船体上下振動に於ける附加慣性係数に就いて

正 員 熊 井 豊 二*

On the Virtual Inertia Coefficients of the Vertical Vibration of Ships

By Toyogi Kumai, Member

Abstract

An investigation is made of the virtual inertia coefficients of the vertical vibration of ships by means of the strip method with taking the effects of virtual rotatory inertia of the water and the three-dimensional motion into account. In the present investigation, the consideration is made in conformity to the results of the vibration measurements on a wooden model of tanker. For estimating the three-dimensional correction factors of the virtual inertia coefficients of the vertical vibration of ships, the experimental studies on the vibration of the cylindrical solid models having several kinds of the sectional forms are carried out and its results are taken into account. The analyses on the three-dimensional motion of the circular and elliptic cylinders on water, and the experimental studies on the measurements of the virtual inertia coefficients of the vibrations of the solid beams and a tanker model are presented in Appendices I and II respectively in the present paper.

緒 言

船体上下固有振動数の算定に於いて著しい影響を及ぼす要素の一つは水の附加質量の推定である。現在行われている船体振動附加質量の計算法は、先ず上下動揺に対する附加質量を strip 法によつて求め、与えられた L/B に対する廻転楕円体の振動における振動附加質量の計算から得られた 3 次元修正係数を用いて修正する方法である。^{1), 2), 3), 4)}

一方、附加質量は実船実験から直接測定する事は不可能であるが、船型模型の振動実験によつて実船の附船加慣性係数に近い値を求める事が出来る⁵⁾。

最近、筆者は大型油槽船の模型に就いて振動実験を行い附加慣性係数を求めた。その結果によれば、上下動揺の附加慣性係数は計算とよく一致するにもかかわらず振動に対するその値は従来の計算法による結果よりも遙かに低い値を示した。又高次の振動に於ては振動節数の増加と共に附加慣性係数が増加する傾向が得られた。これらの現象は従来の考え方では説明する事が困難である。

本論に於ては上記の様な実験の現象の原因に対する一考察として、従来廻転楕円体の振動と同じ様に取扱われていた船体振動の附加質量に対する 3 次元修正係数の代りに船体の主要断面を有する一樣断面梁の振動に対する 3 次元運動修正係数を採用する事を提案し之に対する実験検証を示した。又振動附加慣性係数の計算に於いては、振動エネルギー計算に振動型を考慮に入れ且つ船体振動の廻転慣性及び之に附加される水の附加廻転慣性を考慮に入れて船体上下振動に対する水の附加慣性係数を計算する方法を示し、大型油槽船について計算し模型実験によつて得られた結果を定性的に説明した。

1. 船体上下振動の附加慣性係数

(a), 船体振動の附加慣性係数は船体の空中及び水上に於ける夫々の固有振動数を測定することが出来れば、次の関係からこれを求める事が出来る。

$$f_a = C_a \sqrt{\frac{gEI}{\Delta L^3}}, \quad (i)$$

$$f_w = C_w \sqrt{\frac{gEI}{\Delta(1+\tau)L^3}}, \quad (ii)$$

原稿受付 昭和 34 年 1 月 10 日

* 九州大学応用力学研究所

茲に, f_a, f_w は夫々空中及び水上に於ける船体の固有振動数である。 C_a, C_w は夫々の固有値, EI は剛性, τ は附加慣性係数である。(i)(ii) から τ を求めると,

$$\tau = \left(\frac{f_a}{f_w} \right)^2 \cdot \left(\frac{C_w}{C_a} \right)^2 - 1 \quad (1)$$

一般に船体に於いては C_w と C_a は等しくない。それは空中と水上とに於いては船体の長さ方向の荷重分布が異なるためである。水の附加質量は水線下船型のみに関係し船体の荷重分布には無関係である。船体の水上の振動状態に於いては空中の荷重分布に附加水が重畳された荷重分布になるために固有値が異なる。従つて上式の C_w と C_a とは等しくない。梁の荷重分布の変化に対する固有値の変化に就いては既に計算した⁶⁾。従つて, C_w/C_a の値はその計算に従つて推定する事が出来る。船体では一般に $C_w > C_a$ である。

断面が一樣な等質の梁に於ては $C_w = C_a$ であつてこの場合には τ は次式によつて求められる。

$$\tau = \left(\frac{f_a}{f_w} \right)^2 - 1 \quad (2)$$

実船を空中で振動させる事は大型船では不可能である。従つて実船に近似な剛性分布及び荷重分布を有する模型船によつて f_a, f_w を測定し, C_a, C_w を与うれば(1)式によつて τ を求める事が出来る。

(b), さて, 次に計算によつて τ を求めるには船体の附加水質量による振動エネルギーと船体の振動エネルギーを計算しその比を採ればよい。この計算に必要な項目は, 長さにおける振動速度の分布, 言い換えれば船体振動の基準振動型であつて空中振動及び水上振動に対する振動型が必要である。また船体の附加水による運動エネルギーは一般に船体の各断面の2次元的な計算によつて求めこれを長さ方向に積分するのであるから3次元形状及び3次元運動に対する修正係数を必要とする。次に一般に弾性梁の振動エネルギーの計算には廻転慣性によるエネルギーも加算すべきであつて特に船体高次振動に於てはこの影響が著しいことは周知の通りである。この様な船体の廻転慣性に対する水の附加慣性モーメントの考察は非常に大切な項目である。それは船体の縦動揺における水の附加慣性モーメントと同様に考えれば容易に諒解されるであろう。以上の考察に基づいて τ の計算式を示せば次の如く表わされる。

$$\tau = \Theta_1 \Theta_2 \frac{\sum_0^L \left\{ m_e y_w^2 + I_e \left(\frac{dy_w}{dz} \right)^2 \right\} \delta z}{\sum_0^L \left\{ m y_a^2 + I \left(\frac{dy_a}{dz} \right)^2 \right\} \delta z} \quad (3)$$

ここに, y_a, y_w ; 夫々空中及び水上における船体の基準振動型,

L, z ; 船の長さ及びその座標,

Θ_1, Θ_2 ; 夫々3次元形状及び3次元運動に対する修正係数,

m_e, I_e ; 夫々船体の単位長さ δz の水の附加質量及び附加廻転慣性,

m, I ; 夫々船体単位長さ δz の船体の質量及び廻転慣性。

実船について(3)式中の諸項目が量的に判れば船体振動の附加慣性係数 τ が得られる。以下順を追つて必要な諸項目について述べる。

2. 3次元修正係数 Θ_1, Θ_2

(a), 3次元形状に対する修正係数 Θ_1 ;

Lamb⁷⁾によつて求められた廻転楕円体の剛体としての水中における上下動揺の附加慣性係数と円筒の附加慣性係数との比を3次元形状修正係数と仮称し Θ_1 で表わす。Prohaska は Lamb の計算結果を近似船型模型の上下動揺実験によつて検証している⁴⁾。従つて, 3次元形状に対する修正係数としてならば廻転楕円体の計算結果は船型にも応用する事が出来る。然し之を船体に応用する場合には船体に parallel body のある事に注意しなければならない。今 parallel body の長さを l とし, 船の長さを L , θ_1 を Lamb の計算値とすれば Θ_1 は次の如く示される,

$$\Theta_1 = \theta_1 \left(1 - \frac{l}{L} \right) + \frac{l}{L}, \quad (iii)$$

いま Lamb の計算値を実験式で示せば,

$$\theta_1 = 1 - 1.1 \left(\frac{B}{L} \right)^{3/2}, \quad (iv)$$

数に、 B は幅を表わす。(iv) を (iii) に代入すれば、

$$\Theta_1 = 1 - 1.1 \left(1 - \frac{l}{L}\right) \left(\frac{B}{L}\right)^{3/2} \quad (4)$$

l/L 、及び B/L を与えれば3次元形状修正係数 Θ_1 を求める事が出来る。 l/L を parameter として Θ_1 を示せば第1図の如くなる。 Θ_1 は船体の上下動揺に限らず振動の場合に於ても考慮しなければならない事は容易に推察されるであろう。

(b)、3次元運動修正係数 Θ_2 ；

円筒の様な2次元形状の弾性梁が水中で振動する場合には形状は2次元である。従つて $\Theta_1 = 1$ である。然し運動は3次元である。この場合筒の振動に対する附加慣性係数は3次元的に取扱つた結果と2次元的に取扱つた結果とは異つた値となり両者の比は1より小さい値となる。2節振動における両者の比を3次元運動修正係数と仮称しこれを Θ_2 で表わす。この問題に関しては J. L. Taylor が無限長円筒の正弦波振動型に就て計算している²⁾。筆者は円筒及び楕円筒について両端自由の振動型の場合の Θ_2 を計算した。その計算は附録 I に示してある。また円筒、楕円筒及び長方形断面筒について振動実験を試みた。附録 II にその方法及び結果が示してある。 Θ_2 の計算及び実験測定から得られた主な結果、 Θ_2 は L/B の値に関係し、断面の形状のに対しては余り大きな影響がない事が判つた。しかし Θ_2 の値は量的には計算と実験とは一致しなかつた。その原因は計算に於ける筒の両端の流体に対する境界条件が充分満足されていない点にあると思われる。そこで本論では Θ_2 の値は実験結果を採用して之を船体に応用することにした。

船体と筒との相違点は船首尾における変断面部分である。この部分に対しては船の長さ L を有効長さ L_e で置き替へることを試み模型によつて検証実験を示した(第2図参照)。有効長さ L_e は次の如く仮定する。

$$L_e = C_w L, \quad (v)$$

ここに、 C_w ; Water plane coefficient,

Θ_2 は L_e/B によつて著しく変化する。その結果を第2図に示す。実験結果を実験式で示せば次の如くなる。

$$\Theta_2 = 1 - 2.7 \frac{B}{L_e} \quad (5)$$

(5) 式或いは第2図を用いて与えられた L_e/B に対する Θ_2 を求める事が出来る。

3. 水の附加廻転慣性モーメント

船体が或る振動型で振動している場合には船体断面の廻転慣性によるエネルギーを考慮しなければならない。船体の長さの要素の廻転運動を船体の曲げの中性面内の横軸周りの縦動揺と考えてよい。この様な船体要素の運動に対してはこれに附随する水の附加慣性モーメントが考慮されなければならない事は容易に諒解されるであらう。

第3図 附加廻転慣性モーメント説明図

う。そして附加廻転慣性モーメントによる振動エネルギーは振動が高次になるに従って著しく増加することも容易に理解される。この様な水の附加廻転慣性モーメントは次の様にして求められる。第3図に示す様に、船体長さ要素 δ における単位接水面積の附加水質量 dm による廻転軸周りの附加水回轉慣性モーメントは次式によつて示される。

$$I_e = \int_S r_1^2 dm, \quad (\text{vi})$$

茲に、

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= z^2 + (y_0 + y)^2, \\ S &: \text{Wetted surface.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{vii})$$

dm は船体の上下動揺に対する水の附加質量であつて断面形によつて2次元の計算から得られる。

今 ϕ を曲線座標 α, β にて表わされる船体断面の上下運動に対する速度ポテンシャルとし、 y 方向の速度で割つたものとする。又 $\alpha=0$ に於て船体断面を表わすものとすれば dm は次の如く示される。

$$dm = \rho \left(-\phi \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\beta \cdot dz, \quad (\text{viii})$$

(vii), (viii) を用いて (vi) を表わせば、

$$I_e = 2\rho \int_0^{\delta/2} \int_0^\pi \{z^2 + y_0^2 + 2y_0y + y^2\} \left(-\phi \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\beta \cdot dz. \quad (6)$$

となる。いま水線下の船体断面形状を Lewis form¹⁾ によつて表わせば、

$$\left. \begin{aligned} x &= b_0 \{ (1+a_1) \cos \beta + a_3 \cos 3\beta \} \\ y &= b_0 \{ (1-a_1) \sin \beta - a_3 \sin 3\beta \} \end{aligned} \right\} \quad (\text{ix})$$

ϕ は次式の如くなる。

$$\phi = -b_0 \{ (1+a_1) e^{-\alpha} \sin \beta + a_3 e^{-3\alpha} \sin 3\beta \} \quad (7)$$

(7) 式中の b_0, a_1 及び a_3 は、実船の body plan から得られる断面係数 σ 、半幅と吃水の比 b/d を与うれば簡単な計算によつて求められ実船の body plan に近似な Lewis form が得られる²⁾。

本論の τ の計算には (3) 式の m_e も必要である。これは Lewis form について容易に求められる¹⁾。 (7) 式に基づいて m_e 及び I_e を計算すれば次の如くなる。

$$m_e = \frac{\rho \pi b_0^2 \delta}{2} \{ (1+a_1)^2 + 3a_3^2 \}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} I_e = \frac{\rho \pi b_0^4 \delta}{24} & \left[\left[12 \frac{y_0^2}{b_0^2} \{ (1+a_1)^2 + 3a_3^2 \} + \frac{192}{\pi} \frac{y_0}{b_0} \left[(1+a_1)^2 \left\{ \frac{1}{3} (1-a_1) + \frac{1}{15} a_3 \right\} \right. \right. \right. \\ & - \frac{36}{35} a_3^2 (1+a_1) - a_3 (1-a_1) \left\{ \frac{4}{15} (1+a_1) + \frac{27}{35} a_3 \right\} - \frac{1}{3} a_3^3 \left. \right] + 3 \{ (1-a_1)^2 \{ 3(1+a_1)^2 - 4a_3(1+a_3) \\ & + 6a_3^2 \} + 2(1-a_1^2) a_3 (1+a_1 - 8a_3) + a_3^2 \{ 2(1-a_1)^2 + 9a_3^2 \} \} \left. \right] \end{aligned} \quad (9)$$

(3) 式の m 及び I は実船の荷重分布が判れば設計図面によつて計算することが出来る。

(9) 式は $y_0=0$ の場合、また円及び楕円断面に於ては簡単な形になる。いま数値例として円断面の等質梁が半径 a を吃水として水上に於て $y = \cos kz$ の振動型で振動する場合の τ を求めると、

$$\tau = \Theta_2 \frac{1 + \frac{3}{4} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \cdot (kl)^2}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \cdot (kl)^2} \quad (\text{x})$$

となる。水の附加廻転慣性半径は円断面の廻転慣性半径の $\sqrt{3}$ 倍となり梁及び水の回轉慣性エネルギーは何れも固有値 (kl) の2乗、 a/l の2乗に比例して増加する。上式に見る如くこの断面梁では高次振動になるに従つて τ

は増加する傾向を示す。断面形状によつては附加回転慣性モーメントの方が梁のそれよりも小さくなる場合もある。この場合には高次振動に於て附加慣性係数は減少する傾向を示す。

4. 規準振動型及びその勾配

(3) 式の計算には空中と水中における規準振動型 y_a , y_w 及びその勾配を与える必要がある。船体の固有振動型を簡単な函数で表現することは困難である。 y は実船測定によつて求めることが出来る。 y_a 及び y_w を近似的に与えるには現在の所剪断振動型を用うればよい。この振動型に関しては既に発表してある⁹⁾¹⁰⁾ ので本論では省略する。船体の2節振動型を正確に求める事は実船計測と共に今後研究を必要とする。

5. 模型油槽船の上下振動附加慣性係数の計算例及び実験との比較

以上 1. 乃至 4. に述べた方法によつて模型油槽船の軽吃水に於ける上下振動附加慣性係数 τ を 2~4 節振動型計算した結果を図示すれば第 4 図の如くなる。図に見る様に本論によつて求めた τ は従来の計算に比較して著しく低い値を示しているが、模型船による実験結果とはよく一致している。また高次振動に於いて τ の値が節数の増加に従つて上昇する傾向も計算と実験と大凡一致している。実験については附録 II に示してある。この計算に於ては模型実験の結果により $y_w = y_a$ と仮定した。

結 論

船体振動の附加慣性係数を求めるために、振動型を考慮に入れ且つ廻転慣性及び之に附随する水の附加廻転慣性を加算して附加水振動エネルギーと船体振動のエネルギーを計算し両者の比を求めて2次元附加慣性係数を算定し、これを3次元形状に対する修正係数と3次元運動に対する修正係数との2つの係数を用いて修正する計算法を提案した。油槽船模型について計算例を示し模型実験結果と比較した結果両者は大凡一致した。3次元運動に対する修正係数 Θ_2 は模型実験から得られた結果を採用した。実験に於て船体上下高次振動の附加慣性係数が節数と共に増加する傾向については水の附加廻転慣性の考慮により明瞭に説明することが出来るであろう。

計算及び実験は油槽船についての一例を示したが他の船型については今後引き続き調べる予定である。

本研究に対して御懇切な御討議を賜つた渡辺恵弘先生に深甚の謝意を表する次第である。本実験は数年前から計画され予備実験が行われそれに要した研究費の大部分は九州大学応力学研究所に与えられた文部省特殊研究費によるものである事を附記する。附録 I の計算に対し種々御教示を賜つた山田彦児教授に対し感謝する。また同計算に関し種々御注意及び討論を賜つた岡部淳一、田村福造両助教授に御礼申上げる。なお実験及び数値計算には井土 敏助手及び青木節子、多田幹生、竹内文憲三研究補助員の手を煩わした事を附記する。

文 献

- 1). F.M.Lewis ; "The Inertia of the Water Surrounding a Vibrating Ship." Trans. S. N. A. M. E., 1929..
- 2). J.Lockwood Taylor ; "Hydrodynamical Inertia Coefficients." Phil. Mag., 1929.
- 3). C.W.Prohaska ; "Lodrette Skipssvinninger med To Knuder" Dissertation, Kopenhagen, 1941.
- 4). C.W.Prohaska ; "Vibration Verticales du Nevire," A. T. M. A. 1947.
- 5). T.Terada ; "On the Vibration of a Bar Floating on a Liquid Surface." Proc. Tokyo Math. Phis. Soc. 1906.
- 6). 著者 ; 造船協会論文集, 101 号, 1956.
- 7). H.Lamb ; "Hydrodynamics." p.152. Sixth edition, 1932.

第 4 図 大型油槽船模型の上下振動における τ の計算値及び実験値

- 8). 著者; 造船協会論文集, 104 号, 1959.
 9). " " 99 号, 1955.
 10). " " 103 号, 1958.
 11). M. Ray; "Vibration of an Infinite Elliptic Cylinder in a Viscous Liquid". Z. A. M. M., 1936.
 12). N. W. McLachlan; "Theory and Application of Mathieu Functions." Oxford Press, 1951.

附 録 I. 円筒及び楕円筒の振動における Θ_2 の計算

1. 固有振動における筒の速度分布;

長さ $2l$ の筒の長さの方向 z における速度分布 $\dot{y}_1$ は筒の中央を原点にとれば次の如く示される。

$$\dot{y}_1 = A \left\{ \begin{array}{l} \cos kz + \mu \cosh kz \\ \sin kz + \mu \sinh kz \end{array} \right\} \quad (a)$$

茲に, y_1 は振動型, dot は時間に関する微分, A は速度の単位を有する常数, 偶函数, 奇函数は夫々対称, 逆対称の振動型を示す。両端自由の梁の振動における境界条件により μ 及び固有値決定式は夫々次の如く示される。

$$\left. \begin{array}{l} \mu = \frac{\cos kl}{\cosh kl} = -\frac{\sin kl}{\sinh kl} \\ \tan kl = -\tanh kl \end{array} \right\} \text{対称型}, \quad \left. \begin{array}{l} \mu = \frac{\sin kl}{\sinh kl} = \frac{\cos kl}{\cosh kl} \\ \tan kl = \tanh kl \end{array} \right\} \text{逆対称型}$$

以下対称型のみについて記す。(a) 式中の $\cosh kz$ を cosine の級数でおきかえる。即ち,

$$\dot{y}_1 = A (\cos kz + \mu \sum_{n=2}^{\infty} A_n \cos n kz) \quad (b)$$

茲に,

$$\mu A_n = \frac{2(n \sin nkl \cdot \cos kl - \cos nkl \cdot \sin kl)}{kl(n^2 + 1)}$$

2. 円筒の振動における Θ_2 の計算;

半径 a , 吃水 a の円筒の 2 次元計算による附加水の振動エネルギーは次の式で示される。

$$2 T_{II} = \frac{\rho \pi a^2}{2} \int_{-l}^l \dot{y}_1^2 dz \quad (c)$$

茲に, ρ は水の密度, $2l$ は筒の長さ, $\dot{y}_1$ は z 方向の速度分布であつて (a) 又は (b) 式で与えられる。

次に円筒の振動を 3 次元運動として取扱う。円筒座標 r, θ, z における速度ポテンシャルを ϕ とすれば, $\nabla^2 \phi = 0$ を満足し z の函数が $\cos n kz$, $r \rightarrow \infty$ にて $\phi = 0$, $\theta = 0, \pi$ にて $\phi = 0$ を満たす ϕ は次の如く表わされる。

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n K_1(nkr) \sin \theta \cdot \cos n kz, \quad (e)$$

茲に, K_1 は K -Bessel 函数である。

$r = a$ に於て水の速度が筒の振動速度に等しい。即ち

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=a} = \dot{y}_1 \sin \theta \quad (f)$$

(b) 式を用うれば C_n が次の如く定まる。

$$C_1 = \frac{A}{ka K_1'(ka)}, \quad C_n = \frac{\mu A \cdot A_n}{nka K_1'(nka)}, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (g)$$

茲に, dash は kr 又は nkr に対する微分を示す。この関係より (e) 式を用いて 3 次元運動としての水の振動エネルギーを次式によつて求める事が出来る。

$$2 T_{III} = -\rho \int_{-l}^l \int_0^\pi \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=a} \cdot a d\theta \cdot dz \quad (h)$$

この式で計算した T_{III} と (c) 式の T_{II} との比をとれば Θ_2 が得られる。即ち

$$\Theta_2 = \frac{T_{III}}{T_{II}} = \frac{\gamma_1 + \sum_n \gamma_n \mathcal{O}_n}{1 + \mathcal{W}_1} \quad (i)$$

ここに,

$$\gamma_1 = \frac{-K_1(ka)}{ka K_1'(ka)}, \quad \gamma_n = \frac{-K_1(nka)}{nka K_1'(nka)},$$

$$\Phi_n = \frac{8n^2}{(n^4-1)(n^2+1)} \cdot \frac{(n \sin nkl \cdot \cos kl - \cos nkl \cdot \sin kl)^2}{kl(kl + \sin kl \cdot \cos kl)},$$

$$\Psi_1 = \frac{\cos^2 kl}{\cosh^2 kl} \cdot \frac{(kl + \sinh kl \cdot \cosh kl)}{(kl + \sin kl \cdot \cos kl)}.$$

Θ_2 は $l/a (=L/B)$ に関係する。第1表に2節振動に於ける Θ_2 の計算結果を示す。表の Θ_2^* は無限長さの円筒に於て $\dot{y}_1 = A \cos kz$ で振動する場合で Taylor²⁾ によつて計算された結果を比較のために附記したものである。 Θ_2 は本文第2図に点線で図示してある。

3. 楕円筒の振動に於ける Θ_2 の計算;

T_{II} の計算値は円筒と同様に (c) 式で示される。

3次元の流体の連続の方程式は直角座標では次の如くである。

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (j)$$

z の函数を $\cos n\kappa z$ とおけば

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - n^2 \kappa^2 \phi = 0$$

これを楕円座標, $x = h \cosh \xi \cos \eta$, $y = h \sinh \xi \sin \eta$ で示せば,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - 2n^2 \kappa^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \phi = 0, \quad (k)$$

ここに, $\kappa = k \cdot h/2$, $2h$ は焦点間の距離である。

今, $\phi = \phi_1(\xi) \cdot \phi_2(\eta)$, $\kappa^2 = q$ とおけば (k) 式は次の2つの Mathieu 方程式で示される。^{(11) (12)}

$$\frac{d^2 \phi_1}{d\xi^2} - (a_1 + 2q \cosh 2\xi) \phi_1 = 0 \quad (l)$$

$$\frac{d^2 \phi_2}{d\eta^2} + (a_1 + 2q \cos 2\eta) \phi_2 = 0 \quad (m)$$

(l) 式の解は, $\text{Gek}_1(\xi, -q)$ 及び $\text{Fek}_1(\xi, -q)$,

(m) 式の解は, $\text{se}_1(\eta, -q)$ 及び $\text{ce}_1(\eta, -q)$,

となる。茲に, se_1 , ce_1 は何れも 2π を週期とする Mathieu 函数で本計算に於ては q が1に比較して非常に小さい。故に夫々 $\sin \eta$, $\cos \eta$ と考えても差支えない。又 Gek_1 , Fek_1 は変形 Bessel 函数 I_n と K_n との積の形で示される函数で次式で表わされる。

$$\text{Gek}_1(\xi, -q) \doteq I_0(\kappa e^{-\xi}) K_1(\kappa e^{\xi}) + I_1(\kappa e^{-\xi}) K_0(\kappa e^{\xi}),$$

$$\text{Fek}_1(\xi, -q) \doteq I_0(\kappa e^{-\xi}) K_1(\kappa e^{\xi}) - I_1(\kappa e^{-\xi}) K_0(\kappa e^{\xi}).$$

結局 (j) 式の解は次の様になる。

$$\phi = \text{Gek}_1(\xi, -q) \text{se}_1(\eta, -q) \cos n\kappa z, \quad 0 \leq \eta \leq \pi, \quad (n)$$

$$\text{及び} \quad \phi = \text{Fek}_1(\xi, -q) \text{ce}_1(\eta, -q) \cos n\kappa z, \quad \pi/2 \leq \eta \leq (3/2)\pi. \quad (o)$$

ϕ の函数が判れば T_{III} の計算は $\xi = \xi_0$ の楕円断面形の筒について計算される。従つて Θ_2 は次の如くなる。

$$\Theta_2 = \frac{T_{III}}{T_{II}} = \frac{\xi_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \xi_n \Phi_n}{1 + \Psi_1} \quad (p)$$

ここに, Φ_n, Ψ_1 は (i) 式に於ける値と同値である。

ξ_i, ξ_n は,

$$\xi_1 = \frac{\text{Gek}_1(\xi_0, -q)}{-\text{Gek}_1'(\xi_0, -q)}$$

$$\xi_n = \frac{\text{Gek}_1(\xi_0, -q_n)}{-\text{Gek}_1'(\xi_0, -q_n)} \quad (q)$$

ここに, dash は ξ についての微分を示す。 $q_n = n^2 \kappa^2$ である。 Fek_1 に対しても (q) と同形で Gek_1 と置替えれば得られる。楕円の長軸短軸を夫々 a, b とし a/b の 2, 3 の値につい

第1表 円筒の2節振動における Θ_2

l/a	Θ_2	$\Theta_2^*(\text{Taylor})$
10	0.869	0.890
9	0.853	0.865
8	0.833	0.843
7	0.809	0.820

第2表 楕円筒の2節振動における Θ_2

ξ_0	a/b	e_1	Θ_2	
			$(l/a = 10)$	$(l/a = 10)$
0	∞	1	0.9400	0.9435
0.310	3.333	0.955	0.9242	0.9374
0.805	1.500	0.745	0.8890	0.8945
∞	1.000	0	0.8688	0.8688

て計算値を示せば第2表の如くなる。表には円筒の Θ_2 も附記してある。表に見る通り Θ_2 は円断面に於て最低値を示し楕円断面になつても余り著しい変化はなく、板に近くなるに従つて Θ_2 は1に近付く事が判る。第8図に実験と比較して描いてある。

附 録 II. 模型実験

模型実験を行つた水槽は長さ 3 米、幅 1.0 米、水深約 0.7 米である。油槽船模型は長さ 1.5 米、32,000 ton d. w. 油槽船の 1/125 の木製模型である。内部の構造は Pl. 1 に示す様に実船と同様に縦横の隔壁によつて充分補強してある。これは模型船の局部振動を防ぐためである。

船尾甲板に取付けた可動コイル型拡声器によつて模型船を起振し船首甲板に取付けたクリスタルピックアップによつて模型船の振動を受振し之を増幅器によつて拡大してオシロスコープに導く装置とした。低周波発振装置によつて任意の振動数を与うれば模型船の固有振動数が測定される。振動数の検定には音叉を用いた。使用した振動数の範囲は 60~3,000 cps であつて共振曲線の一例は第5図に示してある。またピックアップを模型船の全長に渡つて移動して測定して得られた振動型を示せば第6図の如くである。Pl. 2, 3 は夫々模型船の空中及び水上に於ける測定装置である。

円筒楕円筒等の起振は可動コイルに取付けた軽量の棒により外部より起振する装置とした。Pl. 4, 5 はその一例を示す。第6図には廻転楕円体及び円筒に於て測定した振動型の例を示す。筒の振動実験によつて得られた附加慣性係数は第7図に示してある。この結果を Θ_2 の値にして示せば第8図の如くなる。 Θ_2 の実験値は附録Iの計算値とは一致しないがその傾向は一致している。筒の長さを逐次切取つて短くした模型の実験結果は本文第2図に示してある。模型船の上下動揺の附加質量測定には Pl. 6 に示す如く起振機と一つの振動系を水槽上に取

付け、この振動系の固有振動数と模型を取付けたときの固有振動数とを測定する事によつて附加質量を計測する

Pl. 1 模型油槽船の内部構造

Pl. 2 油槽船模型の空中振動実験

Pl. 3 模型油槽船の水上振動実験

第5図 模型油槽船の共振曲線及固有振動数

第6図 廻転楕円体、模型油槽船及び円筒の2節振動の振動型の実測値

Pl. 4 先細円筒模型の空中振動実験

Pl. 5 先細円筒模型の水上振動実験

装置とした。この装置は原理的には Prohaska の行つた実験⁴⁾と同様である。

第7図 楕円筒模型の τ の測定値

第8図 楕円筒及び角筒の Θ_2 の測定値及び計算値

Pl. 6 上下動揺実験装置