(昭和 35 年 11 月造船協会秋季講演会において講演)

進路不安定な船の定常旋回について

正員 谷 初 蔵*

On the Steady Turning of Directionally Unstable Ship on Straight Course.

By Hatsuzo Tani, Member

Summary

A ship, which is directionally unstable on straight course, can turn against the rudder in a certain range of rather small rudder angle. This singular phenomenon was first pointed out by P. Contensou.

The present writer discusses this phenomenon mathematically by assuming that the resistance derivatives are linear functions of the curvature of ship's path. He assumes, for simplicity, that $C_{Y\beta} = C_{Y\beta_0} (1 + k\Omega)$, and describes the motion of ship by nonlinear differential equations. Then the stability of the steady turning of an unstable ship can be tested topologically on a phase plane.

船が旋回運動に入ると抵抗微係数の値が変わり、一般には進路安定特性値が増加するので安定が強化される。直線運動の進路不安定な船でも、旋回運動に入ることによって特性値が負から正に移るから、安定な定常旋回が実現できるのであるが、この場合特異な現象として、ある小さな舵角の範囲内で舵と反対の向きに旋回する可能性があり、P. Contensou⁽¹⁾、Davidson⁽²⁾、中島⁽³⁾、井上⁽⁴⁾の諸氏によつて指摘された。この種の運動は線型化の根本仮定に立つては扱えない。著者は抵抗微係数にある仮定を与えて非線型の運動方程式を導き、上述の特異な現象をやや詳しく考察した。

1. 抵抗微係数について

抵抗微係数 $C_{Y\beta}$ 、 $C_{M\beta}$ および $C_{Y\Omega}$ 、 $C_{M\Omega}$ (C_Y 、 C_M は垂直力係数、 β は偏角、 Ω は無次元角速度で $C_{Y\beta}$ 等は β また Ω による微分を表わす) が旋回運動に入つたときどう変るのかについては、くわしくは判っていない。大体の傾向は、Davidson⁽²⁾ の論文中に掲げられている進路不安定な Minesweeper の値から推定されるので、これを Ω に対してプロットしたものを図 1 に示した。安定特性値 A は

$$A = C_{Y\beta} C_{M\Omega} - (\mu_{\beta} - C_{Y\Omega}) C_{M\beta} \quad (1.1)$$

であらわされるから、その増加は $C_{Y\beta}$ 、 $C_{M\Omega}$ の増加と $C_{M\beta}$ 、 $\mu_{\beta} - C_{Y\Omega}$ の減少によつて得られる (μ_{β} は見掛質量係数)。Minesweeper の値から推定すると、 $C_{Y\beta}$ 、 $C_{M\Omega}$ は Ω とともに増す傾向を、また $\mu_{\beta} - C_{Y\Omega}$ 、 $C_{M\beta}$ は減少する傾向をもっている。 A 増加の機構がこれによつてほぼ推定できるとおもわれる。ここでごく自然に抵抗微係数を Ω の関数としてあらわすことが考えられる。最も簡単には Ω の 1 次式としてよいであろう。これは C_Y 、 C_M を β 、 Ω の 2 次式で近似することと同等である。計算の複雑さをいとわなければ、この場合 4 個の微係数をすべて Ω で与えて運動をくわしく論ずることができる。しかしここではさしあたり運動特性を概観することにして、簡単に $C_{Y\beta}$ だけを Ω の 1 次式であらわし、他は線型の場合と同様 $\beta=0$ 、 $\Omega=0$ の値をそのま

Fig. 1 抵抗微係数

原稿受付 昭和 35 年 6 月 19 日

* 東京商船大学

を持続するものと仮定する。 $\mu_x - C_{Y\Omega}$ は Ω が大きくない範囲なら主として μ_x の値に支配されるから、上の仮定はほぼ妥当である。 $C_{M\beta}$, $C_{M\Omega}$ は図1に関するかぎり $C_{Y\beta}$ と同程度の変化なので、上の仮定は妥当を欠くが、こころみに他の船型についての実験、たとえば Horn⁽⁵⁾ のものをみると、 $C_{M\beta}$ が Ω の小さいとおもわれるところでは一定値である。この点については資料がはなはだ乏しいので、上の仮定を許すものとした。

2. 進路安定と旋回

$C_{Y\beta}$ が

$$C_{Y\beta} = C_{Y\beta 0}(1 + \kappa\Omega) \quad (2.1)$$

のように与えられるとする。 $C_{Y\beta 0}$ は $\Omega=0$, $\beta=0$ における値である。安定特性値はしたがって、

$$\Delta = C_{Y\beta 0}(1 + \kappa\Omega)C_{M\Omega 0} - (\mu_x - C_{Y\Omega 0})C_{M\beta 0}, \quad (2.2)$$

である。ここで κ は Ω と同符号、すなわち $\kappa\Omega > 0$ を満たすものとする。直線進路安定の特性値を Δ_0 とすれば、

$$\Delta_0 = C_{Y\beta 0}C_{M\Omega 0} - (\mu_x - C_{Y\Omega 0})C_{M\beta 0} \quad (2.3)$$

であり、 $\Delta_0 > 0$ ならば安定、 $\Delta_0 < 0$ ならば不安定である。特に進路不安定な船では、ある Ω の値で（したがってある旋回半径 R で） $\Delta=0$ となり、 Ω がさらに増すと $\Delta > 0$ となるような Ω の値が存在する。このことは、進路不安定な船は直進の定常状態を実現することが物理的に不可能で、外乱のあつた機会に螺旋的な経路を描きつつゆるやかな旋回をはじめ、ついにはある半径の定常旋回に到達することを意味する。このような Ω は (2.2) 式で $\Delta=0$ とおいて次のように求められる。

$$\Omega_0 = -\frac{\Delta_0}{\kappa C_{Y\beta 0}C_{M\Omega 0}} \quad (2.4)$$

Ω_0 の定常旋回は安定な定常状態であるが、それは次のようにして判別できる。直進中外乱を受けた船の運動方程式は (2.1) 式を考慮して次の無次元型に書かれる。

$$\begin{aligned} \mu_y \dot{\beta} + C_{Y\beta 0}\dot{\beta} + \kappa C_{Y\beta 0}\dot{\beta}\Omega - (\mu_x - C_{Y\Omega 0})\Omega &= 0, \\ -C_{M\beta 0}\dot{\beta} + i\dot{\Omega} + C_{M\Omega 0}\Omega &= 0 \end{aligned}$$

ここに $\dot{\beta}$ 等は重心経路 s に関する微分 d/ds をあらわし、 μ_y , i はそれぞれ見掛質量係数、見掛慣性率である。簡単のため、 $\mu_y = a_{11}$, $C_{Y\beta 0} = a_{10}$, $C_{M\beta 0} = a_{20}$, $\mu_x - C_{Y\Omega 0} = b_{10}$, $i = b_{21}$, $C_{M\Omega 0} = b_{20}$ と書けば、

$$a_{11}\dot{\beta} + a_{10}\dot{\beta} + \kappa a_{10}\dot{\beta}\Omega - b_{10}\Omega = 0, \quad (2.5a)$$

$$-a_{20}\dot{\beta} + b_{21}\dot{\Omega} + b_{20}\Omega = 0. \quad (2.5b)$$

となる。進路不安定な船の上記のような定常旋回は、 $\beta \sim \Omega$ 平面における次の2曲線の交点で示される。

$$a_{10}\dot{\beta} + \kappa a_{10}\dot{\beta}\Omega - b_{10}\Omega = 0, \quad (2.6a)$$

$$-a_{20}\dot{\beta} + b_{20}\Omega = 0 \quad (2.6b)$$

この2曲線はあきらかに、Davidson の論文中の Force-Curve, Moment-curve にあたる。これらは原点に関して対称、交点は原点、第1象限および第3象限に各1個である。すなわちその Ω 座標は、

$$\Omega=0 \text{ および } \Omega=\Omega_0 = -\frac{\Delta_0}{\kappa a_{10}b_{20}} \quad (2.7)$$

で、 $\Omega=0$ は直進運動を、 Ω_0 は左右の定常旋回をあらわし、後者はさきに求めた (2.4) 式の Ω_0 である。(2.5) 式を Ω に関する微分方程式に改めれば、

$$\ddot{\Omega} + (p_1 + p_2\Omega)\dot{\Omega} + p_3\Omega + p_4\Omega^2 = 0, \quad (2.8)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{a_{11}b_{20} + a_{10}b_{21}}{a_{11}b_{21}}, & p_2 &= \kappa \frac{a_{10}}{a_{11}}, \\ p_3 &= \frac{a_{10}b_{20} - a_{20}b_{10}}{a_{11}b_{21}}, & p_4 &= \kappa \frac{a_{10}b_{20}}{a_{11}b_{21}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)'$$

さらに (2.8) 式は、

$$\dot{\Omega} = \xi, \quad (2.9a)$$

$$\dot{\xi} = -(p_1 + p_2\Omega)\xi - p_3\Omega - p_4\Omega^2 \quad (2.9b)$$

と同等で、(2.7) 式で求めた Ω は、この場合位相面 $\Omega \sim \xi$ における特異点、

$$\left. \begin{aligned} (\Omega=0, \xi=0) \\ \left(\Omega=-\frac{p_3}{p_4}, \xi=0 \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

に対応する。これらの特異点の安定性はたやすく判別することができる⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾。

まず位相面の原点 ($\Omega=0, \xi=0$) は, $p_1^2-4p_3>0, -p_3>0$ なるゆえ鞍形点となつて不安定となり, 直進の進路不安定を示している。

他の特異点については, 位相面の原点をこの特異点に移し, 新しい座標を改めて Ω, ξ と書けば, (2.9) 式の第1近似は

$$\frac{d\xi}{d\Omega} = \frac{p_3\Omega + \frac{p_2p_3-p_1p_4}{p_4}\xi}{\xi} \quad (2.11)$$

となる。この場合は $p_1>0, p_2\leq 0 (\kappa\leq 0, \text{不等号同順}), p_3<0, p_4\leq 0 (\kappa\leq 0)$ であるから, $\Omega\geq 0$ のいずれについても

$$-\frac{p_2p_3-p_1p_4}{p_4} > 0$$

となるゆえこれは安定な特異点であり,

$$\left(\frac{p_2p_3-p_1p_4}{p_4} \right)^2 + 4p_3 \geq 0 \text{ または } < 0$$

であるかにしたがつて結節点か渦点となる。

以上によつて進路不安定な船が操舵しないときに実現する定常旋回は安定な旋回であることがわかつたが, たとえば Davidson の Minesweeper では $C_{Y\beta 0}=0.3346, C_{M\beta 0}=0.1194, \mu_x-C_{Y\Omega}=0.1811, C_{M\Omega 0}=0.0502$ で, これに $\kappa=1.75$ と仮定して計算すると $\Omega_0=\pm 0.1643$, したがつて $D/L=12.2$ の旋回となる。上記安定条件を計算したものは

$$-\frac{p_2p_3-p_1p_4}{p_4} = 4.33$$

となるゆえ安定, しかも

$$\left(\frac{p_2p_3-p_1p_4}{p_4} \right)^2 + 4p_3 = 15.49$$

となるから結局安定な結節点となる。Minesweeper について (2.9) 式の特異点近傍における積分曲線を等傾線法により描いた位相面上のトラゼクトリを図2に示した。ただし図には右旋回のみを描いてある。 ξ は角加速度を表わすものであるが, たとえば直進中外乱が加わるとその後の船の運動は大略次のような経過をたどる。初期の角加速度はいつたん減少するがまもなく増しはじめ, $\Omega=0.09$ 付近で極大となる。その後再び減少してついに定常旋回値 0.1643 に収束する。

Fig. 2 舵固定の進路不安定船のトラゼクトリ

3. 操舵による定常旋回と旋回安定

前節の所論は舵固定の場合の進路不安定船の運動であるが, 舵をとつたときの運動は (2.5) の右辺に舵の力を置いた方程式:

$$a_{11}\dot{\beta} + a_{10}\beta + \kappa a_{10}\beta\Omega - b_{10}\Omega = c_1\delta, \quad (3.1a)$$

$$-a_{20}\dot{\beta} + b_{21}\Omega + b_{20}\Omega = c_2\delta, \quad (3.1b)$$

であらわされる。定常旋回は上式の $\dot{\beta}, \dot{\Omega}$ をゼロとしたもの, すなわち $\beta \sim \Omega$ 平面上の2曲線の交点により求まる。その Ω は

$$\Omega^2 - \left(\frac{c_2}{b_{20}}\delta - \frac{A_0}{\kappa a_{10}b_{20}} \right)\Omega - \frac{a_{20}c_1 + a_{10}c_2}{\kappa a_{10}b_{20}}\delta = 0, \quad (3.2)$$

の根で,

$$\Omega = \frac{1}{2} (q_1 \pm \sqrt{q_1^2 + 4q_2}), \quad (3.3)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{c_2}{b_{20}} \delta - \frac{\Delta_0}{\kappa a_{10} b_{20}}, \\ q_2 &= \frac{a_{20} c_1 + a_{10} c_2}{\kappa a_{10} b_{20}} \delta. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

である。いま簡単のため右舵をとつた場合を考える ($\delta > 0$)。進路安定な船では $\Delta_0 > 0$ なるゆえ (3.3) 式より $\Omega > 0$ の根はただ1個、かつ $\Omega < 0$ とはなりえないことがわかる。物理的には、進路安定な船が右舵をとればかならず右旋回し、左に旋回することはない意味である。

ところが進路不安定な船の場合には、 δ の値により次のような運動が可能である。まず $\Omega > 0$ の根は (3.3) 式の複号中正号をとつたものであることがわかる。次にもし $\Omega < 0$ の範囲に根があるとすれば、この範囲では $\kappa < 0$, $q_2 < 0$ なるゆえ (3.3) 式の根号内は正またはゼロでなければならない。すなわち

$$q_1^2 + 4q_2 \geq 0. \quad (3.5)$$

である。これは δ の2次方程式でその根が $\Omega < 0$ なる定常旋回を実現するのに必要な舵角の限界値を与える。それを δ_c とすれば (2.4), (2.7) を参照して、

$$\begin{aligned} \delta_c &= \frac{b_{20}}{c_2} \left[- \left(\Omega_0 + 2 \frac{a_{20} c_1 + a_{10} c_2}{\kappa a_{10} c_2} \right) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{\left(\Omega_0 + 2 \frac{a_{20} c_1 + a_{10} c_2}{\kappa a_{10} c_2} \right)^2 - \Omega_0^2} \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

のように一般に2根得られるが、複号中正号をとつたものは非常に大きい値で現実の舵角をはるかに越えるゆえ捨てる。Minesweeper について計算すると $\delta_c = 0.74^\circ$ となり、Davidson のいわゆる Total-less-Rudder moment curve から得られた約 2° に比べてかなり小さい。この差はわれわれの理論の仮定に原因しているが、いずれにしても限界舵角はかなり小さいものと予想される。

さて $\delta < \delta_c$ の舵角をとつたときは、 $q_1 < 0$ となるゆえ $\Omega < 0$ の根は2個、 $\delta = \delta_c$ のとき1個得られる。図3は Minesweeper の限界舵角を示したものである。図4は同じく舵角と可能な定常旋回の寸法を描いたもので

Fig. 3 進路不安定船の限界舵角

Fig. 4 小舵角の操舵による進路不安定船の定常旋回

ある。ここで注目すべき点は、上記の範囲の右舵をとつたとき可能な左定常旋回は、いずれも Ω_0 より小さいことである。そして、大きい旋回径 (小さい $|\Omega|$) の旋回は舵角が増すと旋回径が減じ、小さい旋回径 (大きい $|\Omega|$) の旋回は旋回径が増す。限界舵角では上の2つの旋回が一致し、さらに舵角が増せば左定常旋回は消失する。

さて (3.1) 式より Ω に関する微分方程式は、

$$\ddot{\Omega} + (p_1 + p_2 \Omega) \dot{\Omega} + (p_3 - p_5 \delta) \Omega + p_4 \Omega^2 - p_6 \delta = 0. \quad (3.7)$$

ただし p_1, p_2, p_3, p_4 は (2.8)' 式、また p_5, p_6 は次式を意味する。

$$\left. \begin{aligned} p_5 &= \kappa \frac{a_{10} c_2}{a_{11} b_{21}}, \\ p_6 &= \frac{a_{10} c_2 + a_{20} c_1}{a_{11} b_{21}} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)'$$

(3.7) と等価な1階微分方程式は

$$\dot{\Omega} = \zeta, \quad (3.8a)$$

$$\dot{\zeta} = -(p_3 - p_5 \delta) \Omega - p_2 \Omega \zeta - p_4 \Omega^2 - p_1 \zeta + p_6 \delta, \quad (3.8b)$$

となるから、位相面 $\Omega \sim \zeta$ 上の特異点は

$$\Omega_{\pm}, \Omega_- = \frac{1}{2} \left[-\frac{p_3 - p_5 \delta}{p_4} \pm \sqrt{\left(\frac{p_3 - p_5 \delta}{p_4} \right)^2 + \frac{4p_6 \delta}{p_4}} \right] \quad (3.9)$$

$$\zeta = 0.$$

である。よつて特異点に原点を移せば、原点近傍における (3.8) 式の第 1 近似は

$$\frac{d\zeta}{d\Omega} = \frac{-[(p_3 - p_5 \delta) + 2p_4 \Omega_i] \Omega - (p_1 + p_2 \Omega_i) \zeta}{\zeta}, \quad (3.10)$$

(i は + または - の記号を意味する)

となり、特異点の安定性は上式を

$$\frac{d\zeta}{d\Omega} = \frac{A\Omega + B\zeta}{\zeta}, \quad (3.11)$$

と書くとき次のように判別される。すなわち、

$B^2 + 4A > 0, A < 0, B < 0$ のとき;

$B^2 + 4A < 0, B = 0$ または $B < 0$ のとき;

$B^2 + 4A = 0, B < 0$ のとき;

それぞれ安定である。しかるに $p_1 > 0, p_2 < 0, \Omega_i < 0$ なるゆえ $B = -(p_1 + p_2 \Omega_i) < 0$ は一般に満たされるが、 A の符号は $|\Omega_i|$ の大小により正または負となる。Minesweeper では Ω_- ($|\Omega|$ の小さい旋回) の旋回は不安定、 Ω_+ の旋回は安定で図 4 に示してある。図 2 と同じく等傾線法で描いた同船のトラゼクトリを図 5 に示した。

Fig. 5 小舵角の操舵による進路不安定船のトラゼクトリ

Fig. 6 限界舵角におけるトラゼクトリ

Ω_- は鞍形点で不安定、 Ω_+ は安定な結節点となっている。ただし図は $\delta = 0.57^\circ$ とした場合である。限界舵角の場合のトラゼクトリも図 6 に示したが、これは鞍形点で不安定である。

以上はもつぱら右舵をとつたときの左旋回を論じたが、右舵による右旋回についても注意すべき点がある。それは右舵による右定常旋回が $\Omega = \Omega_0$ から始まることである。このことは (3.3) 式からも自明で、 $\delta > 0$ では Ω は常に Ω_0 より大きい。図 4 の右方にも描かれているように、結局進路不安定な船は右舵をとつて $0 < \Omega < \Omega_0$ の範囲の定常旋回を実現することができないのである。

4. 結 語

抵抗係数を運動径路の曲率の函数とみなして Ω の 1 次式で近似し、進路不安定な船の小舵角における定常旋回の特異性を明らかにした。進路不安定な船というものはもとと望ましくないから、これを安定側へ移すよう改良することがまず常識であろうが、一方進路安定な船といえども積荷の事情によつてはかかなり船首トリムになることがあり、このようなときは進路不安定に転じる可能性がある。その場合には上述の所論が少なくとも理論的には問題となりうる。たとえば、限界舵角による不確定な舵角の領域があるために、その範囲の舵角によるいわゆる小舵の保針修正が望めないから、いきおいかなりの舵角を反復しなければならない。これは波の中などで過大操舵をいよいよ促すという結果を来すであろう。

参考文献

- (1) P. Conteusou : *Mechanique du Navire en Route et en Giration* ; A. T. M. A., No. 42, 1938.
- (2) Kenneth S. M. Davidson, Leonard I. Schiff : *Turning and Course-Keeping Qualities* ; SNAME, 1946.
- (3) 中島康吉 : 鉄道連絡船の操縦性におよぼす風の影響について ; 造船論文集 84 号, 1948.
- (4) 井上正祐 : 船の進路安定と定常旋回 ; 造船論文集 94 号, 1953.
- (5) F. Horn, E. A. Walinski : *Untersuchungen über Drehmanöver und Kursstabilität von Schiffen* ; Schiffstechnik, Heft 29, 1958.
- (6) N. Minorsky : "Introduction to Non-Linear Mechanics", Michigan, 1947.
- (7) J. J. Stoker : "Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems", New York, 1950.
- (8) 樫木義一 : 非線型振動論 (応用力学講座), 共立出版, 1957, または古屋茂, 南雲仁一 : 非線型振動論 (岩波講座現代応用数学), 岩波, 1957.