(昭和36年5月造船協会春季講演会において講演)

船の波浪中動揺応答の解析法について (その1)

正員 山 内 保 文*

“On the Analysis of the Ship Oscillations among Waves—Part I”

By Yasufumi Yamanouchi, *Member*

Summary

The characters, especially the linearity, of the response of ship oscillations among waves were investigated, and the relations between different types of expressions of linear responses, and the way to get them and to convert them each other were summarized. For example, the way to get the frequency response of the oscillation among waves from the free damping test was introduced.

This is to prepare the clear understandings of the characters of responses which appear in spectra as well as in correlogram, including the cross-spectrum and the cross-covariance function, which will be treated in the analysis of oscillations among irregular waves in Part II and III of this paper.

I 緒 論

不規則波中の船の動揺の応答は様々な形で示される。スペクトラムはその一つであつて、スペクトラム解析による輝かしい成果は既に認められている所である。しかしスペクトラムは船の応答の統計的、時間平均的な性質は示しても、微視的な例えば不規則な波に対する動揺の時々刻々の変化等を示すには全く無力であると思われていた。スペクトラムが波は波、動揺は動揺のいわばオートスペクトラムとも云うべきものに限られている限り、そう云つてもよい。所が最近クロススペクトラムの導入により、応答の位相をも含めた完全な周波数特性がスペクトラムによつて表示されていることが分り¹⁾、例えば著者等²⁾によつて試験水槽中に起こした不規則波中の実験結果を使つて実証された。

スペクトラムから完全な周波数応答特性が求められれば、そのフーリエ変換はいわゆる単位衝撃波応答函数であるから、これを核函数として入力波形を積分することにより、動揺の時々刻々の変化も示されることになることは当然である³⁾。なおまたこの単位衝撃波応答函数は、波と応答との相互相関函数をも含めて考えると、コレログラム相互の関係としても示されている。しかし現状は、不規則波中の応答の解析には、スペクトラム解析の成果に目を奪はれすぎて、コレログラムすら著者による前の研究⁴⁾等を除いては、ほとんど顧みられていない。しかし乍ら、船の応答の表現には、目的に応じたもの、得易いもの、用い易いものを選ばよいのであつて、例えばスタビライザーの制御に必要なある運動の短時間の予測には、核函数による表示が適していると思われるし、また船の動揺の運動方程式のように、比較的次数の低い、云い換えればパラメーターの数の少い関係で結ばれているもののパラメーターの推定にはコレログラムの方がスペクトラムより適している。そして必要ならばこれらは相互に変換も可能である。

このように応答の性質を明らかにするのに、時間の場合、周波数の場合の性質を縦横に駆使すればよい。しかし従来、船の動揺の応答については、これらの点があまりはつきりとされていたとは思われず、例えば単位衝撃波応答函数などもほとんど顧みられていない。そこで著者はこの論文(その2)以降で不規則波中の問題を扱うにきき立ち、この(その1)において船の動揺応答の基礎的性質、応答の様々な表現相互の関係、それらの求め方等についてまとめた。

なお動揺の性質を考えるに当つて、スペクトラム・コレログラム解析の適用性を常に疑わしめている横揺の非線型性に注目し、航走中の横揺れでは前進速度0の場合からの予測に反して、線型性がかなり満足されることをも明らかにした。

原稿受付 昭和35年12月20日

* 運輸技術研究所

II 動揺の一般的性質

2.1 動揺の運動方程式とその各項の性質

一般に波浪中の船の動揺を示す運動方程式は、船の重心の平均速度で絶体空間に対して進行方向に平行に動く座標軸に関して表わされる。Froude-Kriloff の仮定に基づいて船の存在による波の破壊反射等波と船との相互影響を無視し、流体の浮力に基づく力と、流力的な力のうち、運動の加速度、速度、平衡位置からの外れに基づく力を左辺に移し、加速度に基づく項をまとめた慣性項、速度に基づく減衰項、変位に基づく復原項との和が右辺の静止している船体にかかる波による強制力または強制モーメントに等しいという形で近似される。即ち、例えば上下揺は

$$(m+m_z')\ddot{z}+N_z\{\dot{z}\}+K_z\{z\}=Z_0 \quad (2.1)$$

横揺は

$$(I_x+I_x')\ddot{\phi}+N_\phi\{\dot{\phi}\}+K_\phi\{\phi\}=L_0 \quad (2.2)$$

といった形である。第1項、第2項、第3項がそれぞれ加速度、速度および変位について線型な函数で近似できる場合には、この運動は外力または外力のモーメントに対して線型であるということができ、さらに右辺の強制項が波高に対して線型な場合には、動揺は波高に対しても線型であると云うことができる訳である。このように左辺がすべて平水中の船の動揺の性質のみによつて定まり、サージングが少いとして前進速度の影響を無視すれば、単に船の動揺の周波数 $\omega=2\pi/T$ (即ち波との出会周波数 ω_e) のみによつて定まり、波と船の出会角度、相対的な大きさの割合波長波高の絶体値等波の性質には全くよらない。そのような波の性質はすべて右辺の強制項のみに含まれる。即ち波浪中の船の動揺の性質も、平水中の船の動揺を示す性質に、波から静止している船にかかる強制項の性質を別箇に考え合せればよいという意味で、この表現は極めて便利に使われる近似形式である。

m_z' , I_x' はそれぞれ軸方向および x 軸周りの付加質量および付加慣性モーメントであるが、その成立ちが船体の運動によつて船体周りの流体の加速されることにより生ずる以外に、自由表面上に船の動揺によつて生ずる波のうち、船体周りに停滞するもの、加速度の位相のものを示すことから考えると、動揺の周波数 ω によつて変化することは明かである。F.M. Lewis による有名な成果は $\omega \gg 0$ に対するものと考えればよく、O. Grim が横揺に対して与えたものは $\omega \approx 0$ の場合で、この両者は両極端であるが、その中間の任意の ω についても O. Grim, F. Ursell を始め、元良、田村助教授等の理論的実験的研究がある。一般には ω による変化は複雑であるが、一つの動揺のモードに限定すれば、慣性質量またはモーメントを加えた見掛け質量またはモーメントは一般には ω についての冪の多項式と考えることができる。慣性項が $A_1(\omega)$ を係数とする加速度についての線型な形で表わされることには疑問がない。

船の動揺によつて船体表面の流体摩擦に基づき生ずる摩擦抵抗、および船体不連続部から生ずる渦渦抵抗、Head Resistance は一般には動揺速度の2乗に比例すると云われるが、1乗および3乗に比例する部分もあり⁶⁾ 造波に基づく造波抵抗は動揺速度の1乗に比例する。従つて動揺の減衰抵抗は、例えば横揺の符号を用いて

$$N_\phi\{\dot{\phi}\}=N_1\dot{\phi}\pm N_2\dot{\phi}^2+N_3\dot{\phi}^3+\cdots=I(2\alpha\dot{\phi}\pm\beta\dot{\phi}^2+\gamma\dot{\phi}^3+\cdots) \quad (2.3)$$

のような形になる。縦揺、上下揺の場合は、造波抵抗の占める割合が他のものにくらべて極めて大きく、第2項以下は無視して差支えない場合が多い。前進速度のない場合には第2項が比較的大きいことの知られている横揺についても、就航状態に近い前進速度を有する場合には、普通前進速度のない場合から考えられている以上に造波抵抗が大きく、他の成分が無視できることは、次節にまとめて示す所である。即ち減衰抵抗に対する(2.3)式は第1項のみの線型な形で近似できる場合が多く、 $N\{\dot{\phi}\}=2I\cdot\alpha\cdot\dot{\phi}=2I\cdot\omega\cdot\kappa\cdot\dot{\phi}$ の形となる。 κ は減衰の無次元表示である。造波抵抗が動揺のために自由表面に生成された波高 $2c$ の波が遠方に伝播されてエネルギーを散逸することより生ずるものであるから、この N_1 , α , κ 等が動揺の周波数 ω によつて変化することも明かである。そしてこの場合減衰力または減衰モーメントのなす仕事の割合は、二次元的な船体を考えた場合には波高 $2c$ の波となつて遠方に伝播されるエネルギーの割合に等しいという関係から、よく知られた

$$N_{z1}=\frac{\rho g^2}{\omega^3}\left(\frac{c}{z_0}\right)^2=\frac{\rho g^2}{\omega^3}\bar{A}_z^2, \quad N_{\phi 1}=\frac{\rho g^2}{\omega^3}\left(\frac{c}{\phi_0}\right)^2=\frac{\rho g^2}{\omega^3}\bar{A}_\phi^2 \quad (2.4)$$

が成立つ。 $\bar{A}$ は波の振幅と動揺の振幅との比で、シリンダーや、また船の模型についての多く実験的、理論的な

計算結果があり、 ω による $\bar{A}$ の変化として示されている。例えば横揺について云うと、F. Ursell⁹⁾は円形、楕円形シリンダー、平板、さらにはビルヂサークルのかなり小さい船の断面形のシリンダー等の横揺についてこの波高 $2c$ を厳密に求めて $c=k^2\phi_0 f(a, b)$ の形を得ている。 $f(a, b)$ はこの断面の幾何学的形状から定まる函数である。 $k=\omega^2/g$ を代入して

$$c=\frac{\omega^4}{g^2}\phi_0 f(a, b) \quad \therefore \bar{A}\phi=\frac{c}{\phi_0}=\frac{\omega^4}{g^2}f(a, b) \quad (2.5)$$

となるから (2.4) 式に入れて $N_{\phi 1}=\frac{\rho}{g^2}\omega^5 f(a, b)=K\omega^5$ が得られる。もし strip method が用いられるとすれば、三次元の船についても $N_{S1}=\frac{\rho}{g^2}\omega^5\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}f(a, b)d\xi$ の形に表わされるから、 $N_{\phi 1}$ が ω の5次式で表わされることになる。一般にはこのように簡単ではないであろうが、これは一つの例で、動揺の減衰係数 N_1 は一般に ω の冪の多項式 $A_2(\omega)$ で表わすことができると云つてよい。

復原項は静水中の船の平衡位置からの位置のズレによつて船に働く浮力または浮力によるモーメントで、最も一般的には

$$K\{z\}=K_1z+K_2z^2+K_3z^3+\dots \quad (2.6)$$

の形で表わされる。縦揺や上下揺で船首のフレアーや船尾の影響が大きくないとき、および横揺の場合等では、平衡位置からのズレ方向によつて大きさが変わらないので奇数項のみとなり、運動の振幅がそれ程大きくない場合には第1項のみで表わして差支えなく、線型となる。前進速度の場合、殊にビルヂキールのない船の横揺のように減衰が小さく振幅が大きくなるような場合には船型によつて3乗の項まで必要な場合もあるが、次節に示すように就航状態に近い前進速度をもつ場合には、普通の船型では横揺においても減衰抵抗が予想以上に大きく、振幅は略それに反比例して小さくなるので、1次の項 K_1 を考えるのみで十分な場合が多い。 K_1 は常数であつて ω によらず一定であり、且スウェー・サージ等の場合にはこれも0である。しかし後に述べるような連成のある場合をも考えると最も一般的には $A_3(\omega)$ のように ω の函数として考えるのがよい。

右辺の強制項は Froude-Kriloff の仮定に基づけば静止している船体にかかる波による力またはモーメントであるが、横揺の場合の active resistance のようにこの仮定に従わないものでも、強制項の修正項として線型演算によつて付加えられるものもある。前に述べたように運動方程式の左辺が波と船との出会角度、波長、船と波との相対の大きさ等によつて全く影響を受けないのに対し、この右辺にある強制項はこれらによつて変化するものである。波が周波数 ω で正弦的に変化する規則正しい波形 $x_\omega(t)=X(\omega)e^{j\omega t}$ である場合には、Froude-Kriloff の仮定によれば、容易に計算されるものであつて、波長従つて ω の函数であること勿論である。これは波高 x_ω があまり大きくない範囲では、波高の線型な函数と考えてよい。従つて一般に $B(\omega)x_\omega$ という形で表わされる。 $B(\omega)$ には一般には ω の複素数で表わされる。例えば横揺の場合には波長が船の幅に比して大きいという仮定の下にさらに簡単に復原モーメント曲線より求めているが、それを補うものとして、船の大きさと波の大きさとの相対関係、あるいは船の重心高さ等の効果を有効波傾斜係数 γ によつて代表させている。渡辺教授¹¹⁾はこれを式の形で示されたが、その簡単化した表現¹²⁾

$$\gamma=1-\frac{b}{m}\cdot\frac{\phi}{b}$$

$$\frac{\phi}{b}=\left(\frac{1}{3}c_w-K_1\right)\beta-(K_2c_w-K_3)\beta^2 \quad (2.7)$$

を用いると、 $K_1K_2K_3$ 等は波長 L_w 、波周期 T_w 、喫水線より重心までの距離 a_g 、喫水 h_1 、船の半幅 b 、GM の値 m 等によつて定まる $\alpha=\frac{c_b}{c_w}\cdot\frac{h}{b}$ 、 $\lambda=\frac{c_w}{c_b}\cdot\frac{a_g}{h}$ などのパラメーターによつて曲線の形で与えられているが、どれも船によつて定まる常数である。 $\beta=\frac{2\pi b}{L_w}=\frac{\omega^2}{g}b=\text{const}\cdot\omega^2$ であることから (27) 式は

$$\gamma(\omega)=1-k_1\omega^2+k_2\omega^4 \quad (2.8)$$

ただし

$$k_1=\frac{b}{m}\left(\frac{1}{3}c_w-K_1\right)\frac{b}{g}, \quad k_2=\frac{b}{m}(K_2c_w-K_3)\frac{b^2}{g^2}$$

のような ω の4次式の形となる。

波傾斜 $\Theta_0(\omega)$ は波高 $X(\omega)$ に対して $\pi/2$ 位相が進んでいるから、横揺に対する外力のモーメント

$B(\omega)X(\omega)e^{j\omega t}$ は次のように表わすことができる。

$$B(\omega)X(\omega)e^{j\omega t} = \Delta \cdot GM \cdot r \Theta_0(\omega)e^{j\omega t} = I \cdot \omega_0^2 \cdot r(\omega) \cdot \frac{\omega^2}{g} \cdot X(\omega)e^{j(\omega+\pi/2)} \quad (2.9)$$

したがって

$$B(\omega) = I \cdot \omega_0^2 r(\omega) \cdot \frac{\omega^2}{g} e^{j(\pi/2)} = j \cdot I \cdot \omega_0^2 r(\omega) \cdot \frac{\omega^2}{g} \quad (2.10)$$

$r(\omega)$ が (2.8) 式で表わされるときには

$$B(\omega) = jI(\omega) \cdot \omega_0^2 \{1 - k_1 \omega^2 + k_2 \omega^4\} \cdot \frac{\omega^2}{g} \quad (2.11)$$

同じようにして上下揺、縦揺に対しても $B_z(\omega)$, $B_\theta(\omega)$ が理論的にまた実験的に式の形、あるいは図表として求められる。

以上を要するに、波の振幅従つて運動の振幅が小さい場合には規則的な波 $x_w = X(\omega)e^{j\omega t}$ に対しては動揺の運動方程式は一般に周波数の函数を係数とする線型微分方程式

$$A_1(\omega)\ddot{y}_\omega + A_2(\omega)\dot{y}_\omega + A_3(\omega)y_\omega = B(\omega)x_\omega \quad (2.12)$$

の形で表わされる。

横揺とスウェイ、上下揺と縦揺のように比較的連成の影響の大きいものもある。例えば船体中心線面と水面との支点OのスウェイとO点周りの横揺との間の連成として O. Grimの与えている

$$\begin{cases} (m+m_q')\ddot{q} + N_q\dot{q} + m \cdot OG\ddot{\varphi} + \frac{I_0'}{h\varphi}\ddot{\varphi} + \frac{N_\varphi}{h\varphi}\dot{\varphi} = \text{波によるスウェイ力} \\ (I_0 + I_0')\ddot{\varphi} + N_\varphi\dot{\varphi} + g \cdot m \cdot GM\varphi + m \cdot OG\ddot{q} + m_q'h_q\ddot{q} + N_qh_q\dot{q} = \text{波による横揺モーメント} \end{cases} \quad (2.13)$$

の式からも分るように、このような場合には、お互に連成された他のモードの動揺の加速度、速度、変位からも力またはモーメントを受けることになる。Korvin-Kroukovsky¹⁰⁾はこれを上下揺と縦揺との連成について一般に

$$\begin{aligned} a\ddot{z} + b\dot{z} + cz + d\ddot{\theta} + e\dot{\theta} + g\theta &= \bar{F}e^{j\omega t} \\ A\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + C\theta + D\ddot{z} + F\dot{z} + Gz &= \bar{M}e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (2.14)$$

と表わしている。するとこの $a, b, c, \dots, A, B, C, \dots, F, M$ はみな ω の函数であることは明かである。

2.2 横揺運動の非線型

横揺においては、ビルヂキール等の存在によつて動揺減衰には角速度の2乗に比例する項の影響が大きいこと一般に減衰の絶対値が小さいために動揺の振幅が大きくなり復原項が ϕ に比例する項のみでなく ϕ^3 を含む項まで考えなければならなくなること等が相まつて非線型項の度合が極めて強いとされていた。このことは前進速度を持たない場合には確かに多くの実験結果から示されている。しかし就航状態に近い前進速度を持つような場合については、同じような傾向が想像されているのみで、従来水槽の形の上の制約から、実験的に示したものは

Fig. 1 横揺減衰に対する前進速度の影響

ほとんど見られない有様である。即ち単に横揺減衰についても、速度と共に二次の影響が減少するという傾向は分つていても、今までの水槽では、殊に低速時には水槽幅の影響が大きいこともあつて、従来の資料からはその真の姿は分らない。Fig. 1 は著者が Stevens Inst. of Tech., Davidson Laboratory の角水槽において、Todd Series 60, $c_b=60$ の模型を用い、減衰に対する前進速度の影響を調べたものである。無次元減衰抵抗値 $\kappa = \alpha/\omega$ は前進速度の増大と共に始めは徐々に、フルード数 0.1 を越える辺りより急激に増大し、フルード数 0.2 近傍で極大に達し、その後減少している。この傾向は中程度 (500 ft の実船で 2 ft 深さ) のビルヂキールのある場合もない場合も同様である。但しこの 2 つの場合で見掛の慣性モーメントも変化しているから、 κ の比較はそのまま減衰抵抗の比較にはならない。ビルヂキールのある場合にはこの一次の抵抗と共に、速度 0 の場合には二次の抵抗 β もかなりの大きさをもっているが、想像される通り、速度増加と共に次第に減少して、フルード数 0.2 の近傍では κ に対してほとんど無視して差支えない程度となる。 κ 値を比較のた

めに Van Manen⁸⁾ のオランダ水槽における実験結果と共に前進速度 0 の場合の値との比の形にして示したのか Fig. 2 であるが、極めてよく似た傾向を示し、菱田教授⁹⁾ が回転楕円体についての造波抵抗から計算されたものともそれぞれ極めてよく一致している。これから云つても、前進速度が増大するにつれて造波抵抗は急激に大きくなり、他方ビルヂキール等による二次の抵抗は減少するので一次の抵抗の占める割合は速度と共に増大し、就航状態に近いフルード数あるいはそれ以上では減衰抵抗はほとんど線型と考えてよいことが判る。これは一つの船型については相類似の上で疑問があるが、一般の船の傾向を示すものとは云つてよいであろう。

Fig. 3 復原挺曲線

をアナコムによつて解いた。 $r(\omega)$ は (2.8) より計算したものを用いた。一般に実験結果とかなりよく一致しているが、そこでは多くを述べられないので、純粋に非線型項の影響およびその前進速度による変化を示す数例について述べるに止める。Fig. 4 は前進速度 0 でビルヂキールのある場合に該当する $\beta \neq 0$, $k_3 \neq 0$ の場合である。Fig. 5 は $\beta = 0$ で $k_3 \neq 0$ の場合、Fig. 6 は $k_3 = 0$ で $\beta \neq 0$ の場合を示す。Fig. 5 では $\beta = 0$ のため減衰の絶対値が小さくなり非線型復原項の影響が大きくなって出ている。Fig. 6 と比較することにより、非線型減衰 β と非線型復原項 k_3 との影響の差が明らかであり、位相の表われ方は特に興味深い。Fig. 7 はこの船が前進速度 $F \div 0.20$ を持つ場合に該当し、前進速度 0 では大きな非線型応答を示した同じ波傾斜に対し振幅は非常に小さくなって、そのため線型な応答との開きが非常に小さくなっている。参考のために波傾斜の大きい場合の解をもこれに併せ記入したが、非線型影響は速度 0 の場合のその 1/3 の波傾斜に対するものよりも小さい。これを要するに、就航状態に近い前進速度を持つ場合には、横揺においても減衰の非線型性はほとんど消滅し、線型抵抗は大きく、横揺れ角も小さくなり、復原項の非線型性もあまり問題でなくなつて、一般には線型の近似で十分な場合が多いと云つてよい。

2.3 動揺の運動方程式の一般化

ある周波数 ω の規則正しい波 $x(t) = X(\omega)e^{j\omega t}$ から生ずる動揺の線型な強制力は bx で表わすことができるからこの波が長時間働いた後には、船の動揺 $y(t)$ の運動方程式は

$$a_1 \ddot{y}(t) + a_2 \dot{y}(t) + a_3 y(t) = bx(t) \quad (2.16)$$

の形で表わすことができる。このとき $y(t)$ は $Y(\omega)e^{j\omega t}$ の形となる。但し $Y(\omega)$ は一般に位相角 $\delta_x(\omega)$ を持つ $X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\delta_x(\omega)}$ に対し位相の遅れ $\sigma(\omega)$ を持つから $Y(\omega) = |Y(\omega)|e^{j\{\delta_x(\omega) - \sigma(\omega)\}}$ で表わされるようなものである。もし慣性項、減衰項、復原項の係数 a_1, a_2, a_3 および強制項の係数 b が周波数 ω に関係なく常に一定であれば、波が $x(t) = X_{\omega_1}e^{j\omega_1 t} + X_{\omega_2}e^{j\omega_2 t} + \dots$ のように幾つかの規則正しい調和波の和で表わされるような場合、または任意の函数形 $x(t)$ で表されるような場合も、(2.16) 式の形で表わすことができる。しかし 2.1

Fig. 2 前進速度に対する横揺減衰変化率

この模型船を用い、実際に前進速度を持つ場合の横揺中の応答を調べ、速度と共に非線型性が減することを調べたが、ここにはそれと補う意味でアナログ計算機によつて調べた結果について示す。さきに得られた $\omega = \omega_0$ における κ, β の値と、Fig. 3 に示すようなこの模型船の復原力曲線から定まる $\omega_0^2 \phi + k_3 \phi^3$ を用い

$$I\ddot{\phi} + I \cdot 2\kappa \cdot \omega \dot{\phi} \pm I \cdot \beta \phi^2 + I \cdot \omega_0^2 \phi + I \cdot k_3 \phi^3 = I \cdot r \Theta \omega^2 \cos \omega t \quad (2.15)$$

Fig.4 非線型周波数応答曲線 ($\beta \neq 0, k_3 = 0$) Fig.5 非線型周波数応答曲線 ($\beta = 0, k_3 \neq 0$) Fig.6 非線型周波数応答曲線 ($\beta \neq 0, k_3 = 0$) Fig.7 非線型周波数応答曲線 ($\beta = 0, k_3 \neq 0$)

で述べて来たように、 a_1, a_2, a_3 および b は時間に関しては不変であつても ω によつては変化して一定でなく $A_1(\omega), A_2(\omega), A_3(\omega)$ および $B(\omega)$ と表わされるものである。従つて (2 16) 式の表現は $x(t)$ が $x_\omega(t) = X(\omega)e^{j\omega t}$ の形の規則正しい調和波で、動揺 $y(t)$ が同じ周波数 ω の $y_\omega(t) = Y(\omega)e^{j\omega t}$ の形になつたときのみ厳密に成立ち (2 12) の形をとるものである。 $x_\omega(t), y_\omega(t)$ を (2 12) に代入すると、次の式が得られる。

$$-\omega^2 A_1(\omega) Y(\omega) e^{j\omega t} + j\omega A_2(\omega) Y(\omega) e^{j\omega t} + A_3(\omega) Y(\omega) e^{j\omega t} = B(\omega) X(\omega) e^{j\omega t} \quad (2 17)$$

外力が一般の任意の函数 $x(t)$ で表わされる波から来る場合には、運動方程式はどうなるのであろうか、これには、W J Pierson¹⁸⁾ および L Tick¹⁴⁾ が、係数が周波数 ω の函数である微分方程式の性質について述べたものがある。このとき $x(t)$ かフーリエ変換を有するとすれば

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2 18)$$

これは $x(t)$ か周波数 ω の無限に小さい規則正しい波形 $X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ が無限に多く集つたものであると考えることである。するとこの動揺系は線型と考えているから、船の動揺の応答も、この個々の周波数の波に対する応答を全周波数に互つて加え合せたものと考えることが出来る。即ち

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2 19)$$

したがつてこの場合の運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \{-\omega^2 A_1(\omega)\} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \{j\omega A_2(\omega)\} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} A_3(\omega) Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (2 20)$$

となる。(2 19) より $y(t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} e^{-j\omega \tau} d\omega$ である、

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_i(\omega) e^{j\omega \tau} d\omega = k_i(\tau) \quad (2 21) \quad A_i(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_i(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \quad (i=1, 2, 3) \quad (2 21)'$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) e^{j\omega \tau} d\omega = l(\tau) \quad (2 22) \quad B(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} l(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \quad (2 22)'$$

となるような係数 $A_1(\omega), A_2(\omega), A_3(\omega)$ および $B(\omega)$ フーリエ逆変換 $k_1(\tau), k_2(\tau), k_3(\tau)$ および $l(\tau)$ を考えると (2 20) 式はフーリエ畳み込み (Fourier Convolution) の形となつて

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_1(\tau) y(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau) \dot{y}(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} k_3(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} l(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad (2 23)$$

または Convolution の符号 $\int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) y(t-\tau) d\tau = k(t) * y(t)$ を使用すれば

$$k_1(t) * \dot{y}(t) + k_2(t) * \dot{y}(t) + k_3(t) * y(t) = l(t) * x(t) \quad (2 24)$$

と一見 (2 12) と同じ形となる。但しこれは積分微分方程式である。これらか波が一般の函数形 $x(t)$ で表わされるとき正しい運動方程式の表現である。Convolution の性質から $\int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} k(t-\tau) y(\tau) d\tau$ であるから (2 23) (2 24) はまた

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-\tau) y(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-\tau) \dot{y}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} k_3(t-\tau) y(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} l(t-\tau) x(\tau) d\tau \quad (2 25)$$

ともなる。物理的に実現可能なためには (2 33) 式で $\tau < 0$ に対して $k_i(\tau) = 0$ または (2 24) 式において $t - \tau > 0$, ゆえに積分の領域は (2 24) 式では $(0, \infty)$ に、(2 25) 式では $(-\infty, t)$ となつて

$$\sum_{i=1}^3 \int_0^{\infty} k_i(\tau) y^{(s-1)}(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} l(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad (2 24)'$$

$$\sum_{i=1}^3 \int_{-\infty}^t k_i(t-\tau) y^{(s-1)}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t l(t-\tau) x(\tau) d\tau \quad (2 25)'$$

となる。この方程式の物理的意味は、加速度、速度変位、外力の項が何れも現在の時点 t における値のみでは運動が定まらず、 $\int_0^{\infty} k_i(\tau) y^{(s-1)}(t-\tau) d\tau$, または $\int_{-\infty}^t k_i(t-\tau) y^{(s-1)}(\tau) d\tau$ が示すように、過去から現在に至るまでの履歴かすべて積分されたものによらなければならぬことを示している。即ちこの形は定常な運動のみで

なく transient なものも示すことができる。あるいは定常な応答も, transient な応答が無数に多く, 過去から現在に互つて合成されたものであると考えることができることを示している。P. Golovato¹⁵⁾の縦揺について試みた transient な解は減衰項のみをこの形にしたものと云つてよい。

もし $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$, $A_3(\omega)$ および $B(\omega)$ が ω の冪の多項式で

$$\begin{cases} A_i(\omega) = a_{i0}\omega^{n_i} + a_{i1}\omega^{n_i-1} + a_{i2}\omega^{n_i-2} + \cdots + a_{i(n_i-1)}\omega + a_{in_i} = \sum_{r=0}^{n_i} a_{ir}\omega^{n_i-r} \\ B(\omega) = b_0\omega^m + b_1\omega^{m-1} + b_2\omega^{m-2} + \cdots + b_{m-1}\omega + b_m = \sum_{r=0}^m b_r\omega^{m-r} \end{cases} \quad (2.26)$$

のように表わすことができると

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} k_i(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_i(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \sum_{r=0}^{n_i} a_{ir} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{n_i-r} e^{j\omega\tau} d\omega \\ \frac{1}{2\pi} l(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \sum_{r=0}^m b_r \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{m-r} e^{j\omega\tau} d\omega \end{cases} \quad (2.27)$$

となるが, ω の冪のフーリエ変換として次の関係が用いられる。

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2n} e^{j\omega\tau} d\omega = (-1)^n \frac{d^{2n}}{d\tau^{2n}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = (-1)^n \frac{d^{2n}}{d\tau^{2n}} \delta(\tau) = (-1)^n \delta^{(2n)}(\tau) \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2n+1} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{j} (-1)^n \frac{d^{2n+1}}{d\tau^{2n+1}} \delta(\tau) = (-1)^{n+1} j \cdot \frac{d^{2n+1}}{d\tau^{2n+1}} \delta(\tau) = (-1)^{n+1} j \delta^{(2n+1)}(\tau) \end{cases} \quad (2.28)$$

ただしここで $\delta(\tau)$ は Dirac のデルタ函数で $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = \delta(\tau)$ であり, その性質から

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta^{(n)}(t_0 - t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0 - t) \delta^{(n)}(t) dt = f^{(n)}(t_0) \quad (2.29)$$

になるようなものである。これらの関係を用いると, 例えば $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(2n)}(\tau) \ddot{y}(t - \tau) d\tau = y^{(2n+2)}(t)$ となるから, 今一例として,

$$\begin{cases} A_i(\omega) = a_i\omega^5 + b_i\omega^4 + c_i\omega^3 + d_i\omega^2 + e_i\omega + g_i \quad (i=1, 2, 3) \\ B(\omega) = h\omega^6 + k\omega^5 + m\omega^4 + n\omega^3 + p\omega^2 + q\omega + r \end{cases} \quad (2.30)$$

というように $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$, $A_3(\omega)$ が ω の 5 次式, $B(\omega)$ が ω の 6 次式で表わされると,

$$\frac{1}{2\pi} k_i(\tau) = -ja_i\delta^{(5)}(\tau) + b_i\delta^{(4)}(\tau) + jc_i\delta^{(3)}(\tau) - d_i\delta^{(2)}(\tau) - je_i\delta'(\tau) + g_i\delta(\tau) \quad (2.31)$$

であるから, 例えば

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\tau) y^{(2)}(t - \tau) d\tau = -ja_1 y^{(7)}(t) + b_1 y^{(6)}(t) + jc_1 y^{(5)}(t) - d_1 y^{(4)}(t) - je_1 y^{(3)}(t) + g_1 y^{(2)}(t) \quad (2.32)$$

のようになり, 動揺の運動方程式は

$$\begin{aligned} & -ja_1 y^{(7)}(t) + (b_1 - ja_2) y^{(6)}(t) + (jc_1 + b_2 - ja_3) y^{(5)}(t) + (-d_1 + jc_2 + b_3) y^{(4)}(t) \\ & + (-je_1 - d_2 + jc_3) y^{(3)}(t) + (g_1 - je_2 - d_3) y^{(2)}(t) + (g_2 - je_3) y^{(1)}(t) + g_3 y(t) \\ & = -hx^{(6)}(t) - jkx^{(5)}(t) + mx^{(4)}(t) + jnx^{(3)}(t) - px^{(2)}(t) - jqx^{(1)}(t) + rx(t) \end{aligned} \quad (2.33)$$

となつて, もはや二次の常数微分方程式ではないが, この場合は複素数を係数とする 7 次の常微分方程式となることが分る。これから (2.30) で $A_i(\omega) = a_i$ ($i=1, 2, 3$), $B(\omega) = b$ となつてそれぞれ ω によらない常数のときのみ, この (2.31), (2.32) 式による計算を行つて (2.33) 式は

$$a_1 \ddot{y}(t) + a_2 \dot{y}(t) + a_3 y(t) = bx(t)$$

となつて (2.16) 式が成立つことがはつきりとする。同様にもう一つの例として, 横揺れについて既に述べて来たように

$$\begin{cases} A_1(\omega) = I_x + I_x' = I_0(\omega) = I_0 = \text{const.} \\ A_2(\omega) = K_\phi \omega^5 \\ A_3(\omega) = K_1 = \text{const.} \\ B(\omega) = j \cdot I_0 \omega_0^2 \{1 - k_1 \omega^2 + k_2 \omega^4\} \frac{\omega^2}{g} = j \left(I_0 \cdot \frac{\omega_0^2}{g} \right) \{k_2 \omega^6 - k_1 \omega^4 + \omega^2\} \end{cases} \quad (2.34)$$

を仮定すると, (2.30), (2.31), (2.32) 同計算を行なつて

$$-jK\phi y^{(6)}(t) + I_0 y^{(2)}(t) + K_1 y(t) = j \cdot \frac{I_0 \omega_0^2}{g} \{-k_2 x^{(6)}(t) - k_1 x^{(4)}(t) - x^{(2)}(t)\} \quad (2.35)$$

という運動方程式が得られる。

III 波に対する動揺の周波数応答特性と単位衝撃波応答特性

3.1 周波数応答函数

規則正しい単一周期 ω の波が線型な動揺特性ともつ船に働いたときの動揺の運動方程式 (2.12) (2.17) より動揺の振幅 $Y(\omega)$ と波の振幅 $X(\omega)$ との比 $H(\omega)$ が求められ

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{B(\omega)}{-\omega^2 A_1(\omega) + j\omega A_2(\omega) + A_3(\omega)} \quad (3.1)$$

これを動揺の波に対する周波数特性と云っている。 $H(\omega)$, $X(\omega)$, $Y(\omega)$ はそれぞれ絶対値と位相の関係を含みから

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta(\omega)}, \quad X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\delta_x(\omega)}, \quad Y(\omega) = |Y(\omega)|e^{j\delta_y(\omega)} \quad (3.2)$$

(3.1) に代入して

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta(\omega)} = \frac{|Y(\omega)|}{|X(\omega)|} e^{j\{\delta_y(\omega) - \delta_x(\omega)\}} \quad (3.3)$$

$$\therefore |H(\omega)| = \left| \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \right|, \quad \theta(\omega) = \delta_y(\omega) - \delta_x(\omega) \quad (3.4)$$

一般に応答の波に対する遅れの位相を云う場合が多いのでこれを $\sigma(\omega)$ とおくと,

$$\sigma(\omega) = -\theta(\omega) = -\arg[H(\omega)] = \arg[\overline{H(\omega)}] \quad (3.5)$$

また

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta(\omega)} = |H(\omega)|\cos\theta(\omega) + j|H(\omega)|\sin\theta(\omega) = c(\omega) + jq(\omega) \quad (3.6)$$

とおくと, $c(\omega) = |H(\omega)|\cos\theta(\omega)$, $q(\omega) = |H(\omega)|\sin\theta(\omega)$ であつて, $\overline{H(\omega)}$ は $\overline{H(\omega)} = c(\omega) - jq(\omega)$ のような $H(\omega)$ の共軛複素数である。また

$$\left. \begin{aligned} |H(\omega)| &= \{H(\omega) \times \overline{H(\omega)}\}^{1/2} = \{c^2(\omega) + q^2(\omega)\}^{1/2} \\ \sigma(\omega) &= -\theta(\omega) = -\tan^{-1} \left\{ \frac{q(\omega)}{c(\omega)} \right\} = \tan^{-1} \frac{-q(\omega)}{c(\omega)} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

という関係があるのは周知の通りである。

形の上から云うと $c(\omega)$ は $H(\omega)$ の実数部 $\text{Re}\{H(\omega)\}$, $q(\omega)$ は虚数部 $\text{Im}\{H(\omega)\}$ であり, また Fig. 8 に示すように $c(\omega)$ は応答 $Y(\omega)$ の波 $X(\omega)$ と同じ位相の成分, $q(\omega)$ は位相が 90° 進んだ成分であり, 従つて $\theta(\omega)$ は全体としての位相の進みを与えている。 $A_i(\omega)$, $B(\omega)$ が ω に関する函数として与えられているときにはその形を (3.1) 式に代入すればよい。例えば $A_i(\omega)$, $B(\omega)$ が (2.30) で表される場合には

Fig. 8 応答ベクトル

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{h\omega^6 + k\omega^5 + m\omega^4 + n\omega^3 + p\omega^2 + q\omega + r}{\{-\omega^2(a_1\omega^5 + b_1\omega^4 + c_1\omega^3 + d_1\omega^2 + e_1\omega + g_1) + (a_3\omega^5 + b_3\omega^4 + b_3\omega^3 + d_3\omega^2 + e_3\omega + g_3)\} + j\omega(a_2\omega^5 + b_2\omega^4 + c_2\omega^3 + d_2\omega^2 + e_2\omega + g_2)} \\ &= \frac{h\omega^6 + k\omega^5 + m\omega^4 + n\omega^3 + p\omega^2 + q\omega + r}{-a_1\omega^7 - (b_1 - ja_2)\omega^6 - (c_1 - jb_2 - a_3)\omega^5 - (d_1 - jc_2 - b_3)\omega^4 - (e_1 - jd_2 - c_3)\omega^3 - (g_1 - je_2 - d_3)\omega^2 + (jg_2 + e_3)\omega + g_3} \end{aligned} \quad (3.8)$$

のようになる。勿論これはふつうの常数係数の微分方程式 (2.33) を導いてから $x(t) = X(\omega)e^{j\omega t}$, $y(t) = Y(\omega)e^{j\omega t}$ を入れて直接 $Y(\omega)/X(\omega)$ として求めても同じである。

ふたたび例えば横揺の最も簡単な場合について考え

$$I(\omega)\ddot{\phi}_\omega(t) + N(\omega)\dot{\phi}_\omega(t) + K(\omega)\phi_\omega(t) = m_\omega(t) = B(\omega)x_\omega(t) \quad (3.9)$$

即ち

$$I(\omega) \cdot \ddot{\phi}_\omega(t) + I(\omega)2\alpha(\omega) \cdot \dot{\phi}_\omega(t) + I(\omega) \cdot \omega_0^2 \cdot \phi_\omega(t) = I(\omega) \cdot \omega_0^2 \gamma(\omega) \Theta_\omega(t) \quad (3.9)'$$

したがって波高に対する横揺の周波数特性 $H(\omega)$ 以外に横揺モーメントに対する周波数特性、波傾斜に対する周波数特性等も考えられ

$$H(\omega) = \frac{\Phi(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\Phi(\omega)}{M(\omega)} \cdot \frac{M(\omega)}{X(\omega)} = H_0(\omega) \cdot B(\omega) \quad (3.10)$$

ここで (3.9) より

$$H_0(\omega) = \frac{\Phi(\omega)}{M(\omega)} = \frac{1}{\{-\omega^2 I(\omega) + I(\omega) \cdot \omega_0^2\} + j \cdot 2\alpha\omega \cdot I(\omega)} = \frac{1}{I(\omega) \{(-\omega^2 + \omega_0^2) + 2j\alpha\omega\} B(\omega)} \quad (3.11)$$

また (2.9) より

$$B(\omega) = \frac{M(\omega)}{X(\omega)} = \frac{I(\omega) \cdot \omega_0^2 r(\omega) \Theta(\omega)}{X(\omega)} = j \cdot I(\omega) \cdot \omega_0^2 r(\omega) \cdot \frac{\omega^2}{g} \quad (3.12)$$

(3.10), (3.11), (3.12) は大切な関係式である。また横揺の場合 $\Phi(\omega)/r(\omega)\Theta(\omega)$ を Magnification factor (M. F.) としているが

$$\text{M. F.} = \Phi(\omega)/r(\omega)\Theta(\omega) = \frac{\Phi(\omega)}{M(\omega)} \cdot \frac{M(\omega)}{r(\omega) \cdot \Theta(\omega)} = H_0(\omega) \cdot I(\omega) \cdot \omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{(-\omega^2 + \omega_0^2) + 2j\alpha \cdot \omega} \quad (3.13)$$

でこれは振幅と位相遅れとの応答を別々に示すわれわれに見馴れた形となるものである。

3.2 周波数応答函数と単位衝撃波応答函数

波高 $x(t)$ が一般の任意の形で表わされると、これがフーリエ変換 $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ を有するときには、既に述べたように線型な動揺 $y(t)$ は同じく $y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ で表わされる。(3.1) より $Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$

$$\therefore y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.14)$$

Fig. 9 $U(t)$ と $\delta(t)$ 函数

ここで入力 $x(t)$ として Fig. 9 に示すように Dirac のデルタ函数 $\delta(t)$ で表わされる単位衝撃波を与えると、 $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ よりフーリエ逆変換 $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ であるからこの場合については

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1. \quad (3.15)$$

ゆえにそのときの動揺 $y(t)$ を $h(t)$ と表わして単位衝撃波応答函数と呼ぶと (3.14) に (3.15) を代入して

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.16)$$

するとこれより逆に

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.17)$$

が得られる。(3.16), (3.17) は周波数応答函数と単位衝撃波応答函数とが互にフーリエ変換によつて結びつけられていることを示すものである。

(3.14) より

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right\} e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right\} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = x(t) * h(t) \end{aligned} \quad (3.18)$$

これは先に述べた Fourier Convolution と云われる演算で $Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$ と相対するものである。同様に

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau) d\tau. \quad (3.18)'$$

この式は線型な動揺 $y(t)$ は積分演算子 $h(\tau)$ と波 $x(t)$ とによつて表わせることを示している。 $h(\tau)$ は核函数 (Kernel Function) と呼ばれ、又はこの式が入力 $x(\tau)$ に比重 $h(t-\tau)$ をかけて平均するという形であることから比重函数 (Weighting Function) と云われる。物理的に実現可能なためには $\tau < 0$ で $h(\tau) = 0$

であるから,

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad (3.19)$$

または

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau) x(\tau) d\tau. \quad (3.19)'$$

この式は, Fig 10 のように t_1 におけるこの系の応答出力が $(-a_1, t_1)$ の間にある。N 個の矩形パルスに対する応答の和であるという式

$$y(t_1) = \sum_{n=1}^N h(n \Delta\tau) g(t_1 - n \Delta\tau) \Delta\tau \quad (3.20)$$

において, $t_1 = t$, $\Delta\tau \rightarrow 0$ となり $-a \rightarrow -\infty$ となつた極限と考えることができる。これにより $h(\tau)$ の形が分れば過去の入力である波 $x(t-\tau)$ が分ると $y(t)$ を予測することができる。
(3.16), (3.17) 式より

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cos \omega\tau d\tau - j \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \sin \omega\tau d\tau \quad (3.21)$$

となるから, (3.4), (3.5), (3.6) の関係式を使つて, $H(\omega) = c(\omega) + jq(\omega)$ とおくと $h(\tau)$ が実数ならば

$$c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad q(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \sin \omega\tau d\tau. \quad (3.22)$$

$$|H(\omega)| = \left[\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cos \omega\tau d\tau \right\}^2 + \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \sin \omega\tau d\tau \right\}^2 \right]^{1/2} \quad (3.23)$$

および

$$\sigma(\omega) = -\theta(\omega) = \text{Arg}[H(\bar{\omega})] = \tan^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \sin \omega\tau d\tau / \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cos \omega\tau d\tau \right\} \quad (3.24)$$

によつて $h(\tau)$ から $H(\omega)$ が得られ, また逆に

$$\begin{aligned} h(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)| e^{-j\sigma(\omega)} e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ |H(\omega)| \cos \sigma \} \cos \omega\tau d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ |H(\omega)| \sin \delta \} \sin \omega\tau d\omega \end{aligned} \quad (3.25)$$

によつて $H(\omega)$ から $h(\tau)$ が求められることは明らかである。従つて後に述べるように波 $x(t)$ と動揺 $y(t)$ とのクロススペクトラムおよび $x(t)$ のスペクトラムより $y(t)$ の $x(t)$ に対する周波数応答 $H(\omega)$ が求められたとすれば (3.25) によつて $h(\tau)$ に変換でき, (3.18) の表現によつて, $y(t)$ の時々刻々の変化を $x(t)$ と $h(\tau)$ とで表わすことができる。prediction の問題とスペクトラムの解析とが同じ問題を別の面から云っているに過ぎないゆえんである。

3.3 動揺減衰曲線よりの周波数応答特性の推定

波の場合には単位衝撃波というものは実際には存在しない。しかし波による強制力またはモーメントの代りに力またはモーメントが加え得るとすれば, 実際に単位衝撃力または単位衝撃モーメントを考えることはできる。再び横揺の符号を用い (3.9) 式を考えると, 強制モーメント $M(\omega)$ に対する周波数応答 $H_0(\omega) = \Phi(\omega)/M(\omega)$ は (3.11) 式のようになる。最も簡単な場合と例にとり, $I(\omega)$, $\alpha(\omega)$ を ω によらず I , α という常数であると仮定し, これより単位衝撃モーメントに対する応答函数を求めてみると

$$h_0(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_0(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{I} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{\omega^2 - 2j\alpha\omega - \omega_0^2} e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.26)$$

$h_0(\tau)$ はさきに述べたように $0 < \tau < \infty$ で定義されるから (3.26) の積分はラプラス変換の式を使つて計算することかでき

$$h_0(\tau) = \frac{e^{-\alpha\tau}}{I} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \tau \quad (3.27)$$

となる。一方この船の横揺応答系 (3.9) 式に, Fig 9 に示したような単位階段函数の形の動揺モーメント $U(t)$ が急に加わつたとすると

Fig 10 不規則入力と単位衝撃応答

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

であるから、運動方程式

$$I\ddot{\phi} + I \cdot 2\alpha\dot{\phi} + I \cdot \omega_0^2\phi = U(t) \quad (3.29)$$

を初期条件 $\phi(0)=0$, $\dot{\phi}(0)=0$ において解いて、

$$\phi_U(t) = -e^{-\alpha t} \frac{1}{I\omega_0^2} \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} t + \cos \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} t \right\} + \frac{1}{I\omega_0^2} \quad (3.30)$$

この $\phi(t)$ は単位階段函数に対する応答であるからこれを $\eta(\tau)$ とおくと、(3.18) 式の関係より

$$\eta(\tau) = \int_0^\infty h_0(\tau-s)U(s)ds = \int_0^\infty h_0(s)U(\tau-s)ds \quad (3.31)$$

したがってこれを微分して $\frac{d}{dt}U(t) = \delta(t)$ の関係を用いると、

$$\frac{d}{d\tau}\eta(\tau) = \int_0^\infty h_0(s) \cdot \frac{d}{d\tau}U(\tau-s)ds = \int_0^\infty h_0(s)\delta(\tau-s)ds = h_0(\tau) \quad (3.32)$$

すなわち単位階段に対する応答 $\eta(\tau)$ を微分すると単位衝撃函数に対する応答となる。試みに (3.30) より直接この演算を行なつて見ると、

$$\frac{d}{d\tau}\eta(\tau) = \frac{d}{d\tau}\phi_U(t) = \frac{1}{I}e^{-\alpha\tau} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \cdot \tau \quad (3.33)$$

となつて、確かに (3.26), (3.27) より求めた $h_0(\tau)$ と等しくなり、(3.32) が成立つことを証している。(3.31) 式の両辺のフーリエ変換を求め $H(\omega)$ と名づけると

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^\infty \eta(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty h_0(s)U(\tau-s)ds e^{-j\omega\tau}d\tau \\ &= \int_0^\infty h_0(s)e^{-j\omega s}ds \int_{-\infty}^\infty U(\tau-s)e^{-j\omega(\tau-s)}d\tau = H_0(\omega) \cdot \int_0^\infty e^{-j\omega u}du = H_0(\omega) \cdot \frac{1}{j\omega} \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\therefore H_0(\omega) = j\omega \cdot H(\omega) \quad (3.35)$$

すなわち $\eta_U(\tau)$ が実験的に求められる場合にはそのフーリエ変換を求め、 $j\omega$ 倍すれば周波数応答函数 $H_0(\omega)$ が求められる。しかし単位階段函数に対する応答の速度 $\dot{\phi}_U(t)$ が直接求められれば $\dot{\phi}_U(t) = h(\tau)$ と考えることができ、直接単位衝撃に対する応答が得られたと同じことになり、周波数応答を求めるにはこれのフーリエ変換を直接取ればよいこと勿論である。現実に階段函数に対する応答を求めるには Fig. 11 に示すように、イニシャルにモーメント M_0 を与えておき、急にそれを取除けばよい。即ちふつうの減衰試験の方法で

$$I\ddot{\phi} + I \cdot 2\alpha\dot{\phi} + I \cdot \omega_0^2\phi = 0 \quad (3.36)$$

の解で初期条件 $\phi(0) = \frac{M_0}{I \cdot \omega_0^2}$, $\dot{\phi}(0) = 0$ になるものを取ると、

$$\phi_M(t) = e^{-\alpha t} \frac{M_0}{I \cdot \omega_0^2} \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \cdot t + \cos \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \cdot t \right\} \quad (3.37)$$

となることから分るように

$$\eta_U(\tau) = \frac{M_0/I\omega_0^2 - \phi_M(\tau)}{M_0}, \text{ 従つて } h_0(\tau) = \frac{-\dot{\phi}_M(\tau)}{M_0} \quad (3.38)$$

ようにして $\eta_U(\tau)$, $h_0(\tau)$ を求めることができる。

すなわちイニシャルにモーメント M_0 を加えておき、急にそれを取除いた瞬間からの角速度の変化を直接角速度計で測れば極めて容易に $h_0(\tau)$ が求められる。 $h_0(\tau)$ が求められれば、 $H_0(\omega)$ を求める実際的手続は既に (3.24) 式に示してある。実際の数値計算では例えば $\int h_0(\tau) \sin \omega\tau d\tau$ は $\Delta t \cdot \sum h_0(k\Delta t) \sin \omega \cdot k\Delta t$ のようにして比較的容易に計算できる。

Fig. 11 横揺減衰試験

ここでは例として今考えていた最も簡単な線型系として Fig. 4, 5, 6 のような横揺の周波数特性を求めるのに用いたアナログコンピューターの回路によつての動揺を近似させたものを用いた。これからあるモーメント M_0 を加えておき急に取除いた場合のこの系の応答を求めてダムピング曲線を描かせ、以上述べた方法によつて周波数応答特性を求め、実際に直接各周波数の外力を加えて測定した応答特性との比較を行なつた。Fig. 12 はこの系の階段函数に対する応答 $\phi(t)$ および $\dot{\phi}(t)$ で 略この模型船がフルード数 $F=0.195$ で走っていると きの減衰曲線に相当し Fig. 13 はそのフーリエ変換による周波数応答と、計算機による計算結果とを一諸に描い

Fig. 12 線型系の減衰曲線

Fig. 13 減衰曲線よりの変換値と計算値との比較

Fig. 14 減衰曲線よりの変換値と計算値との比較(非線型)

たものである。これが一致するのは式の上で当然のことであり、ことに今考えた例のように、運動方程式が二次で且その各項の係数が ω によつて変化しないようなときには、固有周波数 ω と減衰係数 α さえ減衰曲線から求められれば、周波数応答も簡単に計算で求められる訳であるから、今のべたような計算を要しないことは勿論である。これは例として用いたまでであつて、ここで云つてゐるのは、運動方程式の各項が ω の函数で、2・3に述べたように運動方程式が高次の微分方程式になるような一般の場合にも、唯線型でありさえすれば、各係数を求めたりする手数を取らず直接このように減衰曲線から、周波数特性が求められるということである。なお例えば先の Fig. 7 に示される程度 of 非線型な復原項 $k_3\phi^3$ を含む非線型な系に対し、同様に減衰曲線から同じ手順で計算してみた周波数応答が Fig. 14 である。規則波中の横揺角としてこの初期傾斜と等しい角度を生ずるような波傾斜に対し直接求めた周波数応答と一致しないのは当然であるが、推定値としてはある程度用いられる。位相はかなりよい値を示している。

減衰速度曲線が役に立つことは以上によつて明らかであるが、横揺縦揺等の角動揺では、角速度は Rate gyro を用いることによつて角変位よりも正確に計測することができるので¹⁶⁾、このような手順を取るには好都合である。実際には又例えば上下揺のように加速度の測定が最も容易な場合もある。その場合には $\dot{h}_0(\tau)$ が求められる訳であるから、これを $\dot{h}_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(s-\tau)\delta'(s)ds$ と Dirac のデルタ函数の性質を用いて表わすと、前と同様な手順により

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{h}_0(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \mathfrak{H}(\omega) = j\omega \cdot H_0(\omega) \quad (3.39)$$

$$\therefore H_0(\omega) = \frac{1}{j\omega} \mathfrak{H}(\omega) \quad (3.40)$$

すなわち単位階段函数に対する加速度の変化 $\dot{h}_0(\tau)$ が求められれば、そのフーリエ変換 $\mathfrak{H}(\omega)$ を求め $1/j\omega$ を乗じて周波数応答 $H_0(\omega)$ が求められる。

さて、このようにして求めたものはモーメントに対する応答函数 $H_0(\omega) = \Phi(\omega)/M(\omega)$ であつて波高に対する応答函数 $H(\omega) = \Phi(\omega)/X(\omega)$ ではない。 $H(\omega)$ は (3.10) より $H(\omega) = H_0(\omega)B(\omega)$ によつて求めることができる。即ち $H_0(\omega)$ は運動方程式 (3.9) の左辺の性質を示すのみで、平水中の船の動揺の性質は示すが、波の中の性質 $H(\omega)$ を知るためには $B(\omega)$ を何か別の理論的な計算、またはによつて求める実験必要がある。しかし一般に $B(\omega)$ を求めることは $H(\omega)$ すべてを理論的にまたは実験的に求めるのにくらべて遙かに楽である。即ち横揺に対しては (2.11) 式によつて $B(\omega)$ を推定することができる。あるいはまたこの方法を使つて実験的に $B(\omega)$ を逆に求めることもできよう。以上は $H(\omega) = H_0(\omega) \cdot B(\omega)$ のようにして $H(\omega)$ を求める方法である。単位衝撃波に対する応答函数 $h(\tau)$ はそのフーリエ変換によつて直接求めることができる。

試験水槽中の前進速度を有する横波中の横揺試験や、就航中の船の実船試験で、横揺試験をさまざまな周波数の波の中で行なうことは困難でも、減衰曲線は比較的取り易い場合がある。そのような場合に上述の方法はこの船の周波数特性を推定するのに役立つであろう。動揺の減衰曲線はこの船の運動方程式の左辺の性質すべてを表わすもので、同調時一点の減衰係数を求め、あとは棄て去るにはあまりにも多くの情報を含むものと云うべきであろう。

あ と が き

使用した実験結果は(その2)以降に表われる他の規則波および不規則波中の動揺実験の結果と共に、著者が Stevens Inst. of Tech. に滞在中 DL Project (Bureau of Ships Contract Nonr 263-21) に関連して行なつた実験によつて得られたものである。その際あらゆる便宜を与えられた Prof. E. V. Lewis に感謝の意を表わすものである。なおこの研究に當つて終始激励される運輸技術研究所船舶性能部長志波久光博士、アナログコンピュータによる計算を始め資料の計算、図面の作製に當つて労を惜しまず協力された船舶性能部安藤定雄技官に対し厚く感謝するものである。

引 用 文 献

- 1) Pierson, Willard J. Jr. : "On the Phases of the Motions of Ships in Confused Seas" Technical Report No. 9, Nov. 1957, College of Engineering, Research Division Department of Meteorology and Oceanography, New York Univ.

- 2) Dalzell, John F. & Yamanouchi Yasufumi : "The Analysis of Model Test Results in Irregular Head Seas to determine the Amplitude and Phase Relations of Motion to the Waves", ETT Note No.487, June 1958, also Second Summer Seminar on "Ship Behavior at Sea" at Stevens Inst. of Tech., 1958, ETT Report 708
 - 3) Fuchs, R. A. and Mac Camy, R. C. : "A Linear Theory of Ship Motion in Irregular Waves", Technical Report Series 61, Issue 2, Institute of Engineering Research, Waves Research Laboratory, Dept. of Engineering, Univ. of Calif. July, 1953
 - 4) 山内保文 : "船の動揺の時系列論的解析について" 造船協会論文集 第 99 号, 昭和31年5月, pp.47~64
 - 5) Ursell, F. : "On the Waves due to the Rolling of a Ship" Quart. Journ. of mech. & Appl. mathem. 1948, I. Pt 2, pp.246~252
Ursell, F. : "On the Rolling Motion of Cylinders in the Surface of a Fluid," Quart. Journ. of Mech. & Appl. Mathem. 1949, II Pt 3, pp.335~353
 - 6) 加藤 弘 : "船の横揺れに対する抵抗の性質並びに相似則について" 造船協会論文集 第66号 昭和15年6月, pp.83~108
 - 7) de Santis, Renato, and Russo, Michele : Rolling of the S.S. "Conte Di Savoia" in Tank Experiments and at Sea" Trans. of SNAME, Vol.44, 1936, pp.169~194
 - 8) Van Manen, J. D. : "Research Program of the Netherlands Ship Model Basin", Int. Shipbuilding Progress, Vol.6, No.58, June, 1959, pp.233~248
 - 9) 菱田敏男 : "船舶の動揺造波抵抗に関する研究" (その六 前進速度の影響についての一考察) 造船協会論文集 第 87 号, 昭和30年3月, pp.67~78
 - 10) Korvin-Kroukovsky, Boris V. and Jacobs Winnifred R. : "Pitching and Heaving Motions of a Ship in Regular Waves," Trans. of SNAME. Vol.65, pp.590~632
 - 11) 渡辺恵弘 : "横動揺に於ける船の重心の運動と波の有効傾斜に就て" 造船協会会報第49号 昭和7年4月 pp.61~86
 - 12) 元良誠三 : "船体運動学" 共立出版社, 昭和32年1月 p.97
 - 13) Pierson, Willard J. Jr. : Discussion to B. V. Korvin-Kroukovsky's paper "Investigation of Ship Motions in Regular Waves", Trans. of SNAME Vol.63, 1955 pp.386~435
 - 14) Tick, Leo : "Differential Equation With Frequency-Dependent Coefficients" Journ. of Ship Research, SNAME Vol.3, No.2, Oct.1959, pp.45~46
 - 15) Golovato, Paul : "A Study of the Transient Pitching Oscillations of a Ship" Journ. of Ship Research, SNAME, Vol.2, No.4, March 1959, pp.22~29
 - 16) 山内保文, 野田克彦 : "船の動揺計の一方式について" 造船協会論文集 第 99 号, 昭和31年5月, pp.65~74
-