpha + \partial (h u_\alpha) / \partial \beta, \end{aligned} \right\} \text{ただし } h = |d\gamma/dz| = |\partial\gamma/\partial Z|/Vt \quad (30)$$

$$\text{計算を簡単にするために} \quad e^\gamma = \xi \quad (31)$$

$$\text{とおくと (26), (31) 式より} \quad Z = (e^\gamma + e^{-\gamma})/2 = (\xi + 1/\xi)/2 \quad (32)$$

$$\text{共軛をとると} \quad \bar{Z} = (\bar{\xi} + 1/\bar{\xi})/2 \quad (33)$$

$$\text{一般に } h e^{-i\phi} = d\gamma/dZ \text{ なる故} \quad e^{i\phi}/h = dZ/d\gamma = Vt(\xi - 1/\xi)/2 \quad (34)$$

$$\text{共軛をとると} \quad e^{-i\phi}/h = Vt(\bar{\xi} - 1/\bar{\xi})/2 \quad (35)$$

$$\text{故に} \quad h = 2V \sqrt{(\xi - 1/\xi)(\bar{\xi} - 1/\bar{\xi})}/Vt, \quad e^{i\phi} = \sqrt{\xi - 1/\xi} / \sqrt{\bar{\xi} - 1/\bar{\xi}} \quad (36)$$

$$\text{また} \quad u_\alpha = \frac{1}{2}(w_{\alpha\beta} + \bar{w}_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}(w e^{-i\phi} + \bar{w} e^{i\phi}) = \frac{1}{2} \left(w \frac{\sqrt{\xi - 1/\xi}}{\sqrt{\bar{\xi} - 1/\bar{\xi}}} + \bar{w} \frac{\sqrt{\bar{\xi} - 1/\bar{\xi}}}{\sqrt{\xi - 1/\xi}} \right) \quad (37)$$

$$\text{同様に} \quad u_\beta = \frac{1}{2i} \left(w \frac{\sqrt{\xi - 1/\xi}}{\sqrt{\bar{\xi} - 1/\bar{\xi}}} - \bar{w} \frac{\sqrt{\bar{\xi} - 1/\bar{\xi}}}{\sqrt{\xi - 1/\xi}} \right) \quad (38)$$

$$\text{また} \quad \partial/\partial\alpha = \partial/\partial\gamma + \partial/\partial\bar{\gamma} = \xi \cdot \partial/\partial\xi + \bar{\xi} \cdot \partial/\partial\bar{\xi}, \quad \partial/\partial\beta = i(\partial/\partial\gamma - \partial/\partial\bar{\gamma}) = i(\xi \cdot \partial/\partial\xi - \bar{\xi} \cdot \partial/\partial\bar{\xi}) \quad (39)$$

故に (25), (26), (27) 式をもちい、 w の代りに W をもちいると

$$\sigma_\alpha = 2G \left(H \frac{\xi}{\xi - 1/\xi} \frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi} - 1/\bar{\xi}} \frac{\partial W}{\partial \bar{\xi}} \right) + \text{conj. compl.} \quad (40)$$

$$\sigma_\beta = 2G \left(H \frac{\xi}{\xi - 1/\xi} \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi} - 1/\bar{\xi}} \frac{\partial W}{\partial \bar{\xi}} \right) + \text{conj. compl.} \quad (41)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = 2G \frac{1}{i} \frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi} - 1/\bar{\xi}} \frac{\partial W}{\partial \bar{\xi}} + \text{conj. compl.} \quad (42)$$

$$\text{ただし} \quad H = (1 + \mu)/(1 - \mu) \quad (43)$$

また conj. compl とは右辺第 1 項の共軛複素数を意味する。境界条件は第 4 図において

(i) スリット先端 ($|\xi|=1$, 或いは $\xi = e^{i\beta}$) にて $\sigma_\alpha = 0$, $\tau_{\alpha\beta} = 0$ なる故 (40), (42) 式より

$$H\xi \cdot \partial W / \partial \xi + \bar{\xi} \cdot \partial W / \partial \bar{\xi} - \text{conj. compl} = 0 \quad (44)$$

$$\bar{\xi} \cdot \partial W / \partial \bar{\xi} + \text{conj. compl.} = 0 \quad (45)$$

(ii) 応力波到達円すなわち半径 c/V の円の外部は一樣応力場であり応力は Y 方向に p なる故、変位 W_{out} は

$$2GW_{\text{out}} = p \{ (\xi + 1/\xi)/H - (\bar{\xi} + 1/\bar{\xi}) \} / 4 \quad (46)$$

$$\text{であり応力波到達円上では } W = W_{\text{out}} \quad (47)$$

なお、第 4 図において点 (1) での X 方向の変位を $U(1)$, 点 (2) での Y 方向の変位を $V(2)$ とする。

3. 静 的 解

$$\text{静的解は (21) 式より} \quad 2GW = K\varphi(Z) - Z\varphi'(Z) - \bar{\psi}'(\bar{Z}) \quad (48)$$

$$\text{いま} \quad \varphi(Z) = \sum a_n / \xi^n, \quad \varphi'(Z) = -\sum 2na_n / (\xi - 1/\xi) \xi^n, \quad \bar{\psi}'(\bar{Z}) = -\sum b_n / (\bar{\xi} - 1/\bar{\xi}) \bar{\xi}^{n-1} \quad (49)$$

とし、スリット先端にて $\sigma_\alpha = \tau_{\alpha\beta} = 0$, 無限遠にて Y 方向の一樣応力 p なる解について (44), (45) 式をもちいて a_n, b_n を定めると

$$2GW = \sum a_n \left\{ \frac{K}{\xi^n} + \frac{n(\xi + 1/\xi)}{(\xi - 1/\xi) \xi^n} \right\} + \sum \frac{b_n}{(\bar{\xi} - 1/\bar{\xi}) \bar{\xi}^{n-1}} \quad (50)$$

$$\text{にて} \quad a_{-1} = p/8, \quad a_1 = -3p/8, \quad b_{-1} = -p/4, \quad b_1 = p, \quad b_3 = p/4 \quad (51)$$

更に一般に無限遠で $\sigma_\alpha = P_1 + P_2 \cos 2\beta$ なるときの解は

$$a_{-1} = P_1/4, \quad a_1 = -(P_1 - 2P_2)/4, \quad b_{-1} = P_2/2, \quad b_1 = P_1 - P_2, \quad b_3 = -P_2/2 \quad (52)$$

X 軸上での Y 方向の応力 $\sigma_\beta(X)$ は (50) 式の場合には (41) 式をもちいて

第 4 図 応力波到達円に於ける変位

$$\sigma_B(X) = p \cdot (1 + 1/\lambda x^2) / (1 - 1/\lambda x^2) \quad (53)$$

ただし, λx は $\xi = \lambda e^{i\beta}$ とおいたときの X 軸上における λ の値で $\beta = 0$ として (32) 式より

$$X = (\lambda x + 1/\lambda x)/2 \quad \text{或いは} \quad \lambda x = X(1 + \sqrt{1 - 1/X^2}) \quad (54)$$

(52) 式の場合には

$$\sigma_B(X) = (P_1 - P_2) \cdot (1 + 1/\lambda x^2) / (1 - 1/\lambda x^2) \quad (55)$$

4. 第 0 近 似 解

第 0 近似としては静的解で応力波到達円の条件 (47) 式を満たすものをとる。このため (52) 式の解の変位が点 (1), (2) で (46) 式の変位と連続になるように P_1, P_2 を定める。(50) 式から第 4 図の応力波到達円における点 (1) の変位 $U(1)$ と点 (2) の変位 $V(2)$ をもとめると

点 (1), $\xi = \lambda_1$ にて

$$2GU(1)H/\lambda_1 = P_1(1 - 1/\lambda_1^2) + P_2H(1 + K/\lambda_1^2) \quad (56)$$

点 (2), $\xi = i\lambda_2$ にて

$$2GV(2)H(1 + 1/\lambda_2)/\lambda_2 = P_1\{1 + (2 + 4H)/\lambda_2^2\} - P_2\{H + (2 + 4H/\lambda_2^2)\} \quad (57)$$

この変位が応力波到達円外部の一樣応力場の変位に等しいとすると, (46) 式より

$$2GU(1)H/\lambda_1 = p(1 - H)(1 + 1/\lambda_1^2)/2 \quad (58)$$

$$2GV(2)H(1 + 1/\lambda_2)/\lambda_2 = p(1 + H)(1 - 1/\lambda_2^4)/2 \quad (59)$$

また λ_1, λ_2 は $(V/c)^4$ 以上を無視すると (32) 式から

$$\lambda_1 \doteq \lambda_2 \doteq \lambda_0 = 2c/V \quad (60)$$

(55), (56) 式より

$$(P_1 - P_2)/p = \{(H + 1)(1 + 2/\lambda_0^2)2GV(2)/p\lambda_0 + (H - 1)2GU(1)/p\lambda_0\} / \{1 + (2 + 3H + 2H^2)/H\lambda_0^2\} \quad (61)$$

(57), (58) 式をもちいると

$$(P_1 - P_2)/p = (1 + 1/\lambda_0^2) / \{1 + (2 + 3H + 2H^2)/H\lambda_0^2\} \quad (62)$$

故に X 軸上の応力 $\sigma_B(X)$ は (55) 式より

$$\left[\frac{\sigma_B(X)}{p} \right]_{0 \rightarrow \infty} = \frac{1 + 1/\lambda_0^2}{1 + (2 + 3H + 2H^2)/H\lambda_0^2} \cdot \frac{1 + 1/\lambda x^2}{1 - 1/\lambda x^2} \quad (63)$$

5. 第 1 近 似 解

まず特解として (24) 式の右辺の B. H. F. を入れない項についてもとめ, ついで B. H. F. を加えて境界条件を満たす。

特解をもとめるために第 0 近似解をもちいると $(V/c)^4$ 以上を省略しているから, (49), (51) 式より

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(Z) &= p(\xi - 3/\xi)/8 \\ \varphi_0'(Z) &= p(\xi + 3/\xi)/4(\xi - 1/\xi), \quad \varphi_0''(Z) = -4p/(\xi - 1/\xi)^3, \quad \int \varphi_0(Z) dZ = p(\xi^2 - 8 \log \xi - 3/\xi^2)/32 \\ \psi_0'(Z) &= p(\xi^2 - 4 - 1/\xi^2)/4(\xi - 1/\xi), \\ \psi_0(Z) &= p(\xi^2 - 8 \log \xi + 1/\xi^2)/16, \quad \int \psi_0(Z) dZ = p\{\xi^3 + 21\xi - 27/\xi + 1/\xi^3 - 24(\xi + 1/\xi) \log \xi\}/96 \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

(64) 式をもちいると (24) 式から第 1 近似 W_1 は

$$\begin{aligned} \frac{(1 - K^2)EW_1}{p} &= -\frac{K}{4} \frac{(\xi + 1/\xi)^2(\xi + 1/\xi)^2}{(\xi - 1/\xi)^3} - \frac{1 + K^2}{2} \frac{\xi + 1/\xi}{(\xi - 1/\xi)\xi} + \frac{1 + K^2}{4} (\xi + 1/\xi) \log \xi \\ &\quad - \frac{5(1 + K^2)}{16} (\xi + 1/\xi) - \frac{9}{8} \xi + \frac{11}{8\xi} + \frac{1}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right) \log \xi + \frac{1}{\xi - 1/\xi} \end{aligned} \quad (65)$$

となる。 W_1 は任意の B. H. F. を加えてもよいから次の B. H. F. を加える。

(1) ξ のみの関数は B. H. F. であるから第 4 項の $\xi + 1/\xi$ を消す。

(2) Z は B. H. F. であるから第 5 項の $-9\xi/8$ の項を消すために $9Z/4 = 9(\xi + 1/\xi)/8$ を加える。

(3) $\log \xi$ の項は一般に dislocation を含むから第 3 項に $(1 + K^2)(\xi + 1/\xi) \log \xi/4$ を加える。一般に $\log \xi + \log \bar{\xi} = \log(\lambda e^{i\beta}) + \log(\lambda e^{-i\beta}) = 2 \log \lambda$ となり dislocation が消える。

(4) 第 7 項に前と同じ理由から B. H. F. として $-(1 - K)[KF(Z) - F'(Z)]/2$, ただし $F(Z) = (\xi + 1/\xi) \log \xi$

を加える。

以上の処理をすと (65) 式の W_1 は

$$\begin{aligned} \frac{2GW_1}{p} = & \frac{5(K+1)}{8\xi} + \frac{K+1}{4} \frac{1}{\xi-1/\xi} + \frac{H(K^2+1)}{16} \frac{\bar{\xi}+1/\bar{\xi}}{(\xi-1/\xi)\bar{\xi}} + \frac{\xi+1/\xi}{4(\xi-1/\xi)\bar{\xi}} + \frac{1}{8} \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right) (\log \xi + \log \bar{\xi}) \\ & - \frac{H(K^2+1)}{32} (\bar{\xi}+1/\bar{\xi}) (\log \xi + \log \bar{\xi}) + \frac{HK}{32} \frac{(\xi+1/\xi)^2 (\bar{\xi}+1/\bar{\xi})^2}{(\xi-1/\xi)^3} + \text{B. H. F.} \end{aligned} \quad (66)$$

(66) 式の右辺の第1項から第7項までの項 (B. H. F. 以外の項) は特解に相当する。これを $W_{\text{part.}}$ と名付け、この項による X 軸上での Y 方向の応力分布 $\sigma_\beta(X)$ をもとめると、(40) 式をもちい、 $\xi = \lambda_x$ とすると

$$\begin{aligned} \left[\frac{\sigma_\beta(X)}{p} \right]_{\text{part.}} = & \left(\frac{V}{c} \right)^2 \left\{ -\frac{H^2-H-K+3}{8} \frac{1+1/\lambda_x^2}{1-1/\lambda_x^2} + \frac{(H-1)(H+2)}{8} \left(\frac{1+1/\lambda_x^2}{1-1/\lambda_x^2} \right)^3 \right. \\ & + \frac{3(H+2)}{16} \left(\frac{1+1/\lambda_x^2}{1-1/\lambda_x^2} \right)^5 - \frac{9H+K+1}{2} \frac{1}{(1-1/\lambda_x^2)\lambda_x^2} - \frac{H^2+4H+2}{2} \frac{1+1/\lambda_x^2}{(1-1/\lambda_x^2)^3\lambda_x^2} \\ & \left. + \frac{3H+K+1}{4} \log \lambda_x \right\} \end{aligned} \quad (67)$$

つぎに (66) 式の右辺の各項について、まずスリットにおける境界条件を満たすような B. H. F. を加え、つぎに応力波到達円における境界条件を満たすような B. H. F. を加える。

まずスリットの近くで右辺の第1項の $1/\xi$ にたいして B. H. F. として (50) 式と同形のものを加えて

$$2GW = \frac{1}{\xi} + \sum A_n \left\{ \frac{K}{\xi^n} + \frac{n(\xi+1/\xi)}{(\xi-1/\xi)\xi^n} \right\} + \sum \frac{B_n}{(\xi-1/\xi)\xi^{n-1}} \quad (68)$$

として A_n, B_n を定める。

まず $|\xi|=1$ 或いは $\xi=e^{i\beta}$ にて $\sigma_\alpha=0$ から (44) 式をもちいて

$$\begin{aligned} -\frac{H}{\xi} + H \sum n A_n \left\{ -\frac{K}{\xi^n} + \frac{\xi-1/\xi}{(\xi-1/\xi)\xi^n} \right\} - \sum \frac{n A_n (\xi+1/\xi) \{n+1-(n-1)/\xi^2\}}{(\xi-1/\xi)^2 \xi^{n-1}} \\ - \sum B_n \frac{n-(n-2)/\xi^2}{(\xi-1/\xi)^2 \xi^{n-1}} - \text{conj. compl.} = 0 \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \text{これから} \quad 2H(\sin 3\beta - 3\sin \beta) + 2 \sum n A_n \{ (n+1)\sin(n+2)\beta - 6\sin n\beta - (n-1)\sin(n-2)\beta \} \\ - 2 \sum B_n \{ n\sin(n-2)\beta - (n-2)\sin n\beta \} = 0 \end{aligned} \quad (70)$$

$$\text{これから} \quad 2H + 4A_1 = 0 \quad (71)$$

同様に $|\xi|=1$ にて $\tau_{\alpha\beta}=0$ から (45) 式をもちいて

$$\begin{aligned} -2 \sum n A_n \{ 2\cos n\beta - (n-1)\cos(n+2)\beta + (n-1)\cos(n-2)\beta \} \\ - 2 \sum B_n \{ n\cos(n-2)\beta - (n-2)\cos n\beta \} = 0 \end{aligned} \quad (72)$$

$$\text{これから} \quad -4A_1 - 2B_1 = 0 \quad (73)$$

$$\text{故に (71), (73) 式より} \quad A_1 = -H/2, \quad B_1 = H \quad (74)$$

同様に、(66) 式の右辺の第2項の $1/(\xi-1/\xi)$ にたいする B. H. F. の係数として $A_n = B_n = 0$

第3項 $(\bar{\xi}+1/\bar{\xi})/(\xi-1/\xi)\bar{\xi}$ にたいして $A_1 = -1, \quad B_1 = 1, \quad B_3 = 1$

第4項 $(\xi+1/\xi)/(\xi-1/\xi)\bar{\xi}$ にたいして $A_1 = H/2, \quad B_1 = -(2+H)$

第5項 $(\xi+1/\xi)(\log \xi + \log \bar{\xi})$ にたいして $B_1 = 2, \quad B_3 = -2$

第6項 $(\bar{\xi}+1/\bar{\xi})(\log \xi + \log \bar{\xi})$ にたいして $B_1 = 2, \quad B_3 = -2$

第7項にたいしてはつぎのような分母の異常性の大きな函数を考える。即ち

$$2GW = \frac{(\xi+1/\xi)^2 (\bar{\xi}+1/\bar{\xi})^2}{(\xi-1/\xi)^3} + K\phi(Z) - Z\phi'(Z) - \bar{\Psi}'(\bar{Z}) \quad (75)$$

$$\phi(Z) = \sum C_n / (\xi-1/\xi)\xi^n, \quad \Psi'(Z) = -\sum D_n / (\xi-1/\xi)^3 \xi^n \quad (76)$$

これにたいして $|\xi|=1$ にて $\sigma_\alpha=0, \tau_{\alpha\beta}=0$ から

$$C_0 = -9, \quad C_2 = 1, \quad D_0 = 18, \quad D_2 = -4, \quad D_4 = 2 \quad (77)$$

以上をまとめるとスリットの境界条件を満たすために加えるべき B. H. F. を W_{elit} とすれば

$$2GW_{\text{elit}} = \sum A_n \left\{ \frac{K}{\xi^n} + \frac{n(\xi+1/\xi)}{(\xi-1/\xi)\xi^n} \right\} + \sum \frac{B_n}{(\xi-1/\xi)\xi^{n-1}} + \sum C_n \left[\frac{K}{(\xi-1/\xi)\xi^n} \right.$$

$$+ \frac{(\xi+1/\xi)\{(n+1)\xi-(n-1)/\xi\}}{(\xi-1/\xi)^3\xi^n} \Big] + \sum \frac{D_n}{(\xi-1/\xi)^3\xi^n} \quad (78)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -(6H+6+K)/8, \quad B_1=H+1, \quad B=(H+K)/4, \quad C_0=-9(H+2)/32 \\ C_2 &= (H+2)/32, \quad D_0=9(H+2)/16, \quad D_2=-(H+2)/8, \quad D_4=(H+2)/16 \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

W_{slit} による X 軸上での応力 σ_β を $\sigma_\beta(X)$ とすればこの分布は (40) 式をもちい $\xi=\lambda_X$ とすると

$$\begin{aligned} \left[\frac{\sigma_\beta(X)}{p} \right]_{\text{slit}} &= \left(\frac{V}{c} \right)^2 \left[\frac{2}{(1-1/\lambda_X^2)^3} \left\{ \frac{1}{\lambda_X^2} (B_1-2C_0) + \frac{1}{\lambda_X^4} (6A_1+3B_1+B_3-2C_0-6C_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\lambda_X^6} (2A_1+B_3-2C_2) \right\} + \frac{2}{(1-1/\lambda_X^2)^5} \left\{ \frac{2C_0}{\lambda_X^2} + \frac{1}{\lambda_X^4} (10C_0+12C_2+3D_0) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\lambda_X^6} (10C_0+12C_2+3D_0+5D_2) + \frac{1}{\lambda_X^8} (2C_0+D_0+7D_4) - \frac{D_4}{\lambda_X^{10}} \right\} \right] \quad (80) \end{aligned}$$

つぎに応力波到達円で $W_{\text{part.}} + W_{\text{slit}}$ による変位を打消すような B. H. F. を $W_{\text{bound.}}$ としてもとめる。しかるに W_{slit} は $(V/c)^4$ 以上を無視することにより応力波到達円近傍での変位は無視しうる。

$W_{\text{part.}}$ による応力波到達円での変位 $U_p(1)$, $V_p(2)$ は (66) 式から

$$\text{点 (1)} \quad \xi=\lambda_1 \quad \text{にて} \quad \frac{2GU_p(1)}{p\lambda_0} = -\frac{1}{8}(H+K-1) \left(1 + \frac{1}{\lambda_0^2} \right) \log \lambda_0 + \frac{H+2}{32} \frac{(1+1/\lambda_0^2)^4}{(1-1/\lambda_0^2)^3} \quad (81)$$

$$\text{点 (2)} \quad \xi=i\lambda_2 \quad \text{にて} \quad \frac{2GV_p(2)}{p\lambda_0} = \frac{1}{8}(H+K+3) \left(1 - \frac{1}{\lambda_0^2} \right) \log \lambda_0 - \frac{H+2}{32} \frac{(1-1/\lambda_0^2)^4}{(1+1/\lambda_0^2)^3} \quad (82)$$

この変位を異符号にした変位の B. H. F. は静的解 (52) 式を利用し, (61) 式から

$$\begin{aligned} \left[\frac{P_1-P_2}{p} \right]_{\text{bound.}} &= \left\{ -(H+1)(1+2/\lambda_0^2) \frac{2GV_p(2)}{p\lambda_0} \right. \\ &\quad \left. - (H-1) \frac{2GU_p(1)}{p\lambda_0} \right\} / \left(1 + \frac{2+3H+2H^2}{H\lambda_0^2} \right) \quad (83) \end{aligned}$$

故に $W_{\text{bound.}}$ による X 軸上の応力 $\sigma_\beta(X)$ は (55) 式より

$$\left[\frac{\sigma_\beta(X)}{p} \right]_{\text{bound.}} = \left(\frac{V}{c} \right)^2 \frac{1+1/\lambda_X^2}{1-1/\lambda_X^2} \left[\frac{P_1-P_2}{p} \right]_{\text{bound.}} \quad (84)$$

以上を総合して, 第1近似としての X 軸上での応力は

$$\frac{\sigma_\beta(X)}{p} = \left[\frac{\sigma_\beta(X)}{p} \right]_{\text{o-app.}} + \left[\frac{\sigma_\beta(X)}{p} \right]_{\text{part.}} + \left[\frac{\sigma_\beta(X)}{p} \right]_{\text{slit}} + \left[\frac{\sigma_\beta(X)}{p} \right]_{\text{bound.}} \quad (85)$$

第5図 破壊伝播速度と X 軸上での応力分布の関係

(63), (67), (80), (84) 式より X 軸上の応力比 $\sigma_\beta(X)/p$ を速度比 V/c をパラメータとしてもとめ第5図に示す。図より, 一般に破壊伝播速度が増加すると応力は減少することがわかる。速度比 $V/c=0.4$ の場合には応力波到達限界円の半径 (c/V) は 2.5 であるので, $V/c=0.4$ の曲線は $X=2.5$ の位置まで達している。

5. 結 論

無限遠において Y 軸方向に一樣引張応力が作用している弾性体内を, スリットが X 軸方向に定速で拡大する場合の応力場の近似解を拡大座標をもちいてもとめた。 X 軸上での Y 方向の応力分布を速度をパラメータとしてもとめると第5図に示すようになり, 速度の増加とともにスリット先端近傍の応力は減少することがわかった。

参 考 文 献

- (1) 秋田好雄, 池田一夫: 脆性破壊伝播に関する研究 (第2報), 造船協会論文集, 第104号, 昭和34年1月, p. 237.