(昭和 35 年 11 月造船協会秋季講演会において講演)

貨物船垂直撓み振動の解析

正員 松 浦 義 一*

An Analysis of Vertical Vibration of Cargo Ships

By Yoshikazu Matsuura, *Member*

Summary

This paper describes, firstly, an analytical method of computing the eigenvalues of vertical vibration of ships taking into account the distribution of mass, the effect of variable section and the effect of shear deflection and rotary inertia. The fundamental equation is solved by Galerkin's method in the form of numerical integration.

For 2 node vertical vibration, the virtual added mass is calculated by Lewis' or Taylor's method and by using it the computed natural frequencies are usually in good agreement with the observed frequencies. For more than 3 node vertical vibration, however, the virtual added mass calculated by Lewis' or Taylor's method results in considerable discrepancy between the computed and observed frequencies.

To explain this discrepancy the author examines the effect of local vibration of ship's bottom on the virtual added mass and obtains a reasonable correction factor for the virtual added mass.

Applying the above described method, an analysis of the vertical vibration of two actual cargo ships is shown, and the computed natural frequencies are in good agreement with the observed frequencies for 2 and 3 node vertical vibration.

緒 言

船体撓み振動の固有振動数の計算法に関しては従来多数の研究が発表されているが、その大部分は最低次の固有振動数を求める方法であつて、高次の固有振動数の計算法についてはその研究が極めて少く、現在の所では熊井教授⁽¹⁾の方法が知られており、また 4 節振動程度までの固有振動数の計算法は 2, 3 発表されているが⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾、精度の点においてまだ問題があるように思われる。

著者は船体の形状および構造上の特徴をできるだけ忠実に考慮に入れて 4 節振動程度までの固有振動数を実用上十分な精度で求め得るような計算法を見出す目的を以て、船体振動に影響をおよぼすすべての要素即ち付加水質量を含めた船体重量の分布形状、可変断面効果、船楼の影響、剪断および回転慣性の影響、付加水質量の大き等をそれぞれ適当な形で考慮に入れて貨物船の場合についてその垂直撓み振動に対して一連の解析を行つた。本論文はその解析の第 1 段階として船体撓み振動の固有値の計算法を述べ、第 2 段階として船底部の局部振動が船体の付加水質量におよぼす影響を考慮に入れ、従来の方法による付加水質量の計算値を修正することによつて船体固有振動数を算定する方法について述べたものである。

I. 船体撓み振動の固有値

§ 1. 基礎方程式およびその解法

船体のごとき複雑な可変断面効果のあるものに対しては前記のすべての要素を考慮に入れた基礎方程式を解くことは困難であるので、まず重量分布の形状と有効曲げ剛性の分布形状の 2 つの要素を考慮に入れて固有値を求め、その固有値に対して後述 (§ 3) の方法によつて剪断および回転慣性の影響を考慮した修正を行なう。

船体の 1 端に原点を採り、船の長さ方向に x 軸、垂直下方に y 軸を採り、後述 (§ 4) の方法によつて重量

原稿受付 昭和 35 年 6 月 18 日

* 大阪大学工学部

分布 m_x および断面の有効慣性モーメントの分布 I_x が与えられたものとし、船体の撓みを $y(x, t)$ とすると運動方程式は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \frac{m_x}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

となり、 $y(x, t) = y(x) \sin \omega t$ とおけば $y(x)$ に関し

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(I_x \frac{d^2 y}{dx^2} \right) - \frac{m_x \omega^2}{Eg} y = 0 \quad (2)$$

となる。船の全長を L とし、船体中央断面における I_x および m_x の値を I_0 および m_0 として

$$\xi = x/L, \quad \eta = y/L, \quad q\xi = m_x/m_0, \quad i\xi = I_x/I_0 \quad (3)$$

とおけば (2) は

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(i\xi \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right) - \Omega^2 q\xi \eta = 0 \quad (4)$$

ここに

$$\Omega^2 = \frac{m_0 L^4 \omega^2}{EI_0 g} \quad (5)$$

端末条件は $x=0$ 及び $x=L$ において $Q(x, t) = M(x, t) = 0$ となり、ここに Q および M はそれぞれ船体断面に働く剪断力および曲げモーメントであつて

$$M(x, t) = -EI_x \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{EI_0}{L} i\xi \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \sin \omega t \quad (6)$$

$$Q(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = -\frac{EI_0}{L^2} \left(i\xi \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} + \frac{di\xi}{d\xi} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right) \sin \omega t \quad (7)$$

となるから、端末条件は次式で与えられる。

$$\xi=0 \text{ および } \xi=1 \text{ に於て } \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = 0, \quad \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} = 0 \quad (8)$$

微分方程式 (4) は著者が以前に用いた近似解法⁽⁵⁾によつて解くことができる。まず (4) の解として

$$\bar{\eta} = C_0 \eta_0 + C_1 \eta_1 + C_2 \eta_2 + C_3 \eta_3 + \dots + C_n \eta_n = \sum_{i=0}^n C_i \eta_i \quad (9)$$

とおき、各項の函数として

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 &= 1, \quad \eta_1 = \xi - \frac{1}{2}, \\ \eta_i &= \alpha_i (\sin s_i \xi + \sinh s_i \xi) + \cos s_i \xi + \cosh s_i \xi \\ \text{ここに } \alpha_i &= \frac{\sin s_i + \sinh s_i}{\cos s_i - \cosh s_i} = \frac{\cos s_i - \cosh s_i}{\sinh s_i - \sin s_i} \end{aligned} \right\} \quad (i=2, 3, \dots, n) \quad (10)$$

を採用する。 η_i は剪断の影響を無視した場合の両端自由一様断面梁の normal 函数であつて⁽⁶⁾、 $\bar{\eta}$ は端末条件 (8) を完全に満足する。尚 s_i は $\cos s \cosh s = 1$ の根であつて、 $i=2, 3, 4, 5, 6$ に対する s_i および α_i は Table 1 に示すとき値となる。

さて $\bar{\eta}$ の各項の係数 C_i を定めるため

Table 1 s_i および α_i

i	2	3	4	5	6
s_i	4.7300407	7.8532046	10.995608	14.137165	17.278760
α_i	-0.9825022	-1.0007773	-0.9999665	-1.0000015	-0.9999999

Galerkin 法⁽⁷⁾を用いると次の $n+1$ 個の条件式が得られる。

$$\int_0^1 \left[\frac{d^2}{d\xi^2} \left(i\xi \frac{d^2 \bar{\eta}}{d\xi^2} \right) - \Omega^2 q\xi \bar{\eta} \right] \eta_i d\xi = 0 \quad (i=0, 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

そこで (9) より

$$\frac{d^2 \bar{\eta}}{d\xi^2} = \sum_{j=2}^n C_j s_j^2 \zeta_j \quad (12)$$

ここに

$$\zeta_j = \alpha_j (-\sin s_j \xi + \sinh s_j \xi) - \cos s_j \xi + \cosh s_j \xi \quad (13)$$

となり、 ζ_j は normal 函数⁽⁸⁾となるから (11) の中の $i\xi \frac{d^2 \bar{\eta}}{d\xi^2}$ は次式の如く展開される。

$$i\xi \frac{d^2 \bar{\eta}}{d\xi^2} = \sum_{j=2}^n C_j s_j^2 i\xi \zeta_j \equiv \sum_{j=2}^n K_j \zeta_j \quad (14)$$

ここに K_j は次のようにして定められる定数である。即ち

$$\int_0^1 \eta_j^2 d\xi = \int_0^1 \zeta_j^2 d\xi = 1, \quad \int_0^1 \eta_j \eta_m d\xi = \int_0^1 \zeta_j \zeta_m d\xi = 0 \quad (j \neq m) \quad (15)$$

となることを用いると、 K_j は次の如くなる。

$$K_j = \frac{1}{\int_0^1 \zeta_j^2 d\xi} \sum_{m=2}^n C_m s_m^2 \int_0^1 i\xi \zeta_j \zeta_m d\xi = \sum_{m=2}^n C_m s_m^2 \alpha_{jm} \quad (j=2, 3, \dots, n) \quad (16)$$

$$\text{ただしここに} \quad \alpha_{jm} = \alpha_{mj} = \int_0^1 i\xi \zeta_j \zeta_m d\xi \quad (j, m=2, 3, \dots, n) \quad (17)$$

したがって (16) を (14) に代入して

$$i\xi \frac{d^2 \bar{\eta}}{d\xi^2} = \sum_{j=2}^n \sum_{m=2}^n C_m s_m^2 \alpha_{jm} \zeta_j \quad (18) \quad \therefore \frac{d^2}{d\xi^2} \left(i\xi \frac{d^2 \bar{\eta}}{d\xi^2} \right) = \sum_{j=2}^n \sum_{m=2}^n C_m s_m^2 S_j^2 \alpha_{jm} \eta_j \quad (19)$$

が得られ、ここに η_j は既に (10) によつて与えたものである。

さて (9) および (19) を (11) に代入すると

$$\int_0^1 \left[\sum_{j=2}^n \sum_{m=2}^n C_m s_m^2 s_j^2 \alpha_{jm} \eta_j - \Omega^2 q\xi \left\{ C_0 + C_1 \eta_1 + \sum_{m=2}^n C_m \eta_m \right\} \right] \eta_i d\xi = 0 \quad (i=0, 1, 2, \dots, n) \quad (20)$$

そこで今 (20) における定積分の項をそれぞれ

$$\int_0^1 q\xi \eta_i \eta_m d\xi = R_{im}, \quad \int_0^1 q\xi \eta_i d\xi = S_i, \quad \int_0^1 q\xi \eta_i \eta_1 d\xi = T_i \quad \left(\begin{matrix} i=0, 1, 2, \dots, n \\ m=2, 3, \dots, n \end{matrix} \right) \quad (21)$$

とおき、(15) の関係を考慮に入れると (20) は結局次式の形で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} i=0, 1 \text{ の時} & \quad \sum_{m=2}^n C_m R_{im} + C_0 S_i + C_1 T_i = 0 \\ 2 \leq i \leq n \text{ の時} & \quad \sum_{m=2}^n C_m (s_m^2 s_i^2 \alpha_{im} - \Omega^2 R_{im}) - \Omega^2 C_0 S_i - \Omega^2 C_1 T_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

これが振動数方程式に相当するものであつて、これより 2, 3, ..., n 節振動の固有値 Ω が求められ、それぞれの Ω に対応して (9) に含まれる各項の係数 C_i の間の関係が定まり、各節振動の撓み曲線の形が求められる。

§ 2. 船体撓み振動の実用的解法

普通の貨物船において、その固有振動数のみを求める場合には、次のごとき考察によつて前節の計算法をかなり簡単化した実用的解法を導くことができる。すなわち特殊な場合を除き一般の貨物船においては $q\xi$ および $i\xi$ の形は船体中央に関して対称に近い形状となるのが普通であるから、Prohaska⁽⁹⁾ により、 $q\xi$ および $i\xi$ が対称に近い場合はその前後半部の平均を採つて対称分布におきかえても結果におよぼす影響はほとんど無視できる程度のものとなる。

したがって対称分布に修正された重量分布および有効慣性モーメントの分布形状を改めて $q\xi$ および $i\xi$ とすると前述の α_{im} , R_{im} , S_i , T_i は

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{im} &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} i\xi \zeta_i \zeta_m d\xi \quad (i, m=2, 3, \dots, n), \quad R_{im} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} q\xi \eta_i \eta_m d\xi \quad \left(\begin{matrix} i=0, 1, 2, \dots, n \\ m=2, 3, \dots, n \end{matrix} \right), \\ S_i &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} q\xi \eta_i d\xi, \quad T_i = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} q\xi \eta_i \eta_1 d\xi \quad (i=0, 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

となり、対称性より $S_i = 0$ ($i=1, 3, 5, \dots$), $T_i = 0$ ($i=0, 2, 4, 6, \dots$), $\alpha_{im} = R_{im} = 0$ ($i+m$ が奇数の時) となりまた振動数方程式 (22) は C_0 および C_1 を消去した形で次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} i=2, 4, 6, \dots \text{の時} & \quad \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^n C_m \left[s_m^2 s_i^2 \alpha_{im} - \Omega^2 \left(R_{im} - \frac{S_i R_{0m}}{S_0} \right) \right] = 0 \\ i=3, 5, 7, \dots \text{の時} & \quad \sum_{m=3, 5, 7, \dots}^n C_m \left[s_m^2 s_i^2 \alpha_{im} - \Omega^2 \left(R_{im} - \frac{T_i R_{1m}}{T_1} \right) \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

(24) の第 1 式は偶数節振動, 第 2 式は奇数節振動に対するものである。これらより C_i が同時に 0 でない根を有するための条件として係数行列式を 0 とおいた式を Ω^2 に関して解けば固有値が求められる。 α_{im} , R_{im} , S_i および T_i の計算は Simpson の公式による数値積分で求められる。 $\xi=0\sim 0.5$ の間を 20 等分した各分点における $\xi i_{\xi m}$, $\eta i_{\eta m}$ 等の函数値を Table 2 に示す。

なお 4 節程度までの固有値を求めるには $\bar{\eta}$ は 7 項すなわち $n=6$ まで採れば精度は十分満足できるものとなり、2~6 節における固有値の誤差は 0.02~0.2% であつて実用的には十分正確である。2 隻の貨物船山春丸および s.s. Ocean Vulcan について上述の方法で求めた Ω の値を Fig. 1 に示す。(§ 10 および § 11 参照)

Fig. 1 貨物船における Ω の実例

§ 3. 剪断および回転慣性の影響を考慮に入れた船体振動の固有値

一樣断面梁の場合に剪断の影響を考慮すれば、基礎方程式 (4) に相当する式は

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} + \beta\Omega^2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \Omega^2\eta = 0 \quad (25)$$

$$\text{ここに } \beta = \frac{EI_0}{A_0GL^2}, \quad \Omega^2 = \frac{m_0L^4\omega^2}{EI_0g} \quad (26)$$

となる⁽⁶⁾。ここで A_0 は剪断に対する有効断面積, β は剪断の影響を示すパラメータ, Ω は固有値であつて、両端自由の場合の振動数方程式は次式で与えられる⁽⁶⁾。

$$\beta\Omega \sin p \sinh q + 2(\cos p \cosh q - 1) = 0 \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } p &= \sqrt{\frac{\beta\Omega^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta\Omega^2}{2}\right)^2 + \Omega^2}}, \\ q &= \sqrt{-\frac{\beta\Omega^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta\Omega^2}{2}\right)^2 + \Omega^2}} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

つぎに剪断および回転慣性の影響を同時に考慮する

時は基礎方程式は次式で与えられる⁽⁶⁾。

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} + \left\{ \beta + \left(\frac{r}{L} \right)^2 \right\} \Omega^2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \Omega^2 \left\{ 1 - \left(\frac{r}{L} \right)^2 \beta \Omega^2 \right\} \eta = 0 \quad (29)$$

ここに r は所謂断面の回転半径を示す。(29) の左辺第 3 項の $\left\{ \right\}$ 内の $\left(\frac{r}{L} \right)^2 \beta \Omega^2$ は普通の船体構造では 4 節振動程度までならば 1 に比べて十分小となるのでこの項を無視すれば (29) は

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} + \beta_1\Omega^2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \Omega^2\eta = 0 \quad (30)$$

$$\text{ただし } \beta_1 = \beta + \left(\frac{r}{L} \right)^2 \quad (31)$$

となり、(25) と同型の方程式となる。従つて剪断および回転慣性の影響を同時に考慮した場合の結果は前の結果において β の代りに β_1 を用いることによつて直ちに求められる。

さて船体振動に対する剪断および回転慣性の影響については次のごとき考察によりその影響を算定する。後述 (§ 4) のごとく船体の場合は剪断に対する有効断面積は船の長さ方向には余り変化がなく近似的には一樣と考えることができるから、船体中央断面と同一の断面を有し船体と同じ長さをもつ一樣断面梁を考え、これの β_1 に対する固有値 Ω_i と剪断および回転慣性を無視した場合 ($\beta_1=0$) の固有値 $\bar{\Omega}_i$ との比 $c_i = \Omega_i / \bar{\Omega}_i$ ($i=2, 3, 4$) を求め、この c_i を船体振動の固有値に対する修正係数とする。普通の貨物船では β_1 の値は 0.01 前後の値となる。 $\beta_1=0.005\sim 0.02$ の範囲で 2~4 節振動に対して (27) によつて c_i を求めると Fig. 2 のごとくなる。従つて船体撓み振動の固有値は前節の方法で得た Ω_i を修正して $c_i\Omega_i$ として与えられる。なお上記の β_1 を以

Fig. 2 固有値修正係数 c_i

が、 E の値は構造用鋼材の標準の値 $E=2.1 \times 10^7 \text{ t/m}^2$ を用いる。

遮浪甲板型または平甲板型の貨物船の場合は上記の計算基準により直ちに船体各断面の断面慣性モーメント I_m が求められる。ただし甲板室はほとんど有効には効かないから、強力甲板以下について求めた I_m を有効慣性モーメントとする。

Fig. 3 船楼が完全に有効に働く長さの範囲 $2z/l$

後相当剪断係数と呼ぶ。

§ 4. 重量分布 g_i , 有効慣性モーメント分布 i_i および相当剪断係数 β_1 について

(1) 重量分布 g_i

排水量 Δ に相当する重量の分布は従来の方法で求める。付加水質量は振動の回数によって変化し、従つて (2) に含まれる m_m は各節振動において変化する。しかしながら固有値に関係するのは m_m の分布形状即ち q_i であり、また特殊な載貨状態を除いては船体重量 Δ の分布形状と付加水質量の分布形状とは比較的似かよつた形となるから、2~4 節振動の範囲では付加水質量の絶対値が多少変化しても q_i には余り影響はない。従つてここでは q_i は 2~4 節振動で同一のものを次のように定める。すなわち船体重量 Δ と 2 次元運動として求めた付加水質量 Δ' の合計重量 $\Delta + \Delta'$ の分布より q_i を定める。 Δ' は Lewis⁽¹⁰⁾ または Taylor⁽¹¹⁾⁽¹²⁾ の方法によつて求められる。

(2) 船体の有効断面慣性モーメントおよびその分布 i_i

船体の断面慣性モーメントの算定は縦強度計算の場合に準じて行なう。なお固有振動数 N の算定には曲げ剛性 EI の形で現われる

三島型貨物船の場合には船楼の効果を考慮した有効慣性モーメント I_m を求める必要がある。船楼の影響については振動時の船体の曲げモーメント分布を仮定し、Bleich⁽¹³⁾ の理論を適用して船楼の有効性を調べた結果、2~4 節振動の範囲内では断面有効曲げ剛性は振動の回数によつてほとんど変わらないことが判つたので⁽¹⁴⁾、これらの結果より有効断面慣性モーメントの算定法として付録 1 に示す方法を得た。この適用法を要約すると船楼の長さ l 、船楼と主構造の間のバネ定数 K 、船楼および主構造をそれぞれ単独の梁とみなしたときの各々の断面慣性モーメント I_1 , I_2 、中性軸の位置を示す係数 α_1 , α_2 および係数 μ (以上付録 1 参照) および弾性係数 E によつて定まる量

$$u = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{K}{4E} \frac{1+\mu}{\alpha_2 I_1 + \mu \alpha_1 I_2}} \quad (32)$$

が求まると Fig. 3 によつて船楼が完全に有効に(す

なわち主構造と一体の梁として) 働く長さの範囲 $2z/l$ が求められる。この範囲から外側では船楼端に向つて有効慣性モーメントは減少し主構造の I_2 の値に連続する。

なお船楼甲板上的甲板室は普通の貨物船ではその有効性が非常に小さいことが確かめられたので⁽¹⁴⁾, 断面慣性モーメントには甲板室は考慮に入れない。以上により船体各断面の有効慣性モーメントが得られると, (3) によつて i_2 が定まる。

(3) 相当剪断係数 β_1

(a) 剪断に対する有効断面積 A_0

(26) に示した β を求めるには剪断に対する有効断面積 A_0 を求める必要がある。熊井教授⁽¹⁾, Johnson⁽²⁾等によれば普通の船体構造では垂直撓み振動の場合には剪断に対する有効断面積は船の長さ方向に略々一定と考えてよい。著者においても 2, 3 の実船につき A_0 の分布を調べた結果同様な結論を得たので⁽¹⁵⁾, これらの結果を実船に適用できる形にまとめると貨物船の場合 A_0 は次の略算法で求められる。すなわち船体中央断面において Hovgaard⁽¹⁶⁾と類似の方法により, 船側外板, 縦通隔壁等の甲板間高さ以上の深さをもつ縦通部材のみの合計断面積 A_0 を以て $A_0 = A_0$ とすれば実用上十分よい近似値が得られる。

したがつて遮浪甲板型および平甲板型貨物船並に短い船楼をもつ三島型貨物船では上甲板以下の断面について上述の A_0 を求めて $A_0 = A_0$ とすればよい。長船橋楼 (0.4L 程度) をもつ三島型貨物船の場合は船楼が曲げに對して有効に働く長さがかかなり大となるので, A_0 の値としては上甲板以下を考えたときの A_0 と船橋楼甲板以下を考えたときの A_0 の平均値を採つてこれを A_0 とすればよい。

(b) 回転慣性

(31) に示した $(r/L)^2$ の値を求めるには船体断面の回転半径 r を求める必要がある。船体中央断面における船の長さ方向単位長さ当りの船体重量を m_0' とし, 曲げの中性軸まわりの重量慣性モーメントを J_0 とすると

$$r^2 = J_0 / m_0' \quad (33)$$

となる。 $(r/L)^2$ の大きさは普通の貨物船では β の約 1/10 程度の値となる。

以上により相当剪断係数は $\beta_1 = \beta + (r/L)^2$ として与えられる。

II. 付加水質量および船体固有振動数

§ 5. 船底の強制振動

船体の付加水質量は Lewis⁽¹⁰⁾ 又は Taylor⁽¹¹⁾⁽¹²⁾ の方法によつて求められ, 2 節振動ではこれによつて船体固有振動数が可成正確に算定される。しかし 3 節以上ではこれらの方法による付加水質量では, Richards⁽⁹⁾ も述べているように固有振動数の実測値と計算値の間に可成の差を生じ, 計算値は常に実測値より大となる。このような誤差の生ずる原因に対する 1 つの説明として, 垂直撓み振動の際船底が強制振動を受けることを考慮に入れると船底部が水に与える運動エネルギーが従来計算値より大となり, 見掛け上付加水質量が増加するとして説明される。

船底の振動は厳密には平面格子構造として考えるべきであるが, ここでは簡単のため船底構造を横方向に切出した単位幅を持つ 1 つの梁におきかえ, これを以後船底相当梁と呼び, その曲げ剛性 EI_e は後述 (§ 8) の方法によつて算定する。

今, 相当梁を一樣断面で両端単純支持と考へ*, 端末で $y \sin \omega t$ なる強制変位を受けるとすれば, 運動方程式は Fig. 4 に示すように梁と共に動く座標系 x, y_1 について次のごとく与えられる。すなわち相当梁の断面慣性モーメントを I_e , 付加水質量を含めた梁の単位長さ当りの重量を m , 梁と共に動く座標系に対する梁の撓みを y_1 とし, 簡単のため減衰を無視するときは

Fig. 4

$$EI_e \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + \frac{m}{g} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = \frac{ym}{g} \omega^2 \sin \omega t \quad (34)$$

となる。ここに y は端末における強制変位の片振幅, ω はその円振動数でこれらは船体振動の片振幅および円振動数に等しい。強制振動を考へ今 $y_1(x, t) = y_1(x) \sin \omega t$ とおけば (34) は

* 普通の横肋骨方式の貨物船の横強度より類推して, 船底部を両端支持梁とみなすことは実用的には差し支えないものと考えられる。

$$\frac{d^4 y_1}{dx^4} - \beta^4 y_1 = \beta^4 y \quad (35) \quad \text{ここに} \quad \beta^4 = \frac{m\omega^2}{EI_{eg}} \quad (36)$$

となり (35) の一般解は次式の如くなる。

$$y_1 = A \sin \beta x + B \cos \beta x + C \sinh \beta x + D \cosh \beta x - y \quad (37)$$

端末条件として $x=0$ および $x=l$ において $y_1 = d^2 y_1 / dx^2 = 0$ とすれば相当梁の振動撓み曲線 y_1 は

$$y_1(x, t) = \frac{y}{2} \left[\frac{1 - \cos \beta l}{\sin \beta l} \sin \beta x + \cos \beta x + \frac{1 - \cosh \beta l}{\sinh \beta l} \sinh \beta x + \cosh \beta x - 2 \right] \sin \omega t \quad (38)$$

これより相当梁の振動速度 $v_1(x, t) = \partial y_1(x, t) / \partial t$ は

$$v_1(x, t) = \frac{y\omega}{2} \left[\frac{1 - \cos \beta l}{\sin \beta l} \sin \beta x + \cos \beta x + \frac{1 - \cosh \beta l}{\sinh \beta l} \sinh \beta x + \cosh \beta x - 2 \right] \cos \omega t \quad (39)$$

となる。 βl がこの梁の固有値 $\beta_0 l = n\pi$ ($n=1, 2, 3, \dots$) に等しくなるとき共振の状態となる。

§ 6. 船底の強制振動が船体の付加水質量におよぼす影響

船体が垂直撓み振動をするとき、船底相当梁の振動速度は船体の振動速度 $v = \partial y / \partial t$ より (39) による v_1 なる量だけ大となり $v + v_1$ となる。 $v + v_1$ は相当梁の長さ方向に変化するが、水を持つ運動エネルギーは与えられた速度の2乗に比例することにより、次のごとく簡単化すなわち相当梁の撓み振動をこれと等しい運動エネルギーを持つような並進振動におきかえて考えることができる。その並進振動の速度 $\bar{v}$ は

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{l} \int_0^l (v + v_1)^2 dx \quad (40)$$

を満足するものとなり、従つて水に与える運動エネルギーの点では両者は近似的に等価とみなし得る。ゆえに (39) により速度の最大振幅について考えると

$$v + v_1 = \frac{y\omega}{2} \left[\frac{1 - \cos \beta l}{\sin \beta l} \sin \beta x + \cos \beta x + \frac{1 - \cosh \beta l}{\sinh \beta l} \sinh \beta x + \cosh \beta x \right] \quad (41)$$

であるから、(41) を (40) に代入し、且つ $y\omega = v$ を考慮すると $\bar{v}^2$ は次式のごとくになる。

$$\bar{v}^2 = \frac{v^2}{4\beta l \sin^2 \beta l \sinh^2 \beta l} \{ (1 - \cos \beta l)(\beta l + 3 \sin \beta l) \sinh^2 \beta l + (\cosh \beta l - 1)(\beta l + 3 \sinh \beta l) \sin^2 \beta l \} \quad (42)$$

そこで今 $\bar{v}/v = K$ とおき、船底の振動速度を $\bar{v} = Kv$ とすれば、水の運動エネルギーはその殆んど大部分が船底の flat な部分から与えられる速度によると考えてもよいから、周囲の水を持つ実際の運動エネルギーは従来の如く船体の振動速度 v に対して求めたものの K^2 倍となる。 K^2 は (42) により次式で与えられる。

$$K^2 = \frac{(1 - \cos \beta l)(\beta l + 3 \sin \beta l) \sinh^2 \beta l + (\cosh \beta l - 1)(\beta l + 3 \sinh \beta l) \sin^2 \beta l}{4\beta l \sin^2 \beta l \sinh^2 \beta l} \quad (43)$$

Fig. 5 K^2 の値 (付加水質量修正係数)

したがつて船体の付加水質量は従来の計算値の K^2 倍となる。(43) により K^2 の値を βl の変化に対して求めたものを Fig. 5 に示す。

§ 7. 船体の付加水質量および固有振動数の算定

船体垂直撓み振動の付加水質量はまず、すでに求めた2次元運動と考えた場合の Δ' に3次元運動修正係数 J を掛ける。 J の値は Lewis⁽¹⁰⁾ によるものでは撓み振動をする梁の断面がその中性軸周りに回転することによる影響を無視して求められているので、その影響の程度を調べるため Lewis の取扱つた回転楕円体の場合につき上述の断面の回転をも考慮し

$$y_c = \alpha(z) \eta^{(e)} \quad (48)$$

ここに $\alpha(z)$ は centre girder 上の位置 z によって変る係数 (普通の貨物船の船底構造では $0 \leq \alpha(z) < 1$) である。一方、横方向に平行に配置された多数の単独梁群を考え同じ荷重条件に対して各単独梁の最大撓みがそれぞれの位置での y_c に等しくなるようにすればこの平行梁群によつて格子構造の撓みが近似的に表わされる。その時各単独梁の持つべき断面慣性モーメント I_z は次式のごとくなる。

$$I_z = I_f / \alpha(z) \quad (49)$$

さて前述の船底相当梁を (49) の中から選ぶのであるが、それには §6 において行なつたように水の持つ運動エネルギーは与えられた速度の 2 乗に比例することを考慮すれば、上のごとく置きかえた平行単独梁の中から、それらの平均運動エネルギーに等しい運動エネルギーを持つような梁を採つて船底相当梁とすることができる。このような条件を満たす単独梁を見出すには centre girder 上での y_c の 2 乗平均を求める必要があるが、ここでは簡単のため、 y_c の最大値 y_{cmax} と y_c の平均値 $\bar{y}_c$ を求めておき、その最大撓みが y_{cmax} と $\bar{y}_c$ の平均値に等しくなるような単独梁を以て船底相当梁と考えることにする*。従つてその最大撓みが夫々 y_{cmax} および $\bar{y}_c$ に等しい単独梁の断面慣性モーメントを I_{min} および $\bar{I}$ とすると (48) により $y_{cmax} = \alpha_{max} \eta^{(e)}$ 及び $\bar{y}_c = \bar{\alpha} \eta^{(e)}$ となり、(49) によつて $I_{min} = I_f / \alpha_{max}$, $\bar{I} = I_f / \bar{\alpha}$ となるから、求める単独梁の I は両者の平均を採つて

$$I = \frac{1}{2} (I_{min} + \bar{I}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_{max}} + \frac{1}{\bar{\alpha}} \right) I_f \quad (50)$$

となる。§5 で取扱つた相当梁は単位幅の梁であるから、船底相当梁の断面慣性モーメント I_e は次式のごとくになる。

$$I_e = \frac{I}{e} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_{max}} + \frac{1}{\bar{\alpha}} \right) \frac{I_f}{e} \quad (51)$$

なお上式中の α_{max} および $\bar{\alpha}$ の値は付録 3 により求められる。

一方格子構造としての船底の固有振動数を調べるため、奥田、有馬両氏⁽¹⁸⁾ による防撓材付矩形板の固有振動数の算定式が適用できるものとしてこれによつて求めた船底の固有振動数と、上述の船底相当梁の固有振動数とを実船の場合について比較した結果両者が略々一致することが確かめられ、船底構造を相当梁におきかえた近似理論の成立つことが確かめられた。 $L=130$ m 前後の普通の貨物船では船底の固有振動数は付加水質量を考慮に入れて $N=300$ c/min 前後の値となる。

つぎに船底の振動に対する付加水質量は鬼頭氏⁽¹⁹⁾ の方法を応用して付録 4 に示すごとくになる。その結果より相当梁の全長 l に対する付加水質量 M_1' は次式によつて与えられる。

$$M_1' = 2.8677 \rho l^3 \sum_{n=1}^{18} \frac{a_n^2}{\sqrt{n + 9 \left(\frac{l}{l_1} \right)^2}} \quad (52)$$

ここに l = 船の型幅, l_1 = 横隔壁間の距離, ρ = 流体の密度であつて a_n^2 は Table 3 に示す係数である。船底部の鋼材重量より相当梁の自重 W_1 , パラスト, 載貨のある場合は夫々の重量 $W_2, W_3, \dots$ 等を求め, M_1' 及び

Table 3 a_n^2 の値

n	1	3	5	7	11	13
a_n^2	0.1710	0.1111	0.0428	0.0068	0.0009	0.0004

注: $n = 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16$ の時 $a_n^2 = 0$

これらの合計より相当梁の単位長さ当りの見掛けの重量 m が求められる。

III. 実船における解析例

§9. 解析を行なつた実船の要目

解析を行なつた 2 隻の貨物船の主要項目および試験時の状態を Table 4 に示す。山春丸は G.T. 7150t 型の長船橋楼を有する三島型貨物船であつて日立造船技術研究所広渡氏の御厚意により本船の解析に必要な資料が提

* (36) に与えたように β は $1/I_e$ に逆比例するから、 I_e の値の少々の変化によつて β の値はほとんど変化しないので、上述のごとく相当梁の I_e の算定に幾分荒い近似を用いてもその影響は極めて小さい。

Table 4 船体主要項目および試験時の状態

船名	主 要 項 目				試験時の状態	
	全長 L	重線間長 L_{BP}	型巾 B	型深 D	吃水 d	排水量 Δ
山 春 丸 (軽荷)	143.28 m	134.00 m	18.00 m	10.50 m	3.57 m	5804 t
Ocean Vulcan (軽荷)	134.569 m	126.797 m	17.342 m	11.379 m	4.331 m	6745 t
Ocean Vulcan (満載)	(441'-6")	(416'-0")	(56'-10 $\frac{3}{4}$ ")	(37'-4")	8.458 m	13790 t

供された。なお本船の実験結果の詳細は広渡氏の論文⁽²⁰⁾に発表されている。s. s. Ocean Vulcan は Johnson⁽²⁾ によつてその実験結果が発表されている全溶接の遮浪甲板型貨物船であつて、ここで解析を行なつたのはその一連の実験の中の Series 7 (軽荷状態) および Series 11 (満載状態) についてである。

§ 10. 山春丸の解析 (軽荷状態)

§ 4(2)の方法によつて求めた有効断面慣性モーメントの分布形状 $i\xi$ を Fig. 9 に示す。図中実線で示したものは船楼の有効性を考慮に入れて求めたもので、点線は船楼が全長にわたつて有効に働くとして普通の方法で求めたものを示す。本船は長船橋楼を有するので、船楼が完全に有効に働く部分の長さはかなり大となる。すなわち(32)により $u=6.813$ となり、Fig. 3 より $2\bar{z}/l=0.654$ を得、船橋楼は中央部の 65.4% の範囲で完全に有効に働く。なお船体中央断面における有効慣性モーメント I_0 および剪断に対する有効断面面積 A_0 はそれぞれ

$$I_0=39.4164 \text{ m}^4, A_0=0.391 \text{ m}^2$$

となる。次に付加水質量を含めた船体重量の分布形状 $q\xi$ は § 4(1)の方法に従つて Fig. 10 に示すごとくになる。喫水 d 、排水量 Δ および 2 次元運動として求めた付加水質量 Δ' はそれぞれ次のごとくである。

$$d=3.57 \text{ m}, \Delta=5804 \text{ t}, \Delta'=13637 \text{ t}$$

剪断の影響を示す β は (26) により、回転慣性の影響を示す $(r/L)^2$ は (33) により、相当剪断係数 β_1 は (31) によりそれぞれ

$$\beta=0.0128, (r/L)^2=0.00114, \beta_1=0.0139$$

となる。Fig. 9 および Fig. 10 の $i\xi$ および $q\xi$ を船体中央に関し対称分布となるよう前後半部を平均し、

Table 5 α_{im} ($i, m=2, 3, 4, 5, 6$)

$i \backslash m$	2	4	6
2	0.932616	-0.138425	-0.030012
4	-0.138425	0.688304	-0.197400
6	-0.030012	-0.197400	0.667874

Table 6 R_{im} ($i=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; m=2, 3, 4, 5, 6$)

$i \backslash m$	2	4	6
0	-0.338180	0.060597	0.013164
2	0.418412	-0.254115	0.002841
4	-0.254115	0.489350	-0.252277
6	0.002841	-0.252277	0.505734

Table 7

S_i および T_i

($i=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$)

i	S_i
0	0.512250
2	-0.338180
4	0.060597
6	0.013164
i	T_i
1	0.017950
3	0.064356
5	-0.006469

Fig. 9 山春丸の断面有効慣性モーメントの分布形状 $i\xi$ Fig. 10 山春丸の付加水質量を含めた船体重量分布形状 $q\xi$

Table 2 を用いて (23) により α_{im} , R_{im} , S_i , T_i を求めると Table 5, 6, 7 に示す値が得られる。Table 5, 6, 7 および Table 1 を用い (24) によつて振動数方程式を作ると次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} i=2: & C_2(466.834-0.195151\Omega^2)+C_4(-374.440+0.214110\Omega^2) \\ & +C_6(-200.470-0.011532\Omega^2)=0 \\ i=4: & C_2(-374.440+0.214110\Omega^2)+C_4(10061.4-0.482182\Omega^2) \\ & +C_6(-7125.43+0.253834\Omega^2)=0 \\ i=6: & C_2(-200.470-0.011532\Omega^2)+C_4(-7125.43+0.253834\Omega^2) \\ & +C_6(59531.2-0.505396\Omega^2)=0 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$$\left. \begin{aligned} i=3: & C_3(2943.37-0.227291\Omega^2)+C_5(-2474.49+0.232244\Omega^2)=0 \\ i=5: & C_3(-2474.49+0.232244\Omega^2)+C_5(27340.8-0.497286\Omega^2)=0 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

(53) および (54) につき係数行列式を 0 とおいた式を作ると

$$\left. \begin{aligned} \text{偶数節: } & \Omega^6-244414.4\Omega^4+85276661\times 10^2\Omega^2-18925409\times 10^6=0 \\ \text{奇数節: } & 0.05909135\Omega^4-6528.6436\Omega^2+74350989=0 \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

これを解いて Ω^2 を求め、2~6 節振動に対する Ω が次のごとく得られる。(Fig. 1 参照)

$$\Omega_2=48.786, \Omega_3=113.55, \Omega_4=198.21, \Omega_5=312.40, \Omega_6=450.37$$

Table 8 山春丸の固有値 (軽荷)

次数 i	Ω_i	c_i	固有値 $c_i\Omega_i$
2 節振動	48.79	0.924	45.08
3 節振動	113.5	0.779	88.49
4 節振動	198.2	0.649	128.6

さきに求めた $\beta_1=0.0139$ に対して Fig. 2 により固有値修正係数 c_i を求めると Table 8 のごとくなり、固有値は $c_i\Omega$ として 2~4 節振動に対し Table 8 のごとくなる (Fig. 15 参照)。

つぎに船底相当梁の I_e および m を求めるため、船底を構成する各部材の断面慣性モーメントを求めて $I_f=0.00900$

m^4 , $I_c=0.04529m^4$, $I_s=0.04376m^4$ を得、付録 3 の方法により

$$y_{c\max}=0.35992\eta^{(c)}, \bar{y}_c=0.23171\eta^{(c)}$$

が得られる。従つて船底相当梁の I_e は (51) により $e=0.72m$ として

$$I_e=0.04434m^4/m$$

となる。船底相当梁の付加水質量 M_1' は (52) により $M_1'=100.88t/m$, 相当梁の自重は $W_1=5.53t/m$ となり、本船は載貨、バラスト共に無く、従つて船底相当梁の単位長さ当りの見掛けの重量 m は次のごとくなる。

$$m=5.912t/m^2$$

さて (43) 式中の βl は (36) により

$$\beta l = l \sqrt{\frac{m\omega^2}{EIeg}} \quad (56)$$

であるから、上に得られた数値を用い

$$\beta l = 0.5107\sqrt{\omega} \quad (a)$$

となり、(a) と Fig. 5 により船底相当梁の $K^2-\omega$ 曲線が Fig. 11 のごとくなる。次に船体振動の $K^2-\omega$ 曲線を求めるため、先ず Fig. 6 により $L_{BP}/B=7.44$ として $J_2=0.746$, $J_3=0.664$ を得るから既に得た値を用いて (47) により

$$2 \text{ 節: } K_2^2 = \frac{1}{10173} \left(\frac{2870870}{\omega^2} - 5804 \right), \quad 3 \text{ 節: } K_3^2 = \frac{1}{9055} \left(\frac{11061900}{\omega^2} - 5804 \right)$$

が得られる。これより $K^2-\omega$ 曲線を作ると Fig. 11 のごとくなる。

Fig. 11 における各 $K^2-\omega$ 曲線の交点の座標として

Fig. 11 山春丸 $K^2-\omega$ 曲線 (軽荷状態)

$$2 \text{ 節} : K_2^2 = 1.210, \omega_2 = 12.58/\text{sec} \quad 3 \text{ 節} : K_3^2 = 1.970, \omega_3 = 21.63/\text{sec}$$

が得られ、これより付加水質量は $K^2 J \Delta'$ として

$$2 \text{ 節} : K_2^2 J_2 \Delta' = 12310 \text{ t} \quad 3 \text{ 節} : K_3^2 J_3 \Delta' = 17840 \text{ t}$$

となる。付加水質量を含めた船体重量 Δ_1 は 2 節 : $\Delta_1 = 18110 \text{ t}$, 3 節 : $\Delta_1 = 23640 \text{ t}$ となり, Δ_1/Δ の比は 2 節および 3 節に対しそれぞれ 3.12 および 4.07 となる。

船体固有振動数は $N = 60 \omega / 2\pi$ (c/min) として

$$2 \text{ 節} : N_2 = 120.1 \text{ c/min} \quad 3 \text{ 節} : N_3 = 206.5 \text{ c/min}$$

となり、これに対し実測値は $N_2 = 120 \text{ c/min}$, $N_3 = 205 \text{ c/min}$ であつて計算値と実測値はよく一致する。

§ 11. Ocean Vulcan の解析 (軽荷および満載状態)

Johanson⁽²⁾ によつて発表された資料にもとづき Ocean Vulcan の軽荷および満載状態について山春丸と同様にして解析を行なつた結果を示すと次のごとくなる。

i_ξ および軽荷および満載状態の q_ξ はそれぞれ Fig. 12, 13, 14 に示すごとくになり、船体中央断面における有効慣性モーメント I_0 および剪断に対する有効断面積 A_0 はそれぞれ

$$I_0 = 25.1342 \text{ m}^4, A_0 = 0.3794 \text{ m}^2$$

2 次元運動として求めた付加水質量 Δ' は

$$\text{軽荷} : \Delta' = 12726 \text{ t}, \text{満載} : 15452 \text{ t}$$

となる。剪断の影響を示す β は $\beta = 0.00951$ となり、回転慣性については本船は軽荷状態では 2 重底内にバラストを有するが艙内貨物はなく、満載状態では艙内貨物を有するが 2 重底内にはバラストがなく、艙内貨物の種類、載貨状態および正確な重量が不明であつたので、 $(r/L)^2$ の値としては軽荷状態のものを共通に用い $(r/L)^2 = 0.00097$ とした。従つて相当剪断係数 β_1 は軽荷および満載状態に対し $\beta_1 = 0.0105$

を用いた。以上の資料より前と同様にして振動数方程式を作り、これを解いて 2~6 節振動に対する Ω が次のごとくなる (Fig. 1 参照)。

$$\text{軽荷} : \Omega_2 = 43.900, \Omega_3 = 109.68, \Omega_4 = 201.75,$$

$$\Omega_5 = 332.33, \Omega_6 = 486.14$$

$$\text{満載} : \Omega_2 = 32.786, \Omega_3 = 82.814, \Omega_4 = 156.11,$$

$$\Omega_5 = 253.96, \Omega_6 = 369.46$$

$\beta_1 = 0.0105$ に対し Fig. 2 により固有値修正係数 c_i を求め、本船の 2~4 節振動に対する固有値 $c\Omega$ は Table 9 に示すごとくになる。以上の結果を山春丸のものと共に Fig. 15 に示す。

つぎに船底相当梁の I_e および m を前と同様に

Fig. 12 Ocean Vulcan の断面有効慣性モーメントの分布形状 i_ξ

Fig. 13 Ocean Vulcan の付加水質量を含めた船体重量分布形状 q_ξ (軽荷状態)

Fig. 14 Ocean Vulcan の付加水質量を含めた船体重量分布形状 q_ξ (満載状態)

Table 9 s.s. Ocean Vulcan の固有値 (軽荷および満載)

次数 i	c_i	軽荷状態		満載状態	
		Ω_i	固有値 $c_i \Omega_i$	Ω_i	固有値 $c_i \Omega_i$
2 節振動	0.941	43.90	41.31	32.79	36.85
3 節振動	0.820	109.7	89.95	82.81	67.91
4 節振動	0.700	201.7	141.2	156.1	109.3

Fig. 15 山春丸および Ocean Vulcan の固有値

Fig. 16 Ocean Vulcan K^2 - ω 曲線 (軽荷および満載状態)

min) として

軽荷 2 節: $N_2=98.7 \text{ c/min}$ 3 節: $N_3=180.3 \text{ c/min}$
 満載 2 節: $N_2=76.3 \text{ c/min}$ 3 節: $N_3=154.1 \text{ c/min}$

となり, これに対し実測値は軽荷: $N_2=100 \text{ c/min}$, $N_3=185 \text{ c/min}$, 満載: $N_2=77 \text{ c/min}$, $N_3=156 \text{ c/min}$ である。山春丸および Ocean Vulcan の結果をまとめて Fig. 17 に示す。

結 言

以上貨物船垂直撓み振動の解析について述べたが, 実船の解析結果よりつぎの結論が得られる。

(1) 船体有効曲げ剛性の算定に当つては普通の貨物船では甲板室を無視して差し支えなく, 三島型貨物船の

して求める

$$I_e = 0.03099 \text{ m}^4/\text{m}, m = 7.389 \text{ t/m}^2$$

となるが, m は先に述べたように満載状態での載貨の詳細が不明であつたので, 軽荷状態での値を共通に用いた。このようにしても m の値を決定する支配的なものは船底相当梁に対する付加水質量 M_1' であるので結果にはほとんど影響はない。

以上の値および Fig. 5 によつて軽荷および満載状態に対し共通に船底相当梁の K^2 - ω 曲線が得られ Fig. 16 のごとくなる。つぎに船体振動の K^2 - ω 曲線も前と同様にして Fig. 16 に示すごとくなる。なお本船の付加水質量に対する 3 次元運動修正係数 J は $L_{BP}/B=7.31$ として, Fig. 6 より $J_2=0.739$, $J_3=0.659$ となる。

Fig. 16 における各 K^2 - ω 曲線の交点の座標として

軽荷 2 節: $K_2^2=1.220$, $\omega_2=10.34/\text{sec}$

3 節: $K_3^2=2.280$, $\omega_3=18.88/\text{sec}$

満載 2 節: $K_2^2=1.120$,

$\omega_2=7.99/\text{sec}$

3 節: $K_3^2=1.745$,

$\omega_3=16.14/\text{sec}$

が得られ, これより付加水質量は $K^2 J \Delta'$ として

軽荷 2 節: $K_2^2 J_2 \Delta' = 11470 \text{ t}$

3 節: $K_3^2 J_3 \Delta' = 19120 \text{ t}$

満載 2 節: $K_2^2 J_2 \Delta' = 12790 \text{ t}$

3 節: $K_3^2 J_3 \Delta' = 17770 \text{ t}$

となる。付加水質量を含めた船体重量 Δ_1 は軽荷状態のとき, 2 節: 18220 t, 3 節: 25870 t, 満載状態のとき, 2 節: 26580 t, 3 節: 31560 t となり, Δ_1/Δ の比は 2 節および 3 節に対し, 軽荷状態では 2.70 および 3.84, 満載状態では 1.93 および 2.29 となる。

船体固有振動数は $N=60 \omega/2\pi (\text{c/min})$

場合は船橋楼の有効度を §4 (2) の方法によつて算定すればよい。

(2) 付加水質量に対する 3 次元運動修正係数 J の値は $L/B=7\sim 8$ の普通の船体では曲げによる船体横断面の回転の影響により Lewis の値より幾分小さくなる。

(3) 固有値に最も大きい影響をおよぼすものは q_0 である。(Ocean Vulcan の軽荷および満載状態の固有値参照)

(4) 固有値におよぼす i_0 の影響はそれ程大きくない。(軽荷状態における山春丸と Ocean Vulcan の固有値参照)

(5) 船体垂直撓み振動の付加水質量は従来水面下の船体の形状、寸法および振動の次数によつて定まると考えられているが、この外になお船底の剛性とそのときの船体の振動数との相互影響によつて定まるべき修正係数 K^2 を必要とする。

最後に本研究を行なうに当り御指導を賜つた大阪大学寺沢一雄教授並びに実船の解析に際し山春丸に関する詳細な資料を提供された日立造船技術研究所広渡智雪氏に対し厚く御礼申し上げます。また各種の数値計算および実船の解析に対して協力された当時の大阪大学工学部大学院学生近藤淳氏*に対して感謝の意を表する次第である。

Fig. 17 山春丸および Ocean Vulcan の固有振動数

参考文献

- (1) 熊井豊二：剪断振動としての船体高次振動について，造船協会論文集，第 99 号
- (2) A. J. Johnson：Vibration Tests of All-Welded and All-Riveted 10,000 ton Dry Cargo Ship, N. E. C. I., Vol. 67, 1950-51
- (3) J. E. Richards：An Analysis of Ship Vibration Using Basic Functions, N. E. C. I., Vol. 68, 1951-52
- (4) 広渡智雪：船体固有振動数の研究 (第 4 報)，造船協会論文集，第 102 号
- (5) 著者：剪断の影響を考慮した両端自由梁の屈曲振動 (一様断面梁の場合)，関西造船協会誌，第 94 号
- (6) 寺沢一雄，著者：Transverse Vibration of Higher Frequencies of Beams of Uniform Cross Section Taking into Account the Effect of Shear, 大阪大学工学報告，第 8 巻，Oct., 1958
- (7) 柴垣和三雄：数値積分法 (応用数学第 9 巻，河出) 及び倉西正嗣：弾性学
- (8) C. E. Inglis：The Determination of Critical Speeds, Natural Frequencies and Modes of Vibration, By Means of Basic Function, N. E. C. I., Vol. 61, 1944-45
- (9) C. W. Prohaska：The Vertical Vibration of Ships, The Shipbuilder & Marine Eng.-builder, Oct.-Nov., 1947
- (10) F. M. Lewis：The Inertia of the Water Surrounding a Vibrating Ship, S. N. A. M. E., Vol. 37, 1929
- (11) J. L. Taylor：Some Hydrodynamical Inertia Coefficients, Phil. Mag., Vol. 9, 1930
- (12) J. L. Taylor：Vibration of Ships, T. I. N. A., Vol. 72, 1930
- (13) H. H. Bleich：Nonlinear Distribution of Bending Stress Due to Distortion of the Cross Section, J. App. Mech., 1953
- (14) 著者：船体撓み振動における上部構造の影響を考慮した船体の有効曲げ剛性 (第 1 報)，(第 2 報)，船体構造委員会関西地区部会資料，関西 59-10-29 および関西 59-12-43
- (15) 著者：船体横断面の剪断剛性，船体構造委員会関西地区部会資料，関西 59-4-13

* 日立造船技術研究所

- (16) W. Hovgaard : Structural Design of Warships.
 (17) W. Schilling : Statik der Bodenkonstruktion der Schiffe, 1925
 (18) 奥田克巳, 有馬 孝 : 縦横に防撓材を有する矩形薄板の強さ及び固有振動数, 造船協会会報, 第 58 号, 昭和 11 年
 (19) 鬼頭史城 : 水中に於て振動する平面板の附加質量について, 造船協会雑纂, 第 266 号, 昭和 19 年
 (20) 広渡智雪 : 船体固有振動数の研究 (第 3 報), 造船協会論文集, 第 97 号
 (21) Timoshenko and Goodier : Theory of Elasticity, 1951 年版, p. 40
 (22) 寺沢一雄, 八木順吉 : 上部構造の効きに関する研究 (第 3 報), 造船協会論文集, 第 102 号
 (23) H. Lamb : Hydrodynamics, 4 th edition.

付録 1. 船楼の影響を考慮した船体有効断面慣性モーメント

船体を主構造および船楼共に一様断面, 且つ前後対称と考え, 主構造と船楼の間のバネ定数を K , 船楼および主構造の撓みをそれぞれ y_1 および y_2 とすれば, Bleich⁽¹³⁾ により曲げに対する基礎方程式は次式によつて与えられる。

$$\left. \begin{aligned} E(I_1 + \alpha_1^2 I_A) \frac{d^4 y_1}{dz^4} + K y_1 + \alpha_1 \alpha_2 E I_A \frac{d^4 y_2}{dz^4} - K y_2 &= p_1 \\ \alpha_1 \alpha_2 E I_A \frac{d^4 y_1}{dz^4} - K y_1 + E(I_2 + \alpha_2^2 I_A) \frac{d^4 y_2}{dz^4} + K y_2 &= p_2 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Fig. 18

Fig. 19

ここに p_1 , p_2 はそれぞれ船楼および主構造に働く単位長さ当りの外力であり, また

$$I = I_1 + I_2 + I_A, \quad I_A = a^2 \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}, \quad \mu = \frac{I_1 + \alpha_1 I_A}{I_2 + \alpha_2 I_A} \quad (58)$$

であつて, 記号はすべて Bleich⁽¹³⁾ のものによる (Fig. 18, Fig. 19 参照)。なお端末条件は $z = \pm l/2$ において

$$\left. \begin{aligned} E(I_1 + \alpha_1^2 I_A) \frac{d^2 y_1}{dz^2} + \alpha_1 \alpha_2 E I_A \frac{d^2 y_2}{dz^2} &= 0 \\ \alpha_1 \alpha_2 E I_A \frac{d^2 y_1}{dz^2} + E(I_2 + \alpha_2^2 I_A) \frac{d^2 y_2}{dz^2} &= -M \\ E(I_1 + \alpha_1^2 I_A) \frac{d^3 y_1}{dz^3} + \alpha_1 \alpha_2 E I_A \frac{d^3 y_2}{dz^3} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

となり⁽¹³⁾, M は船楼端で船体全断面に働く曲げモーメントを採る。

与えられた荷重に対して (57) の解が得られると, 船体の有効断面慣性モーメントは次のごとく考えて求められる。船体の撓みは主構造の撓み y_2 によつて表わされるものと考え, 主構造の曲率 $d^2 y_2 / dz^2$ に等しい曲率をもつような可変断面梁の断面慣性モーメント I_e を以て有効慣性モーメントとする。従つて主構造および船体全断面に働く曲げモーメントをそれぞれ M_2 および M とすれば

$$\frac{d^2 y_2}{dz^2} = -\frac{M_2}{E I_2} = -\frac{M}{E I_e} \quad \therefore I_e = I_2 \frac{M}{M_2} = -\frac{1}{E} \frac{M}{d^2 y_2 / dz^2} \quad (60)$$

によつて I_e が求められる。

種々の荷重状態につき (57) の解を求め (60) によつて I_e を求めた結果, I_e は荷重状態によつてほとんど影響されず, 船体の構造, 寸法のみによつて定まると考えてもよいことが判つたので⁽¹⁴⁾, ここでは一様曲げの場合の解を用いて I_e を求め次の結果を得る。

$$\frac{I_e}{I} = \frac{1}{1 + \frac{\mu}{1 - \nu(1 + \mu)} (\Phi_1 \cos \gamma z \cosh \gamma z - \Psi_1 \sin \gamma z \sinh \gamma z)} \quad (61)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{\cos u \sinh u + \sin u \cosh u}{\sin u \cos u + \sinh u \cosh u}, \quad \Psi_1 = \frac{\cos u \sinh u - \sin u \cosh u}{\sin u \cos u + \sinh u \cosh u} \\ \nu &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 I_A}{I_1 + \alpha_1 I_A}, \quad u = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{K}{4E} \frac{1+\mu}{\alpha_2 I_1 + \mu \alpha_1 I_2}} \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

船体中央における I_e を I_{e0} とすれば (61) より $z=0$ において

$$\frac{I_{e0}}{I} = \frac{1}{1 + \frac{\mu \Phi_1}{1 - \nu(1 + \mu)}} \quad (63)$$

となる。今 1 例としてある実船についての μ, ν の値を用い $u=1, 2, 3, 4, 5$ のときの I_e/I を (61) によつて求めると Fig. 20 の如くになり、 u の値が約 2.4 以上になると船体中央部のある範囲内では $I_e/I \geq 1$ となり全断面が完全に有効に働くことが判る。そこで近似法として全断面が有効に働く部分では $I_e/I=1$ とし、船楼端における値を I_2/I とし、両者の間を直線で結べば Fig. 20 は Fig. 21 のごとくになり実用上十分な近似値が得られる。Fig. 21 の作図法において $I_e/I=1$ となる範囲 $\bar{z}$ は (61) において

$$\begin{aligned} \Phi_1 \cos \gamma z \cosh \gamma z \\ - \Psi_1 \sin \gamma z \sinh \gamma z &= 0 \end{aligned} \quad (64)$$

を満足する γz の値を $(\gamma z)_0$ とすれば $\bar{z} = \pm (\gamma z)_0 / \gamma = \pm (\gamma z)_0 l / 2u$ となり、船楼が完全に有効に働く長さ $2\bar{z}$ は

$$\frac{2\bar{z}}{l} = \frac{(\gamma z)_0}{u} \quad (65)$$

によつて与えられる。(65) の右辺は u のみの函数として求め、 $2\bar{z}/l$ は本文 Fig. 3 に示したごとく u の値によつて直ちに求めら

Fig. 20 船楼の長さに沿う I_e/I の分布

Fig. 21 近似法による I_e/I の分布

Fig. 22

れる。ただし $u < 2.37$ の場合は (63) による。

つぎに船楼と主構造の間のバネ定数 K の算定は、両者の間の力の伝達が船側外板を通じて行われると考えて次のようにした。Fig. 22 は著者が以前に行なつた光弾性実験の結果の 1 例であつて、 σ_y の分布は主構造および船楼の各々につき Fig. 23 のごとく両端支持等分布荷重の矩形断面梁の σ_y の分布形状⁽²¹⁾

$$\sigma_y = -\frac{3q}{4c^3} \left(\frac{1}{3}y^3 - c^2y + \frac{2}{3}c^3 \right) \quad (66)$$

によく似ている。従つて船楼および主構造船側外板の肋骨断面積を含めた相当板厚をそれぞれ t_1 および t_2 、深さをそれぞれ D_1 および D 、両者のおよぼし合う圧力を単位長さ当り q_0 とし、船楼に対しては (66) に

Fig. 23

において $c=D_1/2$, $q=q_0/t_1$, 主構造に対しては $c=D/2$, $q=q_0/t_2$ として各々の歪 ε_{y1} , ε_{y2} を求めると, 両者の中性軸間の距離変化 Δa は

$$\Delta a = \int_{-\frac{D_1}{2}}^{\alpha_1 a - \frac{D_1}{2}} \varepsilon_{y1} dy + \int_{-\frac{D}{2}}^{\alpha_2 a - \frac{D}{2}} \varepsilon_{y2} dy \quad (67)$$

となり, バネ定数 K は船側外板が左右両舷にあることを考慮して $K=-2q_0/\Delta a$ として次式のごとくなる。

$$K = \frac{4E}{a} \left[\frac{\alpha_1}{t_1} \left\{ 2 - 2 \left(\frac{\alpha_1 a}{D_1} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_1 a}{D_1} \right)^3 \right\} + \frac{\alpha_2}{t_2} \left\{ 2 - 2 \left(\frac{\alpha_2 a}{D} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_2 a}{D} \right)^3 \right\} \right] \quad (68)$$

なお上記の K の値は σ_y の分布をさらに簡単な形に仮定して求められた寺沢教授および八木助教授⁽²²⁾の方法による値とほとんど差異はない。

付録 2. 付加水質量の3次元運動修正係数 J

垂直撓み振動における付加水質量の3次元運動修正係数 J を回転楕円体の場合について, 曲げによる梁断面の回転の影響を考慮に入れた境界条件の下で求めた。記号および解法の主方針は Lewis⁽¹⁰⁾ と同様である。

楕円座標 ξ , μ , ω を用い回転楕円体の周囲の水の持つ速度ポテンシャルを ϕ とすれば $\nabla^2 \phi = 0$ の一般解は Lamb⁽²³⁾ により

$$\phi = P_n^s(\mu) Q_n^s(\xi) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} s\omega \quad (s, n=1, 2, 3, \dots) \quad (69)$$

ここに $P_n^s(\mu)$, $Q_n^s(\xi)$ は夫々 Legendre の第1種および第2種陪函数である。2節, 3節および4節振動の場合の ϕ を次の形におく。

$$\left. \begin{aligned} 2 \text{ 節: } \phi &= \{ \beta_1 P_1^1(\mu) Q_1^1(\xi) + \beta_3 P_3^1(\mu) Q_3^1(\xi) \} \cos \omega \\ 3 \text{ 節: } \phi &= \{ \beta_2 P_2^1(\mu) Q_2^1(\xi) + \beta_4 P_4^1(\mu) Q_4^1(\xi) \} \cos \omega \\ 4 \text{ 節: } \phi &= \{ r_1 P_1^1(\mu) Q_1^1(\xi) + r_3 P_3^1(\mu) Q_3^1(\xi) + r_5 P_5^1(\mu) Q_5^1(\xi) \} \cos \omega \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

ここに β_1 , β_2 , β_3 , β_4 , r_1 , r_3 , r_5 は任意定数で境界条件によつて定められる。これより流体の運動エネルギー T は流体の密度を ρ , 回転楕円体表面の面素を dS として

$$2T = -\rho \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{\xi=\xi_0} dS, \quad dS = r d\omega ds \mu = k^2 (\xi_0^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} (\xi_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}} d\mu d\omega \quad (71)$$

によつて求められる⁽¹⁰⁾ ($\xi=\xi_0$ は回転楕円体表面, n は法線方向を示す)

Fig. 24

一方撓み曲線の形を仮定し, 撓み振動速度 v を

$$\left. \begin{aligned} 2 \text{ 節: } v &= \mu^2 - a_2^2, \quad 3 \text{ 節: } v = \mu(\mu^2 - a_3^2), \\ 4 \text{ 節: } v &= (\mu^2 - a_4^2)(\mu^2 - b_4^2) \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

とおけば, 断面の曲げによる回転角速度 ψ は

$$\left. \begin{aligned} 2 \text{ 節: } \psi &= \frac{2}{k\xi_0} \mu, \quad 3 \text{ 節: } \psi = \frac{1}{k\xi_0} (3\mu^2 - a_3^2), \\ 4 \text{ 節: } \psi &= \frac{2}{k\xi_0} \mu \{ 2\mu^2 - (a_4^2 + b_4^2) \} \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

となる。ここに a_2 , a_3 , a_4 , b_4 は撓み曲線の節点の位置を示す定数である。これより回転楕円体表面の点の持つ法線方向の速度 v_n は Fig. 24 に示すごとく

$$v_n = v \cos \omega \cos \varphi - y \psi \sin \varphi = \frac{(1-\mu^2)^{1/2}}{(\xi_0^2 - \mu^2)^{1/2}} \{ v \xi_0 - \psi k \mu (\xi_0^2 - 1) \} \cos \omega \quad (74)$$

となり, 境界条件は

$$-\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{\xi=\xi_0} = v_n \quad (75)$$

によつて与えられる。Lewis の解は境界条件において ψ の項を無視して求められたものである。

境界条件 (75) により任意定数 β_1 , β_2 , β_3 , β_4 , r_1 , r_3 , r_5 が決定され, 運動エネルギー T が求められる。一方流体の運動を2次元と考えた場合の運動エネルギー T' を求めると, 3次元運動修正係数 J は $J=T/T'$ と

して与えられ、計算の結果次式のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} 2 \text{ 節: } J_2 &= \left[\frac{1}{25} \left(1 + 5a_2^2 - \frac{2}{\xi_0^2} \right)^2 R_1 + \frac{24}{525} \left(1 - \frac{2}{\xi_0^2} \right)^2 R_3 \right] \left/ \left[\left(\frac{1}{5} - a_2^2 \right)^2 + \frac{8}{175} \right] \right. \\ 3 \text{ 節: } J_3 &= \left[\frac{1}{245} \left\{ 6 - \frac{1}{\xi_0^2} (9 - 7a_3^2) \right\}^2 R_2 + \frac{8}{735} \left(2 - \frac{3}{\xi_0^2} \right)^2 R_4 \right] \left/ \left[\frac{1}{5} \left(\frac{3}{7} - a_3^2 \right)^2 + \frac{8}{735} \right] \right. \\ 4 \text{ 節: } J_4 &= \left[\frac{1}{1225} \left\{ 9 - 7(a_4^2 + b_4^2) - 35a_4^2 b_4^2 + \frac{2}{\xi_0^2} \left\{ 7(a_4^2 + b_4^2) - 6 \right\} \right\}^2 R_1 + \frac{8}{1575} \left[3 \{ 2 - (a_4^2 + b_4^2) \} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{\xi_0^2} \left\{ 3(a_4^2 + b_4^2) - 4 \right\} \right]^2 R_3 + \frac{64}{24225} \left(3 - \frac{4}{\xi_0^2} \right)^2 R_5 \right] \left/ \left[a_4^4 b_4^4 + \frac{6}{35} a_4^2 b_4^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2}{5} a_4^2 b_4^2 (a_4^2 + b_4^2) + \frac{3}{35} (a_4^2 + b_4^2)^2 - \frac{2}{21} (a_4^2 + b_4^2) + \frac{1}{33} \right] \right. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

ここに R_1, R_2, R_3, R_4 は Lewis⁽¹⁰⁾ によつて与えられたものと同じであつて R_5 は次式のごときものである。

$$R_5 = - \frac{\frac{1}{2} (315 \xi_0^5 - 210 \xi_0^3 + 15 \xi_0) \log \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - \frac{315 \xi_0^6 - 420 \xi_0^4 + 113 \xi_0^2}{\xi_0^2 - 1}}{\frac{1}{2} (1575 \xi_0^5 - 1890 \xi_0^3 + 435 \xi_0) \log \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - \frac{1575 \xi_0^6 - 2940 \xi_0^4 + 1485 \xi_0^2 - 128}{\xi_0^2 - 1}} \quad (77)$$

節点の位置として 2 節および 3 節に対しては Lewis⁽¹⁰⁾ と同様に、 $a_2 = 1/\sqrt{5} = 0.447$, $a_3 = \sqrt{3/7} = 0.65$ とし、4 節に対しては

$$a_4 = \sqrt{(7 - \sqrt{28})/21} = 0.29, \quad b_4 = \sqrt{(7 + \sqrt{28})/21} = 0.77$$

とすれば実船の計測結果にかなり近いものとなり、(76) は次式の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} 2 \text{ 節: } J_2 &= \frac{7}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi_0^2} \right)^2 R_1 + \left(1 - \frac{2}{\xi_0^2} \right)^2 R_3 \\ 3 \text{ 節: } J_3 &= \frac{27}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi_0^2} \right)^2 R_2 + \left(2 - \frac{3}{\xi_0^2} \right)^2 R_4 \\ 4 \text{ 節: } J_4 &= \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{\xi_0^2} \right)^2 (11 R_1 + 154 R_3) + \left(3 - \frac{4}{\xi_0^2} \right)^2 R_5 \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

$L/B = 5 \sim 12$ の範囲について (78) によつて求めた J の値は本文 Fig. 6 のごとくなる。

付録 3. 2 重底の曲げ剛性

船の幅を l 、横隔壁間の距離を l_1 とすれば 2 重底は本文 Fig. 8 に示すごとく船側で単純支持、隔壁で固定の平面格子構造と考えられる。2 重底に働く単位面積当り q の垂直等分布荷重を先ず横部材に分配し、縦部材はこれらを弾性的に支持するものと考え、Schilling⁽¹⁷⁾ の考え方を適用して centre girder および side girder の撓みを y_c および y_s として次の基礎方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda}{\rho_c} \frac{d^4 y_c}{dz^4} + \frac{2\mu}{\rho_s} \frac{d^4 y_s}{dz^4} + y_c &= \eta^{(c)} \\ \frac{\mu}{\rho_c} \frac{d^4 y_c}{dz^4} + \frac{\nu}{\rho_s} \frac{d^4 y_s}{dz^4} + y_s &= \eta^{(s)} \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

ただしここに

$$\lambda = \frac{l^3 e}{48 EI_f}, \quad \mu = \frac{a(3l^2 - 4a^2)e}{48 EI_f}, \quad \nu = \frac{a^2(3l - 4a)e}{6 EI_f}, \quad \frac{1}{\rho_c} = EI_c, \quad \frac{1}{\rho_s} = EI_s \quad (80)$$

であつて、 $\eta^{(c)}$ および $\eta^{(s)}$ は横部材 I_f が単独梁として単位長さ当り qe なる等分布荷重を受けるときの centre girder および side girder の位置での撓みを示し

$$\eta^{(c)} = \frac{5 q e l^4}{384 EI_f}, \quad \eta^{(s)} = \frac{q e a (l^3 - 2la^2 + a^3)}{24 EI_f} \quad (81)$$

となる。そこで今

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt[4]{\frac{\lambda \rho_s + \nu \rho_c}{8(\lambda \nu - 2\mu^2)} \left\{ 1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\rho_c \rho_s (\lambda \nu - 2\mu^2)}{(\lambda \rho_s + \nu \rho_c)^2}} \right\}} \\ \alpha_2 &= \sqrt[4]{\frac{\lambda \rho_s + \nu \rho_c}{8(\lambda \nu - 2\mu^2)} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\rho_c \rho_s (\lambda \nu - 2\mu^2)}{(\lambda \rho_s + \nu \rho_c)^2}} \right\}} \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

$$\text{および} \quad \beta_1 = \frac{\rho_s}{8\alpha_1^4 \mu} \left(1 - \frac{4\alpha_1^4 \lambda}{\rho_c} \right), \quad \beta_2 = \frac{\rho_s}{8\alpha_2^4 \mu} \left(1 - \frac{4\alpha_2^4 \lambda}{\rho_c} \right) \quad (83)$$

とおき、且つ問題の対称性を考慮に入れると (79) の一般解は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} y_c &= C_1 \cos \alpha_1 z \cosh \alpha_1 z + C_2 \sin \alpha_1 z \sinh \alpha_1 z + C_3 \cos \alpha_2 z \cosh \alpha_2 z + C_4 \sin \alpha_2 z \sinh \alpha_2 z + \eta^{(e)} \\ y_s &= \beta_1 (C_1 \cos \alpha_1 z \cosh \alpha_1 z + C_2 \sin \alpha_1 z \sinh \alpha_1 z) + \beta_2 (C_3 \cos \alpha_2 z \cosh \alpha_2 z + C_4 \sin \alpha_2 z \sinh \alpha_2 z) + \eta^{(s)} \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

境界条件として $z = \pm l_1/2$ にて $y_c = dy_c/dz = y_s = dy_s/dz = 0$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{\beta_2 \eta^{(e)} - \eta^{(s)}}{\beta_1 - \beta_2} \frac{\sin \varphi_1 \cosh \varphi_1 + \cos \varphi_1 \sinh \varphi_1}{\sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + \sinh \varphi_1 \cosh \varphi_1} \\ C_2 &= -\frac{\beta_2 \eta^{(e)} - \eta^{(s)}}{\beta_1 - \beta_2} \frac{\sin \varphi_1 \cosh \varphi_1 - \cos \varphi_1 \sinh \varphi_1}{\sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + \sinh \varphi_1 \cosh \varphi_1} \\ C_3 &= -\frac{\beta_1 \eta^{(e)} - \eta^{(s)}}{\beta_1 - \beta_2} \frac{\sin \varphi_2 \cosh \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sinh \varphi_2}{\sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + \sinh \varphi_2 \cosh \varphi_2} \\ C_4 &= -\frac{\beta_1 \eta^{(e)} - \eta^{(s)}}{\beta_1 - \beta_2} \frac{\sin \varphi_2 \cosh \varphi_2 - \cos \varphi_2 \sinh \varphi_2}{\sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + \sinh \varphi_2 \cosh \varphi_2} \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

ただしここに

$$\varphi_1 = \alpha_1 l_1/2, \quad \varphi_2 = \alpha_2 l_1/2 \quad (86)$$

本文 §8 に述べたごとく I_e の算定に必要なものは y_c であるから、最大撓み $y_{c\max}$ は (84) より

$$y_{c\max} = [y_c]_{z=0} = \eta^{(e)} + C_1 + C_3 \equiv \alpha_{\max} \eta^{(e)} \quad (87)$$

また平均撓み $\bar{y}_c$ は $\bar{y}_c = \frac{2}{l_1} \int_0^{l_1/2} y_c dz$ として次式のごとくになる。

$$\begin{aligned} \bar{y}_c &= \eta^{(e)} + \frac{C_1}{2\varphi_1} (\sin \varphi_1 \cosh \varphi_1 + \cos \varphi_1 \sinh \varphi_1) + \frac{C_2}{2\varphi_1} (\sin \varphi_1 \cosh \varphi_1 - \cos \varphi_1 \sinh \varphi_1) \\ &+ \frac{C_3}{2\varphi_2} (\sin \varphi_2 \cosh \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sinh \varphi_2) + \frac{C_4}{2\varphi_2} (\sin \varphi_2 \cosh \varphi_2 - \cos \varphi_2 \sinh \varphi_2) \equiv \bar{\alpha} \eta^{(e)} \end{aligned} \quad (88)$$

付録 4. 船底の振動に対する付加水質量

Fig. 25

船底を幅 l 、長さ l_1 の矩形板が船の長さ方向に無限に連続したものと考え、長さ方向には間隔 l_1 毎に nodal line を持つような撓み変形を考える。また船底は幅の方向には有限長さ l であるから、Fig. 25 のごとく $3l \times l_1$ なる区画を考え、 x 方向には中央部 l のみに撓み変形を生じその前後の l では撓みがないような変形を考えれば、有限幅の板の運動が水に与える影響を近似的に算入することができる。

撓みの形を w_0 を定数として

$$w = w_0 f(x) \sin \frac{\pi z}{l_1} \sin \omega t \quad (89)$$

とおき、 $f(x)$ を次のような函数とする。

$$0 \leq x \leq l \text{ および } 2l \leq x \leq 3l: f(x) = 0, \quad l \leq x \leq 2l: f(x) = -\sin \frac{\pi x}{l} \quad (90)$$

(90) を $-3l \leq x \leq 3l$ の領域で Fourier の sine 級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{3l} \quad (91)$$

に展開すれば (89) は

$$w = w_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{3l} \sin \frac{\pi z}{l_1} \sin \omega t \quad (92)$$

一方流体の速度ポテンシャル ϕ として

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n a_n \sin \frac{n\pi x}{3l} \sin \frac{\pi z}{l_1} e^{-\alpha_n y} \cos \omega t \quad (93)$$

を考える。ここに y は板の面に垂直な座標軸である。(93) が $\nabla^2 \phi = 0$ を満足する条件より

$$\alpha_n^2 = \left(\frac{n\pi}{3l} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{l_1} \right)^2 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (94)$$

板の表面 $y=0$ での境界条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (95)$$

により A_n が定まり ϕ は次式のごとくなる。

$$\phi = -w_0 \omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\alpha_n} \sin \frac{n\pi x}{3l} \sin \frac{\pi z}{l_1} e^{-\alpha_n y} \cos \omega t \quad (96)$$

船底の場合は板の片側のみに水があるから、水の持つ運動エネルギー T_1 は

$$T_1 = -\frac{\rho}{2} \int_0^{3l} \int_0^{l_1} [\phi]_{y=0} \frac{\partial w}{\partial t} dx dz$$

として求められ、(92) および (96) を入れて

$$T_1 = \frac{9}{8\pi} \rho w_0^2 \omega^2 l^2 l_1^2 \cos^2 \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{\sqrt{9l^2 + nl_1^2}} \quad (97)$$

となる。一方船底自身の運動エネルギー T は船底の重量を M として

$$T = \frac{1}{2} \frac{M}{l l_1} \int_0^{3l} \int_0^{l_1} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dz = \frac{3}{8} M w_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad (98)$$

従つて周囲の水を含めた系全体の運動エネルギーは

$$T + T_1 = \frac{3}{8} w_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left[M + \frac{3}{\pi} \rho l^2 l_1^2 \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{\sqrt{9l^2 + nl_1^2}}}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} \right]$$

となりこれより付加水質量 M_1 は次式によつて与えられる。

$$M_1 = \frac{3}{\pi} \rho l^2 l_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{\sqrt{n + 9\left(\frac{l}{l_1}\right)^2}} \bigg/ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad (99)$$

この付加水質量 M_1 が船底に様に分布するものと仮定して、横方向に切出した単位幅の船底部分に対する付加水質量を M_1' とすれば

$$M_1' = \frac{M_1}{l_1} = \frac{3}{\pi} \rho l^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{\sqrt{n + 9\left(\frac{l}{l_1}\right)^2}} \bigg/ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad (100)$$

となり、これが船底相当梁の全長に対する付加水質量となる。 $n=16$ まで採つた場合の (100) は (91) の Fourier 係数 a_n を計算して本文 (52) のごとく与えられる。