(昭和36年5月造船協会春季講演会において講演)

対数正規分布の特性

正員 真 鍋 大 覚*

Characters of Log-normal Distribution and Probability Density Function
whose Spectrum has Many Peaks.

By Daikaku Manabe, *Member*

Summary

According to the time-series theory, the probability function can be expressed as follows:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \varepsilon e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}} + \sqrt{1-\varepsilon^2} x e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} x} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right\} & \text{(Theory of maxima, Cartwright and Longuet-Higgins)} \\ x e^{-\frac{x^2+a^2}{2}} I_0(xa) & \text{(Theory of envelope, Rice)} \end{cases}$$

Both extremity of $\varepsilon=1$ and $a=\infty$, correspond to Gauss-Laplace's distribution, namely

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} \end{cases}$$

Now, if we change independent variable from x to Z , where

$$Z = \log x,$$

so probability function becomes :

$$P(Z) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{Z - \frac{e^{2Z}}{2}\right\} \div \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}e^{2Z}}; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{Z - \frac{(e^Z - a)^2}{2}\right\} \div \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}(Z - \log a)^2}, \end{cases}$$

which are summarized macroscopically as follows :

$$P(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp - \frac{(Z - \bar{Z})^2}{2\sigma^2},$$

where σ is dispersion and $\bar{Z}$ is total mean of Z .

This is log-normal distribution, and we find that this annexes both theory of maxima and envelope.

Spectrum has sometimes many peaks. Consequently in the frequency distribution of oscillation appear also many peaks. If we express irregular motion as

$$\xi = \sum_{n=1}^N C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

and letting R be the amplitude of envelope, then probability density is

$$P(R) = R \int_0^\infty r \prod_{n=1}^N J_0(C_n r) J_0(Rr) dr$$

whose number of peaks is about equal to N .

1 序 言

非常に長期間にわたる現象を統計的に整理するときには対数正規分布が用いられているが、観測値そのものよ

原稿受付 昭和35年12月11日

* 九大航空教室

りその対数をとつてまとめる方式が、いかなる点にあるかを考察し、あわせてこれで巨視的にまとめられながら微視的にはもつとも異なるところの多数の規則成分を含む不規則動揺の頻度分布について述べることにする。

2 時系列理論による頻度分布と対数正規分布との関係

自然界に現われる頻度分布は多種多様で、その中のきわめて僅かなものだけが時系列理論で直接に関係づけられているのである。まず極値の理論からは

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\epsilon e^{-\frac{x^2}{2\epsilon^2}} + \sqrt{1-\epsilon^2} x e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{1-\epsilon^2}x}{\epsilon}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right] \quad -\infty \leq x \leq +\infty \quad (1)$$

包絡線の理論からは

$$P(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2+a^2}{2}} \cdot I_0(ax) \quad 0 \leq x \leq \infty \quad (2)$$

という2種の分布型式が得られている。ここに ϵ および a は不規則度示数で、動揺状況の諸性質は

$$\xi = \xi_P + \xi_N, \quad \xi_P = P \cos pt,$$

$$\xi_N = \sum_{n=1}^N C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (3)$$

$$x = \xi \div \sqrt{\xi_N^2} \quad (4)$$

$$\epsilon^2 = 1 - (\xi_N^2)^2 / \xi_N^2 \cdot \xi_N'^2 \quad (\xi_P = 0) \quad (5)$$

$$a^2 = P^2 / \xi_N^2 \quad (\xi_P \neq 0) \quad (6)$$

第1図 時系列理論による頻度分布曲線

で表わされている。

ここで特に

$$\epsilon = 0, a = 0 : P(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (7)$$

という Rayleigh 分布を中央にはさんだ両極端の場合は

$$\epsilon = 1 : P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \bar{x} = 0, \quad -\infty \leq x \leq +\infty \quad (8)$$

$$a \rightarrow \infty : P(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}, \quad \bar{x} = a, \quad 0 \leq x \leq +\infty \quad (9)$$

はいずれも平均位置を中心とする Gauss-Laplace 分布である。

さてこれらの諸式が

$$\log x = Z \quad (10)$$

という変換によつてどんな形になるかを考察する。

この際、極値の理論は負の対数をとることになるので、これを変形し、頻度分布の負域の部分の部分を正域の上に重ねると (1) は、

$$P(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\epsilon e^{-\frac{x^2}{2\epsilon^2}} + \sqrt{1-\epsilon^2} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^{\frac{\sqrt{1-\epsilon^2}x}{\epsilon}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right], \quad 0 \leq x \leq +\infty \quad (11)$$

$$\therefore \epsilon = 1 : P(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (12)$$

となる。

Z と $Z+dZ$ 間の確率密度を $P(Z)dZ$ とすれば

$$P(Z) = P(x) \frac{dx}{dZ} = P(e^Z) \cdot e^Z \quad (13)$$

であるから (12) 式は

$$\epsilon = 1 : P(Z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(Z - e^{2Z}/2) \quad (14)$$

となるがこれは

第2図 対数変換による頻度分布曲線

第3図 対数正規分布と極値或は包絡線分布との対応性

$$P(-\infty)=0, \quad P(+\infty)=0 \quad (15)$$

また

$$dP(Z)/dZ=0 : 1-e^{2Z}=0 \quad \therefore Z=0 \quad (16)$$

となつてその形はもとの正規分布(8)式によく似ている。また、つぎに

$$a \rightarrow \infty \quad P(Z) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{Z - \frac{(e^Z - a)^2}{2}\right\} \quad (17)$$

$$\therefore P(-\infty)=0, \quad P(+\infty)=0 \quad (18)$$

また最多頻度の位置は

$$\begin{aligned} \frac{dP(Z)}{dZ} &= 0 : 1 - e^Z(e^Z - a) = 0 \\ Z &= \log[(a + \sqrt{a^2 + 1})/2] \div \log a \end{aligned} \quad (19)$$

を中心とするほぼ左右対称な Gauss-Laplace 分布の形を呈している。そこで以上の二式を平均的にまとめて総合し、最多頻度あるいは全平均の値を $\bar{Z}$ 、偏差を σ とすれば両者と

$$P(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot \exp - \frac{(Z - \bar{Z})^2}{2\sigma^2} \quad (20)$$

が得られる。これは対数正規分布である。ここに

$$\varepsilon=1 : \bar{Z}=0, \quad \sigma=\sqrt{e}/2 \quad (21)$$

$$a=\infty : \bar{Z}=\log a, \quad \sigma=1/a \quad (22)$$

3 対数正規分布の諸性質

前述のように対数正規分布は大観すれば時系列理論の極値の理論と包絡線の理論の2つを兼ねしていることになる。そして測定値そのものでなくその対数をとることから必然的に微少値が瀧過される傾向にあり、中程度以上の大きな値が特に重要視される工学的問題、さらには速度や加速度等の高次時間微係数には振幅が整然とまとまり易く極端に高い稀発性のものも対数をとることによって尺度を縮少して見易くまとめる点ではたしかに優れた特徴があると思われる。

第4,5図 動揺速度加速度の頻度分布

第6図 対数変換による動揺速度の頻度分布

第7図 対数変換による動揺加速度の頻度分布

しかしその反面、かなり頻度分布に山が乱立したもののも概括的に正規分布で統一する傾向が強く、このため微視的に重要な現象が看過される危険性のあることに注意しなければならない。

4 多数の極大確率密度がある頻度分布曲線の性質

動揺のスペクトル分布は起伏が多くその一つ一つは正則分布をなしていると思われるので各々の面積をとつて規則成分と置き換えるとこれは

$$\xi = \sum_{n=1}^N C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (23)$$

の形で表わすことができる。そこで平均周波率 ω と平均位相 θ で全体を包絡線的にまとめて

$$\left. \begin{aligned} \xi &= R \cos(\omega t + \theta), \quad R = \sqrt{\xi_c^2 + \xi_s^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \xi_s / \xi_c \\ \xi_c, \xi_s &= \sum_{n=1}^N C_n \{\cos, \sin\}(\omega_n - \omega t + \varphi_n) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\therefore \text{ave. } e^{i u \xi_s + i v \xi_c} = \prod_{n=1}^N J_0(C_n \sqrt{u^2 + v^2}) \quad (25)$$

ξ_c と $\xi_c + d\xi_c$ および ξ_s と $\xi_s + d\xi_s$ 間の確率密度は特性函数の様式で

$$d\xi_c d\xi_s \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty du \int_0^\infty dv e^{-i u \xi_s - i v \xi_c} \prod_{n=1}^N J_0(C_n \sqrt{u^2 + v^2}) \quad (26)$$

ここで

$$\xi_c = R \cos \theta, \quad \xi_s = R \sin \theta; \quad u = r \cos \varphi, \quad v = r \sin \varphi$$

とおき θ および φ につき0から 2π まで積分すれば R と $R+dR$ 間の確率密度を $P(R)dR$ とすれば

$$P(R) = R \int_0^\infty r \prod_{n=1}^N J_0(C_n r) J_0(R r) dr \quad (27)$$

が得られる。現在までに解析されているのは N が1および $N=2$ の場合だけである。すなわち

$$N=1: \quad P(R) = R \int_0^\infty r J_0(C_1 r) J_0(R r) dr = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{R^2 - C_1^2} & 0 \leq C_1 \leq R \\ 0 & R \geq C_1 \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} N=2: \quad P(R) &= R \int_0^\infty r J_0(C_1 r) J_0(C_2 r) J_0(R r) dr \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{R}{\sqrt{(C_1 + C_2^2 - R^2)(R^2 - C_1 - C_2^2)}}, & C_1 - C_2 \leq R \leq C_1 + C_2 \\ 0, & R \leq C_1 - C_2, R \geq C_1 + C_2, (C_1 > C_2) \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

$N \geq 4$ は Abel 函数の開発を待たねばならぬから、ここに述べる $N=3$ の場合が楕円函数を応用し得る限界となる。

5 スペクトルに3個の極値があるときの頻度分布曲線の性質

船が複雑な海況中に在るときは、スペクトルには多数の Peak が現われる。これらの中で代表的なのは、海洋波の卓越週期に対するものと、横揺と縦揺又は上下揺の固有週期に対するものの計3個が一般的に考えられる。この場合は $N=3$ にあたり

$$P(R) = R \int_0^\infty r J_0(C_1 r) J_0(C_2 r) J_0(C_3 r) J_0(Rr) dr \quad (30)$$

ここで演算の便宜上

$$R \equiv C_4 \quad C_1 \geq C_2 \geq C_3 \quad (31)$$

とおけば $N=2$ のときが $C_1, C_2, C_3 (=R)$ が三角形の3辺に対応したとき (29) という積分値が存在したのと同じように、 $N=3$ のときは $C_1, C_2, C_3, C_4 (=R)$ が四辺形の4辺を構成するとき

$$16\Delta^2 = \prod_{n=1}^4 \left(\sum_{m=1}^4 C_m - 2C_n \right) \quad (32)$$

として

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_4 &> C_2 + C_3 & \therefore \Delta > C_1 C_2 C_3 C_4 \\ \text{or } C_1 + C_4 &< C_2 + C_3 & \therefore \Delta < C_1 C_2 C_3 C_4 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

によつて次のようになる。

$$w^2 = C_2^2 + C_3^2 - 2C_2 C_3 \cos \phi, \quad (34)$$

$$\frac{w^2 - (C_1 - C_4)^2}{w^2 - (C_2 - C_3)^2} = \frac{(C_1 + C_4)^2 - (C_1 - C_4)^2}{(C_1 + C_4)^2 - (C_2 - C_3)^2} u^2 \quad (35)$$

という変換を順次行えば

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r \prod_{n=1}^4 J_0(C_n r) dr &= \frac{1}{\{\Gamma(1/2)\}^2} \int_0^\infty \int_0^\pi J_0(C_1 r) J_0(C_4 r) J_0(wr) r dr d\phi \\ &= 2 \int_{\cos^{-1} - \{(C_1 + C_4)^2 \text{ or } (C_2 + C_3)^2 - C_2^2 - C_3^2\} / 2C_2 C_3}^{\cos^{-1} - \{(C_1 - C_4)^2 - C_2^2 - C_3^2\} / 2C_2 C_3} \frac{1}{\sqrt{(C_1 + C_4^2 - w^2)(w^2 - C_1 - C_4^2)}} d\phi \\ &= \frac{4}{\pi^2} \int_{C_1 - C_4}^{C_1 + C_4, \text{ or } C_2 + C_3} \frac{w dw}{\sqrt{(C_1 + C_4^2 - w^2)(w^2 - C_1 - C_4^2)(C_2 + C_3^2 - w^2)(w^2 - C_2 - C_3^2)}} \\ &= \frac{1}{\pi^2 \Delta} \int_0^{1 \text{ or } 1/k} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\pi^2 \Delta} K(k) & k < 1 \\ \text{or } \frac{1}{\pi^2 \sqrt{C_1 C_2 C_3 C_4}} K\left(\frac{1}{k}\right) & k > 1 \end{cases} \quad k = \frac{\sqrt{C_1 C_2 C_3 C_4}}{\Delta} \quad (36) \end{aligned}$$

この値が無限大となるときは

$$k=1 : \Delta = \sqrt{C_1 C_2 C_3 C_4} \quad (37)$$

を満足するときである。すなわち

$$\prod_{n=1}^4 \left(\sum_{m=1}^4 C_m - 2C_n \right) = 16 \prod_{n=1}^4 C_n \quad (38)$$

を満足する C_4 を4次方程式の根として算出すればよいのであるが、一般には $C_1 \gg C_2 \gg C_3 \approx 0$ の関係から第一近似として

$$\begin{aligned} \Delta &\approx 0 : \\ \therefore C_4 &= C_1 - C_2 - C_3, \quad C_2 - C_3 - C_1, \quad C_3 - C_1 - C_2, \quad C_1 + C_2 + C_3 \end{aligned} \quad (39)$$

これを基礎にして第二近似を行えば

$$C_4 = \begin{cases} (C_1 - C_2 - C_3) \times \{1 + 2C_1 C_2 C_3 / C_2 + C_3 \cdot C_1 - C_2 \cdot C_1 - C_3\} \\ (C_2 - C_3 - C_1) \times \{1 + 2C_1 C_2 C_3 / C_3 + C_1 \cdot C_2 - C_3 \cdot C_2 - C_1\} \\ (C_3 - C_1 - C_2) \times \{1 + 2C_1 C_2 C_3 / C_1 + C_2 \cdot C_3 - C_1 \cdot C_3 - C_2\} \\ (C_1 + C_2 + C_3) \times \{1 - 2C_1 C_2 C_3 / C_1 + C_2 \cdot C_2 + C_3 \cdot C_3 + C_1\} \end{cases} \quad (40)$$

第8,9図 3個の Fourier 成分
による頻度分布

が得られる。この中二根が一般には正の値となる。つまり頻度分布の上には一般に2個の最多頻度が発現し得ることになる。

この中動揺の安全性の見地から特に重要なのは $\Delta \geq 0$ の条件から得られる C_4 の最大限界値

$$C_4 = C_1 + C_2 + C_3 \quad (41)$$

であつて、3個の卓越成分の他にさらにもつと細微な成分が共存するときはこれも往々にして確率密度の極大の位置に対応し得るという新しい事実が発見される。

すでに述べた $N=1$ および $N=2$ についての同様の性質から帰納すれば

第10図 3個の Peak を有するスペクトル分布と頻度分布

第11図 3個の Peak を有するスペクトル分布と頻度分布

$$\xi = \sum_{n=1}^N C_n \cos(\omega n t + \varphi_n) \quad (42)$$

という複雑な合成動揺は一般には頻度分布曲線の上には N 個の極大確率密度を有し、その最右端の限界は、

$$\xi = \sum_{n=1}^N C_n \quad (43)$$

であるということになる。

6 結 言

従来不規則動揺を Fourier 級数に展開したとき、各成分振幅が全部完全に重複し位相が一致することは絶無に近いと常識的に考えられていたが、時系列理論の立場からはこんな理想の場合も発現性がかなり高いという結論に到達する。この結果は現在では船の動揺安全性を論ずる場合、単純な横揺、縦揺、上下揺各単独の共振だけを一応の目安としているのであるが、おそらく操船によつて遭遇せずにはすみかもしれない最悪の場合は、上述のほかに誘振をも算出してそれらを全部加えた空間的最大傾斜角を考慮すればよいことになる。

統計的諸問題で実際に基礎となるのは Spectrum や Fourier 級数よりも頻度分布であるが、これを作製する上でいかにその現象をよく把握するにはどんな尺度を選び、どれくらいの間隔で区切って密度をとつたらよいかという技術的問題を念頭におかねばならぬが、もし短時間の現象を細密に観察する場合には計測誤差にかからぬ程度で動揺振幅そのままを入念に小さい間隔で読取り、反対に長時間の記録を概観する時には極端に高い値も手頃な範囲に収まるように変換を行ない、さらに間隔も許し得るかぎり大きくとらねばならぬことになる。

この研究も水品船局長をはじめ造船研究協会第十七部会の委員各位には色々とお世話になった。御教示を深謝する次第である。