(昭和 35 年 11 月造船協会秋季講演会において講演)

横揺と縦揺の混振について

正員 真 鍋 大 覚*

Mixed Irregular Oscillations of Rolling and Pitching Motions of a Ship

By Daikaku Manabe, *Member*

Summary

Spectral distribution of oscillation of a ship has, in general, two peaks, which originate the resonances of pitching or heaving and rolling.

This phenomena increase the irregularity of motion compared with the case when they are completely isolated with each other, and furthermore, also frequency distribution of amplitude has two peaks, the larger portion of which is due to combined oscillation.

According to Rice's theory of envelope, letting R be the amplitude of envelope, which is irregular, P, Q be rolling and pitching, which are supposed to be regular, then the probability density which lies between R and $R+dR$ is

$$p(R) = R \int_0^\infty r J_0(Pr) J_0(Qr) J_0(Rr) e^{-(\psi_0/2)r^2} dr.$$

This integral can be developed further as follows :

$$\frac{R}{\psi_0} \exp \left[-\frac{1}{2\psi_0} (P^2 + Q^2 + R^2) \right] \cdot \left\{ I_0 \left(\frac{PR}{\psi_0} \right) I_0 \left(\frac{QR}{\psi_0} \right) I_0 \left(\frac{PQ}{\psi_0} \right) + 2 \sum_{m=1}^\infty I_m \left(\frac{PR}{\psi_0} \right) I_m \left(\frac{QR}{\psi_0} \right) I_m \left(\frac{PQ}{\psi_0} \right) \right\}$$

where ψ_0 is mean square of forced oscillation components.

This distribution becomes

$$R \gg 0. \quad p(R) \doteq \frac{I_0(PQ/\psi_0)}{2\pi\sqrt{PQ}} \exp \left[-\frac{1}{2\psi_0} (R-P-Q)^2 \right]$$

and when there is only one resonance

$$Q=0. \quad p(R) = \frac{R}{\psi_0} \exp \left[-\frac{1}{2\psi_0} (P^2 + R^2) \right] \cdot I_0 \left(\frac{PR}{\psi_0} \right) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi\psi_0}} \left[-\frac{1}{2\psi_0} (R-P)^2 \right]$$

so that the maximum frequency shifts from $R=P$ to $R=P+Q$, namely at the amplitude of sum of P and Q .

So that combined resonance oscillation sometimes causes extraordinary large amplitude.

Letting circular frequencies be p and q for the amplitudes P and Q , irregularity reaches at the extreme value when :

$$Pp = Qq$$

1. 緒 言

荒海面における船舶の動揺は縦揺、上下揺および横揺の3種が一般に混合していることが多い。この中縦揺と上下揺とは週期がほとんど相等しく、しかも横揺の週期に比較してかなり小さいために実質上はスペクトル解析を行なう際にその分布に2つの peak (極大値, 最多エネルギー密度) が発現し易い傾向がある。

このような場合には振幅の頻度分布曲線の上にも横揺, あるいは縦揺, 上下揺各々単独のときのような単一極大値の分布は次第に形が崩れて大小2つの peak がそれぞれの固有周波数の位置に発生する傾向を示して来る。

原稿受付 昭和 35 年 6 月 18 日

* 九州大学工学部

第1図 2個の最大密度を有するスペクトルと頻度の分布状況

2. 2個の規則動揺を含む擾乱動揺に対する頻度分布

ここで動揺 ξ の各成分を理想化して、2つの顕著な規則成分 ξ_P, ξ_Q とその他の微少擾乱 ξ_N に分類して

$$\xi(t) = \xi_P(t) + \xi_Q(t) + \xi_N(t) \quad (1)$$

とおいたとき各成分は

$$\xi_P = P \cos(pt + \varepsilon_p), \quad \xi_Q = Q \cos(qt + \varepsilon_q) \quad (2)$$

$$\xi_N = \sum_{n=1}^N C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (3)$$

$$\xi_P^2 = P^2/2 \quad \xi_Q^2 = Q^2/2 \quad \xi_N^2 = \sum_{n=1}^N C_n^2/2 \equiv \psi_0 \quad (4)$$

したがって統計的考察法のいかんによつて頻度分布曲線の表示は次の2種に分けられる。

(i) 極値の理論、これはすでに述べた所であつて、誤差理論から、 $u = \xi/(\xi^2)^{1/2}$ として u と $u+du$ 間の確率密度を $p(u)du$ とすれば、

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\varepsilon e^{-u^2/2\varepsilon^2} + \sqrt{1-\varepsilon^2} u e^{-u^2/2} \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} u} e^{-x^2/2} dx \right] \quad (5)$$

ここに Cartwright & Longuet-Higgins の不規則度示数は

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{(\xi^2)^2}{\xi^2 \cdot \xi^{1/2}} = 1 - \frac{(P^2 p^2/2 + Q^2 q^2/2 + (-1)\psi_0'')^2}{(P^2/2 + Q^2/2 + \psi_0)(P^2 p^4/2 + Q^2 q^4/2 + (-1)^2 \psi_0^{(4)})} \quad (6)$$

(ii) 包絡線の理論

平均的周波率を ω_m として動揺状況を総括して

$$\xi = \xi_A \cos \omega_m t - \xi_B \sin \omega_m t = R \cos(\omega_m t + \theta) \quad (7)$$

$$\xi_A = P \cos\{(p-\omega_m)t + \varphi_p\} + Q \cos\{(q-\omega_m)t + \varphi_q\} + \sum_{n=1}^N C_n \cos\{(\omega_n - \omega_m)t + \varphi_n\} = R \cos \theta$$

$$\xi_B = P \sin\{(p-\omega_m)t + \varphi_p\} + Q \sin\{(q-\omega_m)t + \varphi_q\} + \sum_{n=1}^N C_n \sin\{(\omega_n - \omega_m)t + \varphi_n\} = R \sin \theta$$

したがって特性函数の方法に拠り

$$\text{average } e^{i\alpha \xi_A + i\beta \xi_B} = J_0(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} P) J_0(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} Q) \exp\left[-\frac{(\alpha^2 + \beta^2)\psi_0}{2}\right]$$

R と $R+dR$ の間の確率密度を $p(R)dR$ とすれば

$$\begin{aligned}
 p(R) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha\xi_A - i\beta\xi_B} \text{ave } e^{i\alpha\xi_A + i\beta\xi_B} d\alpha d\beta \\
 &= R \int_0^{\infty} r J_0(Pr) J_0(Qr) J_0(Rr) e^{-\frac{1}{2} r^2} dr
 \end{aligned} \quad (8)$$

ここで Weber, Schlömrich, Schläfli などの公式

$$\begin{aligned}
 J_0(Pr) J_0(Qr) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} J_0(Wr) d\phi, \quad W^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos \phi \\
 \int_0^{\infty} J_0(Wr) J_0(Rr) e^{-\frac{1}{2} r^2} r dr &= e^{-(R^2 + W^2)/2} I_0\left(\frac{RW}{\psi_0}\right) \\
 I_0\left(\frac{RW}{\psi_0}\right) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m I_m\left(\frac{RP}{\psi_0}\right) I_m\left(\frac{RQ}{\psi_0}\right) \cos m\phi, \quad \varepsilon_0 = 1, \varepsilon_m = 2, \quad m=1, 2, \dots, \infty \\
 I_m\left(\frac{PQ}{\psi_0}\right) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-PQ/\psi_0 \cos \phi} \cos m\phi d\phi \quad m=0, 1, 2, \dots, \infty
 \end{aligned}$$

を順次に適用すれば次の結果が得られる。

$$p(R) = \frac{R}{\psi_0} e^{-(P^2 + Q^2 + R^2)/2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m I_m\left(\frac{RQ}{\psi_0}\right) I_m\left(\frac{PR}{\psi_0}\right) I_m\left(\frac{QR}{\psi_0}\right) \quad (9)$$

とくに卓越した成分が唯一の場合には

$$Q=0 \quad \therefore \quad p(R) = \frac{R}{\psi_0} e^{-(P^2 + R^2)/2} I_0\left(\frac{PR}{\psi_0}\right) \quad (10)$$

という Rice の導いた結果に一致する。

3. 混振による最多頻度の振幅の変化

この基礎式において

$$u = \xi/\sqrt{\psi_0}, \quad a = P/\sqrt{\psi_0}, \quad b = Q/\sqrt{\psi_0} \quad (11)$$

とおけば u と $u+du$ の間の確率密度 $p(u)du$ に対して

$$p(u) = u \exp\left[-\frac{a^2 + b^2 + u^2}{2}\right] \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m I_m(ab) I_m(au) I_m(bu) \quad (12)$$

で表わされる。ここで特に u がきわめて大きいときは漸近展開を行なつて、

$$u \rightarrow \infty, \quad p(u; a, b) = \frac{I_0(ab)}{2\pi\sqrt{ab}} e^{-u-a-b)/2} \quad (13)$$

となつて

$$u = a + b, \quad p_{\max}(a, b) = I_0(ab)/2\pi\sqrt{ab} \div \exp(ab)/(2\pi)^{3/2} ab \quad (14)$$

一方 $b=0$ のときは

$$u \rightarrow \infty, \quad p(a, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u-a)/2} \quad (15)$$

$$u = a, \quad p_{\max}(u; a, 0) = 1/\sqrt{2\pi} \quad (16)$$

であるから b の増加によつて最初 $u=a$ に現われていた頻度分布曲線の極大値の位置は次第に $u=a+b$ の方に移行し吸収されてゆくことになる。第4図は $a=b$ の特別の場合について $p(u)$ の分布を数値積分したものであるが、以上の消息をよく説明している。

4. 極値の理論と包絡線の理論の比較

ここで船体の動揺のように共振がきわめて鋭くかつ明瞭に発現する場合には不規則擾乱成分としてまとめられた誘振 ξ_N は一般には微少で共振横揺 ξ_P および共振縦揺 ξ_Q に比較して省略し得る場合が多い。このような抽象化された場合を調べて見ると次のようになる。

まず極値の理論において

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{(P^2 p^2 + Q^2 q^2)^2}{(P^2 + Q^2)(P^2 p^4 + Q^2 q^4)} \quad (17)$$

第2図 共振振幅の比率と不規則度の変化

第3図 スペクトルに現われた極値群の数の増加と不規則度の増加の状況

第4図 2個の卓越動揺成分による頻度分布曲線の歪曲と遷移

ただし

$$\therefore \left. \begin{aligned} 0 \leq \varepsilon^2 &= \frac{r^2(1-\delta^2)^2}{(1+r^2)(\delta^4+r^2)} \leq 1, \\ 0 \leq r &= Q/P \leq \infty \quad 0 \leq \delta = p/q \leq \infty \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$r = \delta : \varepsilon^2_{\max} = \left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} \right)^2 \quad (19)$$

ゆえに $Q=0$ すなわち縦揺が干渉しなければ $\varepsilon^2=0$ という規則的な横揺は縦揺の存在のために次第に ε^2 が増して複雑化してくる。この式は $\delta \rightarrow 1$ すなわち両者の週期が接近するほど $\varepsilon^2 \rightarrow 0$ と規則化し $\delta \rightarrow 0$, すなわち

両者の週期が極端に違うほど ε^2 が増加して乱雑化する。

ここで横揺に対して縦揺を優乱成分と見れば、包絡線理論に対する Rice の不規則度示数は

$$a = P/\sqrt{Q^2/2} \quad (20)$$

となる。 $Q=0$ 、縦揺が無いときは $a \rightarrow \infty$ 、横揺だけの完全規則動揺に一致する。

極値の理論と包絡線の理論が物理的にどのように実際の現象を説明しているかという問題を考察すれば、以上のような点から想像すれば、極値の理論は完全規則動揺でも $\varepsilon^2=0$ の Rayleigh 分布程度までしか表現できない反面、完全に不規則な極限の Gauss 分布に至るまでおよび成分振幅の週期の大小的差異が振幅分布の不規則性におよぼす影響を十分に説明できる特徴がある。

包絡線の理論は規則動揺を理想的に表現できる点で特徴があるが最も乱雑な分布でもせいぜい Rayleigh 分布程度に規則化され、成分週期の異同は完全に省略している。結局実際の現象は極値の理論と包絡線の理論との中間のどこかに在つて、不規則度の下限を極値の理論、規則度の上限を包絡線の理論がおさえていることになり、極値と包絡線の境界である Rayleigh 分布が非常に多い事実から以上のような推測が、大体において正しいことがわかる。

5. 横揺と縦揺の相互干渉

誘振成分が省略し得るときは

$$\xi_N=0, \quad \therefore \psi_0=0 \quad (21)$$

第5図 2個の単弦振動の重複による
頻度分布曲線

第6図 1個の単弦振動（又は“うなり”）の頻度分布曲線

とおき確率密度は $P \geq Q$ として

$$\begin{aligned} p(R) &= R \int_0^\infty r J_0(Pr) J_0(Qr) dr \\ &= R \begin{cases} 1/2\pi A, & P-Q \leq R \leq P+Q \\ 0, & R \leq P-Q, P+Q \leq R \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

ここに A は (P, Q, R) を3辺とする3角形の面積であつて Heron の公式から

$$A = \sqrt{S \cdot S - P \cdot S - Q \cdot S - R}, \quad S = \frac{P+Q+R}{2} \quad (23)$$

$$\therefore P(R) = \frac{2}{\pi} \frac{R}{\sqrt{(P+Q^2-R^2)(R^2-P-Q^2)}} \quad (24)$$

$$\therefore p(P+Q) = \infty \quad p(P-Q) = \infty$$

となつて2成分振幅の和または差のところは非常に、現度が高いことになる。

R を超過する確率、1乗平均、2乗平均は Jacobi の楕円函数

第7図 頻度分布およびスペクトル分布
から得られた卓越振幅の比較

を含む次の諸式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(R) &= \int_R^{P+Q} p(R) dR = \frac{2}{\pi} amu, \\ \varphi(R) \cdot \bar{R} &= \int_R^{P+Q} R \cdot p(R) dR = \frac{2}{\pi} (P+Q) E amu \\ \varphi(R) \cdot \bar{R}^2 &= \int_R^{P+Q} R^2 \cdot p(R) dR = \frac{2}{\pi} \left\{ (P^2 + Q^2) amu + 4PQ snucnu \right\} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ただし

$$R^2 = (P+Q)^2 cn^2 u + (P-Q)^2 sn^2 u, \quad k^2 = \frac{4PQ}{(P+Q)^2}, \quad (26)$$

全平均値に対しては

$$U = K; \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \cdot d\theta, \quad amK = \pi/2$$

とおけば

$$\bar{R} = (P+Q) \cdot \frac{2}{\pi} E, \quad \bar{R}^2 = P^2 + Q^2. \quad (27)$$

第7図は北斗丸の計測結果から特に横揺と縦揺の共振がスペクトル分布に同時に明瞭に出ている例につき、振幅の頻度分布曲線の2つの peak $\theta_1, \theta_2 (\theta_1 > \theta_2)$ から横揺および縦揺の成分振幅 $\theta_r = (\theta_1 + \theta_2)/2$, $\theta_p = (\theta_1 - \theta_2)/2$ を求め、一方スペクトルで共振周波数 f_r, f_p の近傍だけの面積から

$$\bar{\theta}_r^2 = \int_{f_r - \delta_r}^{f_r + \varepsilon_r} w(f) df, \quad \bar{\theta}_p^2 = \int_{f_p - \delta_p}^{f_p + \varepsilon_p} w(f) df, \quad f_r \gg \delta_r, \varepsilon_r, \quad f_p \gg \delta_p, \varepsilon_p$$

を求めて両者を比較したもので、かなりの程度でよい対応を示している。

したがってこの方法を応用すれば単に頻度分布曲線の上からその中に潜在している共振成分を簡単に抽出することができる。

6. 唸りの現象と有義平均

とくに $Q=0$ の場合、または $P=Q$ のときは $P+Q=2P$ を新しく P とおくことによつて確率密度は次のようになる。

$$p(R) = R \int_0^\infty r J_0(Pr) J_0(Rr) dr = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{P^2 - R^2}}, & 0 \leq R \leq P \\ 0, & P \leq R \leq \infty \end{cases} \quad (28)$$

これはうなり (beat) の場合と同一で不規則動揺はかなりこの性質を有しているが $p(P) = \infty$ であるから最多頻度の位置はそのまま規則動揺成分を示す。

R を超過する確率および1乗、2乗の区分平均値は、

$$\left. \begin{aligned} \varphi(R) &= \int_R^P p(R) dR = \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{R}{P} \\ \varphi(R) \cdot \bar{R} &= \int_R^P R \cdot p(R) dR = \frac{2}{\pi} \sqrt{P^2 - R^2} \\ \varphi(R) \cdot \bar{R}^2 &= \int_R^P R^2 \cdot p(R) dR = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} R \sqrt{P^2 - R^2} + \frac{1}{2} P^2 \cos^{-1} \frac{R}{P} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\text{従つて全平均値は } R=0: \quad \bar{R} = \frac{2}{\pi} P \quad \bar{R}^2 = \frac{P^2}{2} \quad (30)$$

そこで有義平均を考えると

$$\varphi(R) = \frac{1}{3} \quad \therefore \cos^{-1} \frac{R}{P} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{3} \quad (31)$$

$$\frac{R}{P} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866 \div 0.886 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (32)$$

つまり位相角にして $90^\circ \times 1/3 = 30^\circ$ 、また最大振幅との比率にして Rayleigh 分布の場合の全平均値に等しいと
もうきわめて興味ある性質が見出される。さらに

$$\left. \begin{aligned} \text{sign} \cdot \text{mean } \bar{R} &= \frac{3}{\pi} P = 0.955 P \\ \text{sign} \cdot \text{mean } \bar{R}^2 &= \frac{3}{\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = 0.913 P^2 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\therefore \sqrt{s \cdot m \cdot \bar{R}^2} = 0.956 P \doteq s \cdot m \cdot \bar{R} \doteq P \quad (34)$$

つまり最大振幅にほとんど等しいと見られる限界にあたっている。

著者は以前に Rayleigh 分布に対して有義平均値を数学的に解釈して区分率が

$$e = 2.718 \doteq 3 \quad (35)$$

であることを述べたが、さらに、有義平均値と 2 乗平均の平方根すなわち r. m. s との比が

$$1.416 \doteq 1.414 = \sqrt{2} \quad (36)$$

換言すれば有義平均とは r. m. s. 以上の高い値全体に対する平均であり、それら全体をまとめて単一規則動揺に置換して見るとその 2 乗平均が極値全体の 2 乗平均に一致していることになる。Sverdrup & Munk が長年にわたる海洋観測の経験から帰納した有義値に対して数理的に解説を試みるならば以上のような一面も確かに備わっているようである。

7. 結 言

2 つの共振を含む不規則動揺の基礎的研究から、今まで直観的に提唱されていたに過ぎない有義平均値に対してその合理性の数理的裏付が一層明確になつたが、これを船の一般動揺に対して考察してみると、特に横揺に縦揺が混入し得るような斜波の場合は、横揺共振角に縦揺共振角を加算した大きな動揺角も、かなり強い確率で双方に発現し得ることを教えており、かつ不規則性の著しい増加により異常な大動揺が突発し得ることも併せ考えられると、これは操縦性安全性に重要な事柄と思われる。

この研究についても、御多忙中にもかかわらず統計理論紹介の労をとられた渡辺名誉教授、元良助教授、度々御教示を賜った水品船舶局長には深く謝意を表わす次第である。