(昭和 35 年 11 月造船協会秋季講演会において講演)

等分布荷重を受ける帯状板について

(対辺支持の場合)

正員 本間 康之*

The Uniformly Loaded Long Rectangular Plate Which is Supported at Both Edges

By Yasuyuki Homma, *Member*

Summary

As the results of theoretical calculations about a uniformly loaded rectangular plate with supported edges we find as follows,

1. The bending moment at midspan can not be reached the plastic hinge moment, therefore the plastic hinge does not appear.
2. The elastic region diminishes rapidly with the increase of the load after the yielding of outer fiber of tension side at the midspan.

1. 緒 言

応力と歪の間に第1図に示すような関係を仮定すると、板が軸力と曲げモーメントを受けるときの応力分布は第2図に示すように3つの場合がある。これをそれぞれ E-E 状態、P-E 状態、P-P 状態と呼ぶことにする。各状態ごとに軸方向の伸び、曲率と軸力、曲げモーメントの関係は異なつたものとなる。

支持点が軸方向に移動しない単純支持の帯状板に等分布荷重を加えると、板には曲げモーメントと軸力を生じ荷重が小さいときは全域弾性であるが、荷重が増加するとスパン中央付近がまず P-E 状態になり、ついでこの領域が拡大し、さらに荷重が増せばスパン中央部から P-P 状態になつていくと考えられる。従つて第3-2図、第3-3図のような状態では各領域ごとに異なつた応力～変形の関係によらなければならない。

この論文はこのことを考慮に入れて、降伏点 30 kg/mm^2 ヤング率 $2 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$ の機械的性質を有する対辺支持の帯状板が等分布荷重を受けるとき、その撓み、最大曲げモーメント、軸

第1図

第2図

第3図

原稿受付 昭和 35 年 6 月 20 日

* 防衛庁技研本部

力、伸び等をスパン/板厚の比が 100, 80, 60, 40 の各場合について計算したものである。

2. 使用する記号

a 板幅	ξ x/a
h 板厚	w y/h
p 荷重 (kg/cm ²)	p' $pa^2/\frac{1}{4}\sigma_y h^2$
E ヤング率 (2×10^4 kg/mm ²)	t $T/T_y = \sigma_t/\sigma_y$
ν ポアソン比 (0.5)	m M/M_y (モーメント係数)
Y 降伏点 (30 kg/mm ²)	m_1 引張側の最大応力が σ_y になるときのモーメント係数
x 支持辺からの距離	m_2 圧縮側の最大応力が σ_y になるときのモーメント係数
y 撓み	$m_{1/2}$ スパン中央のモーメント係数
R 曲率半径	ε 撓みにより決る中心面の伸び
T 単位長さ当りの軸力	η 軸力と曲げモーメントから決る中心面の伸び
M 単位長さ当りの曲げモーメント	η_0 $(1-\nu^2)\sigma_y/E$
σ_y $Y/\sqrt{1-\nu+\nu^2}$	
T_y $\sigma_y h$	
M_y $\frac{1}{4}\sigma_y h^2$	

3. モーメント係数の式

対辺支持の帯状板に等分布荷重を加えると、曲げモーメントと軸力の間には次の式が成立つ。

$$M = -Ty - \frac{1}{2}px^2 + \frac{1}{2}pax \quad (1)$$

$M_y = \frac{1}{4}\sigma_y h^2$ で両辺を割り無次元にすると

$$m = -4tw - \frac{1}{2}p'\xi^2 + \frac{1}{2}p'\xi \quad (2)$$

軸力と曲げを受けるときの曲率

軸力 T と曲げモーメント M を受ける場合、E-E, P-E, P-P 各状態ごとに次の関係がある。

$$\text{E-E 領域} \quad \frac{h}{R} = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^2} M \quad (3)$$

$$\text{P-E 領域} \quad \frac{h}{R} = \frac{8}{9} \frac{1-\nu^2}{E} \frac{(\sigma_y - \sigma_t)^3}{(\sigma_y - \sigma_t - 2M/h^2)^2} \quad (4)$$

$$\text{P-P 領域} \quad \frac{h}{R} = 2 \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\sigma_y^2 h}{\sqrt{3h^2(\sigma_y^2 - \sigma_t^2) - 12\sigma_y M}} \quad (5)$$

モーメント係数の式

これらの各式の両辺を $M_y = \frac{1}{4}\sigma_y h^2$ で割り、

$$\frac{1}{R} = \mp \frac{d^2 y}{dx^2} = \mp \frac{h}{a^2} \frac{d^2 w}{d\xi^2}$$

を代入すれば次のようになる。

$$-\frac{d^2 w_{ee}}{d\xi^2} = 3 \frac{1-\nu^2}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \frac{Y}{E} \frac{a^2}{h^2} m_{ee} \quad (6)$$

$$-\frac{d^2 w_{pe}}{d\xi^2} = \frac{8}{9} \frac{1-\nu^2}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \frac{Y}{E} \frac{a^2}{h^2} \frac{(1-t)^3}{\left(1-t - \frac{1}{2}m_{pe}\right)^2} \quad (7)$$

$$-\frac{d^2 w_{pp}}{d\xi^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1-\nu^2}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \frac{Y}{E} \frac{a^2}{h^2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2 - m_{pp}}} \quad (8)$$

添字はそれぞれの式が成立する領域を示す。これらの式を(2)へ代入して w を消去すれば各状態に適用されるモーメント係数の微分方程式が得られる。

すなわち

$$\text{E-E 領域} \quad \frac{d^2 m_{ee}}{d\xi^2} - \gamma^2 m_{ee} + p' = 0 \quad (9)$$

$$\text{P-E 領域} \quad \frac{d^2 m_{pe}}{d\xi^2} - \frac{\alpha^2}{(\beta - m_{pe})^2} + p' = 0 \quad (10)$$

$$\text{P-P 領域} \quad \frac{d^2 m_{pp}}{d\xi^2} - \frac{\delta^2}{\sqrt{1-t^2-m_{pp}}} + p' = 0 \quad (11)$$

ここに

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \frac{12(1-\nu^2)}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \frac{Y}{E} \frac{a^2}{h^2} t \\ \alpha^2 &= \frac{128}{9} \frac{1-\nu^2}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \frac{Y}{E} \frac{a^2}{h^2} t(1-t)^3 \\ \delta^2 &= \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{1-\nu^2}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \frac{Y}{E} \frac{a^2}{h^2} t \\ \beta &= 2(1-t) \end{aligned}$$

4. 状態変化点の曲げモーメントと軸力

一定の軸力の下に曲げモーメントを増加していくと応力分布は E-E 状態から P-E 状態に移り、さらに P-P 状態になり最後に「最終塑性モーメント」に達する。この状態が変化するときのモーメントに対応するモーメント係数をそれぞれ m_1 , m_2 , また最終塑性モーメントに対するものを m_3 とすると、これらは(6), (7), (8)式から求められる。

すなわち m_1 は(6), (7), を等しいとおいて

$$3 \frac{1-\nu^2}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \frac{Y}{E} \frac{a^2}{h^2} m_1 = \frac{8}{9} \frac{1-\nu^2}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \frac{Y}{E} \frac{a^2}{h^2} \frac{(1-t)^3}{\left(1-t-\frac{1}{2}m_1\right)^2} \quad (12)$$

これから

$$m_1 = \frac{2}{3}(1-t)$$

m_2 は(7), (8) から

$$\frac{8}{9} \frac{1-\nu^2}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \frac{Y}{E} \frac{a^2}{h^2} \frac{(1-t)^3}{\left(1-t-\frac{1}{2}m_2\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1-\nu^2}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \frac{Y}{E} \frac{a^2}{h^2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2-m_2}} \quad (13)$$

これを解いて

$$m_2 = \frac{2}{3}(1-t)(2t+1)$$

m_3 は(8) から

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1-\nu^2}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \frac{Y}{E} \frac{a^2}{h^2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2-m_3}} = \infty \quad (14)$$

$$m_3 = 1-t^2$$

$t=0.1 \sim 0.9$ について m_1 , m_2 , m_3 を計算すると第1表のようになる。

5. 中心面の延び

曲げと軸力を受けるときの中心面の延びを各状態について求める。

E-E 状態では

$$\eta_{ee} = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_t \quad (15)$$

第 1 表

t	m_1	m_2	m_3
0.1	0.600000	0.720000	0.990000
0.2	0.533333	0.746666	0.960000
0.3	0.466666	0.746666	0.910000
0.4	0.400000	0.720000	0.840000
0.5	0.333333	0.666666	0.750000
0.6	0.266666	0.586666	0.640000
0.7	0.200000	0.480000	0.510000
0.8	0.133333	0.346666	0.360000
0.9	0.066666	0.186666	0.190000
1.0	0.000000	0.000000	0.000000

P-E 状態では第4図から次の関係があることがわかる。

$$\sigma_2 = \frac{c_1 + e_1}{c_1} \sigma_y \quad \sigma_1 = -\frac{d_1}{c_1} \sigma_y \quad \eta_{pe} = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \frac{1-\nu^2}{2E} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$\frac{c_1}{h} = \frac{9}{8} \frac{\left(1-t-\frac{1}{2}m_{pe}\right)^2}{(1-t)^3} \quad \frac{e_1}{h} = \frac{3}{4} \frac{m_{pe}}{1-t} - \frac{1}{2}$$

これらの式から η_{pe} を求めると

$$\eta_{pe} = \frac{(1-\nu^2)\sigma_y}{E} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \frac{(1-t)^2 m_{pe}}{\left(1-t-\frac{1}{2}m_{pe}\right)^2} - \frac{8}{9} \frac{(1-t)^3}{\left(1-t-\frac{1}{2}m_{pe}\right)^2} \right\} \quad (16)$$

P-P 状態では同様に第5図から

$$\sigma_2 = \frac{c_2 + e_2}{c_2} \sigma_y \quad \sigma_1 = -\frac{c_2 + d_2}{c_2} \sigma_y \quad \eta_{pp} = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \frac{1-\nu^2}{2E} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$\frac{c_2}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1-t^2-m_{pp}} \quad \frac{e_2}{h} = \frac{1}{2} (1+t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1-t^2-m_{pp}}$$

伸び η_{pp} は

$$\eta_{pp} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{(1-\nu^2)\sigma_y}{E} \frac{t}{\sqrt{1-t^2-m_{pp}}} \quad (17)$$

(15), (16), (17) を $\eta_0 = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_y$ で割れば

$$\text{E-E} \quad \eta_{ee}/\eta_0 = t \quad (18)$$

$$\text{P-E} \quad \eta_{pe}/\eta_0 = 1 + \frac{2}{3} \frac{(1-t)^2 m_{pe}}{\left(1-t-\frac{1}{2}m_{pe}\right)^2} - \frac{8}{9} \frac{(1-t)^3}{\left(1-t-\frac{1}{2}m_{pe}\right)^2} \quad (19)$$

$$\text{P-P} \quad \eta_{pp}/\eta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2-m_{pp}}} \quad (20)$$

したがって平均の伸びは

$$\bar{\eta} = 2 \int_0^{1/2} \eta(m, t) d\xi$$

第4図

第5図

ここに $\eta(m, t)$ は η_{ee} , η_{pe} , η_{pp} を表わす。

撓み y を生じているとき、中心面の単位長さについての伸びは、支持辺が x 軸方向に移動しないとすると

$$\varepsilon = \frac{1}{a} \int_0^a \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{h^2}{a^2} \int_0^{1/2} \left(\frac{dw}{d\xi} \right)^2 d\xi \quad (21)$$

これはモーメントと軸力による伸び $\bar{\eta}$ と等しくなければならない。すなわち

$$2 \int_0^{1/2} \eta(m, t) d\xi = \frac{h^2}{a^2} \int_0^{1/2} \left(\frac{dw}{d\xi} \right)^2 d\xi \quad (22)$$

6. 微分方程式の積分

モーメント係数の微分方程式(9)~(11)を境界条件、連続条件および伸びの条件を満足するように積分する。

第1積分

第1積分はそれぞれ次のようになる。

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dm_{ee}}{d\xi} \right)^2 - \frac{1}{2} r^2 m_{ee}^2 + p' m_{ee} - p' k_{ee} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dm_{pe}}{d\xi} \right)^2 - \frac{\alpha^2}{\beta - m_{pe}} + p' m_{pe} - p' k_{pe} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dm_{pp}}{d\xi} \right)^2 + 2\delta^2 \sqrt{1 - t^2 - m_{pp}} + p m_{pp} - p' k_{pp} = 0 \quad (25)$$

板の応力分布が全域 E-E 状態のときは考える必要はない。またこの論文で扱った範囲（降伏点 30 kg/mm^2 、ヤング率 $2 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$ 、板幅/板厚 $= 40 \sim 100$ ）では P-P 状態は生じなかつたので以下 P-E 状態と E-E 状態が共存する場合のみを論ずることにする。

第 2 積 分

境界条件 (28) を満足する E-E 領域の第 2 積分は

$$m_{ee} = \frac{\sqrt{2p'k_{ee}}}{r} \sinh r\xi - \frac{p'}{r^2} (\cosh r\xi - 1) \quad (26)$$

P-E 領域の第 2 積分は (24) から

$$\frac{d\xi}{dm_{pe}} = \frac{1}{\sqrt{2p'}} \frac{\sqrt{\beta - m_{pe}}}{\sqrt{\left\{ m_{pe} - \frac{1}{2}(\beta + k_{pe}) \right\}^2 + \alpha^2/p' - \frac{1}{4}(\beta - k_{pe})^2}}$$

これは楕円積分なので函数表によるか、または直接数値積分しなければならない。ここでは数値積分によつたが $m_{pe} = m_{1/2}$ で $d\xi/dm_{pe} = \infty$ となるので次のように変形して積分する。

$$\begin{aligned} \xi = \frac{1}{\sqrt{2p'}} \left\{ \left[\sqrt{\beta - m_{pe}} \cdot \log \left\{ \frac{1}{2}(\beta + k_{pe}) - m_{pe} - \sqrt{\left\{ \frac{1}{2}(\beta + k_{pe}) - m_{pe} \right\}^2 - \left\{ \frac{1}{4}(\beta - k_{pe}) - \alpha^2/p' \right\}} \right\} \right]_{m_{pe}=m_1}^{m_{pe}=m_{1/2}} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{m_1}^{m_{1/2}} \frac{\log \left\{ \frac{1}{2}(\beta + k_{pe}) - m_{pe} - \sqrt{\left\{ \frac{1}{2}(\beta + k_{pe}) - m_{pe} \right\}^2 - \left\{ \frac{1}{4}(\beta - k_{pe}) - \alpha^2/p' \right\}} \right\}}{\sqrt{\beta - m_{pe}}} dm_{pe} \right\} \quad (27) \end{aligned}$$

第 2 項は容易に積分でき、第 1 項の数分の一の大きさなので積分の精度がよくなる利点がある。

境 界 条 件

対辺支持の境界条件は

$$\xi = 0 \quad m_{ee} = 0 \quad (28)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \quad \frac{dm_{pe}}{d\xi} = 0$$

$$(24) \text{ から } m_{1/2} = [m_{pe}]_{\xi=1/2} = \frac{1}{2} \left\{ (\beta + k_{pe}) - \sqrt{(\beta - k_{pe})^2 - 4\alpha^2/p'} \right\} \quad (29)$$

連 続 条 件

E-E 領域と P-E 領域の境界点を ξ_1 とすると、そこではモーメントと撓み傾斜が連続でなければならないから

$$\begin{aligned} \xi = \xi_1 \quad m_{ee} = m_{pe} = m_1 \\ \frac{dw_{ee}}{d\xi} = \frac{dw_{pe}}{d\xi} \end{aligned}$$

撓み傾斜の連続は (2) 式により書きかえて

$$\xi = \xi_1 \quad \frac{dm_{ee}}{d\xi} = \frac{dm_{pe}}{d\xi}$$

(23), (24) から

$$p'(k_{ee} - k_{pe}) = \frac{\alpha^2}{\beta - m_1} - \frac{1}{2} r^2 m_1 \quad (30)$$

延 び の 条 件

撓みによる伸びは (21), (2) から

$$\varepsilon = \frac{1}{16t^2} \frac{h_2}{a^2} \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} p' - p' \xi - \frac{dm}{d\xi} \right)^2 d\xi$$

部分積分により

$$\varepsilon = \frac{1}{16t^2} \frac{h^2}{a^2} \left\{ \frac{1}{24} p'^2 - p' \int_0^{1/2} m d\xi - r^2 \int_0^{\xi_1} m^2 d\xi - a^2 \int_{\xi_1}^{1/2} \frac{m}{(\beta - m)^2} d\xi \right\} \quad (31)$$

モーメントと軸力による伸びは (18), (19) から得られる。

計算の順序

与えられた幅, 厚さ, ヤング率, 降伏点の板について, t を一定とし, この t に対する荷重, モーメント, 撓みを計算するが, その順序は次のように進める。

- (1) 与えられた t に対し, 適当な p' を仮定する。
- (2) p' に対し, k_{pe} を仮定する。
- (3) (30)式から k_{ee} を求める。
- (4) (26)式から $m_{ee}=m_1$ となる $\bar{\xi}_1$ を求める。
- (5) (29)式から $\bar{m}_{1/2}$ を計算する。
- (6) (27)式により $m_{pe}=m_1 \sim \bar{m}_{1/2}$ まで積分する。これを $\bar{\xi}_{pe}$ とする。
- (7) $\bar{\xi}_1$ と $\bar{\xi}_{pe}$ を加える。
- (8) (2) 以下の計算をくり返し, $\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_{pe} = \frac{1}{2}$ となる $\bar{k}_{pe}$ を求める。
- (9) 得られた $\bar{k}_{pe}$ と p' について $\xi \sim m$ 関係を計算する。
- (10) この ξ, m, t の関係を用い, $\varepsilon, \bar{\eta}$ を計算する。
- (11) (1) 以下の計算をくり返して $\varepsilon = \bar{\eta}$ となる p' を求める。
- (12) この p' に対する $w, \eta/\eta_0, m_{1/2}, \xi_1$ を求める。

7. 結 論

計算結果を第2表から第5表, および第6図から第10図に示す。これらの結果は降伏点 30 kg/mm^2 に対するものであり, また実験を行なっていないので確定的なことは云えないが次のようなことがわかる。

第2表

$a/R = 40$

x	p'	$P \frac{R}{cm}$	w	ξ_1	$m_{1/2}$	η/η_0
1						
2						
3	11.00	5.95	.559	.1574	.704	.329
4						
5	17.38	7.41	.759	.1041	.656	.680
6						
7	26.43	14.31	1.018	.0556	.455	1.242
8						
9	40.62	21.99	1.362	.0216	.174	2.323

第3表

$a/R = 60$

x	p'	$P \frac{R}{cm}$	w	ξ_1	$m_{1/2}$	η/η_0
1						
2						
3						
4	15.48	3.72	.873	.2001	.538	.409
5						
6	26.60	6.26	1.153	.0880	.483	.703
7	32.18	7.74	1.293	.0596	.402	.901
8	39.76	9.57	1.461	.0381	.297	1.170
9	49.78	11.98	1.683	.0210	.165	1.582

第4表

$a/R = 80$

x	p'	$P \frac{R}{cm}$	w	ξ_1	$m_{1/2}$	η/η_0
1						
2						
3						
4						
5	24.04	3.25	1.286	.1736	.433	.506
6	30.99	4.19	1.441	.1025	.416	.632
7	38.94	5.27	1.610	.0638	.360	.788
8	47.51	6.43	1.770	.0389	.274	.989
9	60.00	8.12	2.040	.0202	.158	1.319

第5表

$a/R = 100$

x	p'	$P \frac{R}{cm}$	w	ξ_1	$m_{1/2}$	η/η_0
1						
2						
3						
4						
5	28.29	2.45	1.592	.2915	.353	.501
6	36.55	3.17	1.754	.1231	.359	.609
7	45.77	3.76	1.927	.0688	.324	.736
8	56.58	4.90	2.130	.0395	.255	.911
9	69.92	6.06	2.386	.0198	.151	1.154

第 6 図 $p' \sim t$

第 7 図 $p \sim w$

第 8 図 $m^{1/2} \sim t$

第9図 $\xi_1 \sim t$ 第10図 $\eta/\eta_0 \sim t$

- (1) 対辺支持の場合中央に塑性節点を生ずるとされているが、第8図に示されるように板厚が大きくなると最大モーメントは最終塑性モーメントに近づく傾向にあるが、 $a/h=40$ の場合でも圧縮側の最大応力は降伏点以下であり、板では塑性節点を生じないと思われる。これは最終塑性モーメントに近くなると伸びが著しく大きくなり荷重は板の膜作用によつて支えられるようになるためである。
- (2) 第9図は軸力と弾性域の関係を示す。中央点の引張側の外層が降伏点に達すると、弾塑性領域は急速に拡大し、 $t=0.7$ (撓みが $a/h=40$ で $w \div 1$, $a/h=100$ で $w \div 2$) で弾性域は約 14% 存在するにすぎない。
- (3) 第10図は軸力と中心面の伸びの関係を示す。板厚が小さいときは弾性伸びと大差ないが、板厚が増すと伸びは著しく大きくなっている。

運輸技術研究所の秋田部長楠田室長から種々御意見をお聞かせ頂いたことを厚くお礼申し上げます。