(昭和 35 年 11 月造船協会秋季講演会において講演)

矩形水槽壁の接水振動について (第3報)

正員 鬼 頭 史 城*

On Vibration of a Rectangular Tank Filled with Water III.

By Fumiki Kito, *Member*.

Summary

When side walls of a rectangular tank, which is filled with water, is vibrating, the inside water will also make vibratory motion. This motion of water lowers considerably the natural frequency of vibration of the side walls of the tank. This effect is conveniently expressed by "Virtual Mass" of water. In the previous report, the author has made a theoretical study on the value of "virtual mass" of water, restricting ourselves to the case in which two opposite side-walls (among the six walls) are vibrating. The present report is an outcome of continuation of this study, and treats the case in which four walls of the tank vibrate. An approximate formulae for natural frequency of vibration for whole system consisting of four walls and the inside water, is also given.

The calculation throughout is made, regarding the water to be an incompressible, non-viscous fluid, and the amplitude of vibration to be infinitesimally small.

1. 緒 言

矩形水槽があつて、その内部に水が満たされているとする。その側壁を構成するところの矩形平板が振動するとき、内部の水もまた振動をする。その結果、平板の固有振動に対して、いわゆる仮性質量の効果が現われる。著者は前2回の報告⁽¹⁾⁽²⁾において、相向つている2枚の側壁が振動するときの水の仮性質量の値について理論的考察を行ない、その値を与えるところの略近公式を作つた。矩形壁のうちで、相向つている2面だけが振動している場合をとり上げたのは、實際上そのようなケースがしばしば起つたからである。しかし、一般理論としては、同時に(例えば)4面の矩形壁面の振動する場合をも考える必要がある。本報告では4つの側面(弾性矩形平板)と内部の水とで構成された1つの振動系を考え、水の上面には自由面があり、板は反相振動をする場合に対して前回と同様な水の動エネルギーの計算を行ない、かつ Lord Rayleigh の原則を応用して、固有振動数に対する略近公式を作つた。そして数値例によつてその適用法を説明してある。

水は非圧縮性理想流体と考え、かつ微小振動の場合だけを考へている。また前回報告と同じく下記の記号を用いる。

ϕ = 水の運動の速度ポテンシャル, w = 平板の横変位, A = 同上の振幅, ρ = 振動の角周波数, L = 矩形水槽の長さ, H = 同上の高さ, B = 同上の幅, N = 斜辺の長さ = $\sqrt{L^2 + H^2}$, ρ_m = 平板の材質の密度, ρ_w = 水の密度, $W = \omega A$ (板の横変位速度の振幅値), T_m = 板の動エネルギー, T_w = 水の動エネルギー, $V = LBH$ = 矩形水槽の容積, $m = \pi/L$, $s = \pi/H$, $M = \pi/B$, $n_{ij} = [(mi)^2 + (sj)^2]^{1/2}$, $N_{ij} = [(Mi)^2 + (sj)^2]^{1/2}$,

第1図に示すごとく、水槽の壁面のうち $L \times H$ の寸法をもつた2面を側面, $B \times H$ の寸法をもつた2面を端面と、仮りに名付けよう。今回は両側面と両端面とが同時に振動する場合を考へるのであつて、側面に関する量に a , 端面に関する量に b なるサフィクスを付けて区別することにする。 w_a, W_a は側面板の振動の変位に, w_b, W_b は端面板の振動の変位に, それぞれ関係のある量となる。 ϕ_a は w_a が存在し, $w_b \equiv 0$ のときの水槽内部の水の運動の速度ポテンシャルをそれ

第1図 矩形水槽の略図

原稿受付 昭和 35 年 4 月 27 日

* 慶応義塾大学工学部

それ表わすものとする。

2. 水の動エネルギーの計算 (2枚の側面板と2枚の端面板が同時に振動する場合) (反相振動) (自由表面あり)

計算の目標を最低自由振動数の計算におくものとする。前回までの研究によると向合つた2面が反相振動をする場合の方が仮性質量の値が大きく、したがつて自由振動数の値を低くする。それゆえ、ここでは両側面板が、また両端面板が、いずれも反相振動をする場合を考えよう。なお水はほとんど完全に満たされているが、上面に僅かの空間を残しており、したがつて上面は自由面であるとしよう。

2枚の側面板が

$$\frac{dw_a}{dt} = W_a \sin mx \sin sz \cos \omega t \quad (1)$$

の形で (反相) 振動しているとき、水の運動の速度ポテンシャル ϕ_a の値は¹⁾

$$\phi_a = \sum \sum B_{ij} \cosh(n_{ij}y) \cos(mi x) \cos(sj z) \quad (2)$$

の形になる。ここに

$$B_{ij} = \frac{2}{(i^2-1)(j^2-1)} \left(\frac{\varepsilon}{\pi^2} \right) \frac{W_a \cos \omega t}{n_{ij} \sinh(n_{ij}B/2)}$$

であり、総和記号 $\sum \sum$ は $i=0, 2, 4, \dots; j=\sigma+1, 2, \dots$ に対する総和を示すものとする。 ε は $i=0$ のとき $\varepsilon=2$, $i \neq 0$ のとき $\varepsilon=4$ となるものとする。

2枚の端面板が変位速度

$$\frac{dw_b}{dt} = W_b \cos My \sin sz \cos \omega t \quad (3)$$

(ただし $-B/2 \leq y \leq +B/2$) で振動しているときに対する水の運動の速度ポテンシャル ϕ_b の値は、 ϕ_a から、記号のおきかえを行なつて得られる。すなわち

$$\phi_b = \sum \sum C_{ij} \cosh\left\{N_{ij}\left(x - \frac{L}{2}\right)\right\} \cos\left\{M_i\left(y + \frac{B}{2}\right)\right\} \cos sj z \quad (4)$$

ここに

$$C_{ij} = \frac{2}{(i^2-1)(j^2-1)} \left(\frac{\varepsilon}{\pi^2} \right) \frac{W_b \cos \omega t}{N_{ij} \sinh(N_{ij}L/2)}$$

であり、総和記号 $\sum \sum$ および ε の値のとり方は ϕ_a の場合と同じである。両側面と、両端面と、4枚の矩形板が同時に振動しているときの、水の運動の速度ポテンシャルは $\phi = \phi_a + \phi_b$ によつて与えられる。この場合に、水域全体の水の動エネルギー T_w の値は

$$T_w = \frac{\rho_w}{2} \iint \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \quad (5)$$

を全境界面にわたつて面積分することによつて得られる。ところが上面は自由面であり、かつ略近的に $\phi=0$ としてあるし、また底面は固定されて動かないものとしてあるから、両側面および両端面の4面に対して積分を行なえばよい。よつて

$$T_w = T_{aa} + T_{ab} + T_{ba} + T_{bb} \quad (6)$$

の形になる。ここで

$$T_{aa} = \frac{\rho_w}{2} \iint \phi_a \frac{\partial \phi_a}{\partial n} dS, \quad T_{ba} = \frac{\rho_w}{2} \iint \phi_a \frac{\partial \phi_b}{\partial n} dS, \\ T_{ab} = \frac{\rho_w}{2} \iint \phi_b \frac{\partial \phi_a}{\partial n} dS, \quad T_{bb} = \frac{\rho_w}{2} \iint \phi_b \frac{\partial \phi_b}{\partial n} dS,$$

である。実際に側面 ($y = \pm B/2$) または端面 ($x=0, L$) における値を代入し、かつ積分を実行することにより下記の値が得られる。すなわち

$$T_{aa} = \frac{\rho_w}{2} [W_a \cos \omega t]^2 \times LBH \times M_{aa} \\ T_{bb} = \frac{\rho_w}{2} [W_b \cos \omega t]^2 \times LBH \times M_{bb}$$

$$T_{ba} = -\frac{\rho w}{2} [W_a W_b \cos^2 \omega t] \times LBH \times M_{ba}$$

$$T_{ab} = -\frac{\rho w}{2} [W_a W_b \cos^2 \omega t] \times LBH \times M_{ab}$$

とおくとき

$$\begin{aligned} M_{aa} &= \frac{4}{\pi^4} \sum \sum \left\{ \frac{1}{(i^2-1)(j^2-1)} \right\}^2 \epsilon \frac{\coth(n_{ij}B/2)}{n_{ij}B} \\ M_{bb} &= \frac{4}{\pi^4} \sum \sum \left\{ \frac{1}{(i^2-1)(j^2-1)} \right\}^2 \epsilon \frac{\coth(N_{ij}L/2)}{N_{ij}L} \\ M_{ba} &= \frac{4}{\pi^4} \left(\frac{B}{L} \right) \sum \sum \left\{ \frac{-1}{(i^2-1)(j^2-1)^2} \right\} \\ &\quad \times \epsilon \frac{\coth(n_{ij}B/2)}{n_{ij}B} \times \frac{1}{[1+(iB/L)^2+(jB/H)^2]} \\ M_{ab} &= \frac{4}{\pi^4} \left(\frac{L}{B} \right) \sum \sum \left\{ \frac{-1}{(i^2-1)(j^2-1)^2} \right\} \\ &\quad \times \epsilon \frac{\coth(N_{ij}L/2)}{N_{ij}L} \times \frac{1}{[1+(iL/B)^2+(jL/H)^2]} \end{aligned}$$

である。以上の計算によつて水の振動の動エネルギー T_w の値は

$$T_w = [k_a A_a^2 + f A_a A_b + k_b A_b^2] C_p \omega^2 \cos^2 \omega t$$

の形に書表わされることがわかる。ここに $W_a = \omega A_a$, $W_b = \omega A_b$ とおいてある。

3. 4面振動の場合に対する接水振動の自由振動数略近公式と数値例

弾性矩形平板が振動しているとき、その歪エネルギーは

$$U = \frac{1}{2} D \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right)^2 \right\} \right] dx dz$$

によつて与えられる。ここに w = 板の変位, D = 板の曲げ剛性 $= E h_m^3 / [12(1-\nu^2)]$, h_m = 板の厚さ, ν = ポアソン比, E = 弾性係数, とする。2枚の側面板が(1)の形で、そして2枚の端面板が(3)の形で振動しているとき、板の全体の歪みエネルギーは

$$U = \left[D_a (m^2 + s^2)^2 \frac{LH}{4} A_a^2 + D_b (M^2 + s^2)^2 \frac{BH}{4} A_b^2 \right] \sin^2 \omega t$$

また板全体の動エネルギー T_m は

$$T_m = \frac{1}{4} \omega^2 [G_a A_a^2 + G_b A_b^2] \cos^2 \omega t$$

ここに G_a , G_b はそれぞれの側面板および端面板1枚の質量とする。また水槽内部の水の運動のエネルギーは前述のごとく

$$T_w = [k_a A_a^2 + f A_a A_b + k_b A_b^2] C_p \omega^2 \cos^2 \omega t$$

の形になる。ゆえに1周期 ($t = 2\pi/\omega$) 間の平均値をとるときは、歪みエネルギー U と、全体の動エネルギー T_s とを

$$\begin{aligned} U &= C_U (A_a^2 + \mu A_b^2) \\ T_s &= \omega^2 C_p (K_a A_a^2 + F A_a A_b + K_b A_b^2) \end{aligned}$$

の形に書き表わすことができる。もし U と T_s とを等しいとおくときには、振動の角周波数 ω は(簡単のために $A_b/A_a = \lambda$ にとおいて)

$$\omega^2 = \frac{C_U}{C_T} \cdot \frac{1 + \mu \lambda^2}{K_a + F \lambda + K_b \lambda^2} \quad (7)$$

比 λ の値は未定であるが、1つの自由振動の状態が成り立つために、 ω の値を最小にするような λ の値をとるものとする。そのときの λ の値 λ_m は2次方程式

$$F + 2(K_b - \mu K_a) \lambda - \mu F \lambda^2 = 0 \quad (8)$$

の根として求められる。

なお多くの実用問題において、板にスティフナー等が取付けてある場合があるが、この場合には G, D は等価値をとらねばならない。

上記公式に対する数値例として、前回と同じく $L=5m, B=H=3m$ の矩形水槽を考えよう。この場合に対して上記の公式によつて M_{aa}, M_{ab} 等の値を数値計算すると $M_{aa}=0.16, M_{bb}=0.08, M_{ab}=0.0686, M_{ba}=0.0643$ となる。 $V=45m^3$ であるから、仮性質量(振動の)はそれぞれ $k_a=7.20, k_b=3.60, f=3.09+2.89=5.98$ となるから、板自身の質量を考えに入れて $K_a=7.50, K_b=3.90, F=5.98$ とすることにしよう。板の曲げ剛さを適当に変えてみることにし、それをパラメータ μ が変わることによって表わす。このとき、 $K_a:K_b$ の割合もいくらか変わるわけであるが、簡単のためにそれは無視することにしよう。これらの仮定の下に、 μ のいろいろな値に

第2図 (ω/ω_0) と λ の値 ($L:B:H=5:3:3$ の場合)

動数は、2つの側面だけを考えた値の 0.93 倍となり、また2つの端面に2つの側面の振幅の 0.36 倍の振幅の

第3図 種々の比 $L:H:B$ に対する K_1, K_2 の値

対し2次方程式(8)の根 λ_m を求め、さらに(7)によりこの λ_m の値に対する ω^2 の値を計算した。その結果をグラフに示せば第2図のごとくである。図においては横軸に μ の値をとり、縦軸には角周波数を比率 (ω/ω_0) で表わしたものと、振幅比 λ とがとつてある。まず4枚の矩形板がすべて同じ厚さで、特にスティフナーを取付けてないものとしよう。このとき

$$\mu = \{(M^2 + s^2)^2 BH\} \div \{(m^2 + s^2)^2 LH\} = 1.30$$

であるが、第2図によれば、この μ の値に対して $\omega/\omega_0=0.93, \lambda=0.36$ となる。それゆえ、4面全部を考えに入れた最低の自由振動の振動があることになる。すなわちそのような自由振動の振動形態があり得ることになる。もしこれ以上に端面の曲げ剛さが増せば、ほとんど2つの側面だけの振動になるであろう。

最後に、参考のために、 $L:H:B$ の比をいろいろに変えた場合に対する係数 K_1, K_2 および F の値を

第4図 種々の比 $L:H:B$ に対する F の値

数値計算によつて求め、第3図および第4図のグラフに示してある。

文 献

- (1) 鬼頭； 矩形水槽壁の接水振動について（昭和34年11月造船協会秋季講演会で講演）
- (2) 鬼頭； 同上（第2報）（昭和35年5月造船協会春季講演会で講演）