(昭和 37 年 11 月造船協会秋季講演会において講演)

荷油槽に生ずる衝撃圧力の理論的研究

正員 萩 原 孝 一*

正員 山 本 善 之**

A Theory of Sloshing in Cargo Oil Tanks

By Kôichi Hagiwara, *Member*Yoshiyuki Yamamoto, *Member*

Summary

In this paper, the authors theoretically investigate the sloshing of liquid in cargo oil tanks during ship oscillation, and evaluate the impulsive pressure caused by sloshing.

Liquid motion in a cargo oil tank is limited by tank top plating. As soon as the upward motion of liquid surface relative to the tank is stopped, impulsive pressure occurs there. This phenomenon is sloshing of liquid. Limited motion of liquid surface can be determined approximately by omitting terms of higher order in Fourier series. Determining the impulsive velocity of liquid surface at the tank top plating, the impulsive pressure can easily be obtained by means of the semi-empirical formula given by Professor Watanabe, and is in good accordance with experimental results.

Severe impulsive pressure is caused by severe liquid motion. Liquid motion depends not only upon the ratio of the period of oscillation of the tank and the gravest natural period of liquid oscillation, but also upon a parameter which is determined by the dimensions of the tank, the depth of liquid and the height of the center of oscillation. When the parameter takes a certain value, severe liquid motion never occurs even in case of resonance condition. Such a fact should be applied to control the impulsive pressure in cargo oil tanks.

緒 言

油槽船の設計に当たり、荷油などの運動によつて油槽各部に加わる圧力の値を知ることが、荷油槽の大きさの決定などに関連して重要な問題である。この資料を得るために、先にこれに関する実験的研究が行なわれた。[1, 2, 3] しかし、荷油槽に発生する衝撃圧力の特性などに関する理論的研究はなお不十分な状態であるので、本論文ではその発生機構を理論的に研究し、それより導かれる結果を実験結果 [1, 2] と比較した。そのため本論文では、最も基本的な長方形断面の荷油槽で、その中央に動揺中心があり、内部には補強材等の存在しない場合について考察した。また、動揺振幅が大きくなると側壁の運動の非線型成分の影響が著しくなり、衝撃圧力の minor peak (第 3・4 図参照) が生ずるが、このような 2 次的な現象は本論文では扱わず、最も重要と思われる項のみを用いて理論を展開した。

I 簡単な場合の液体の運動

1・1 波が槽頂に達しない場合の運動

第 1・1 図に示すような長方形の油槽を考える。その長さは $2l$ で、長さ方向の中央で底面から H の点が動揺中心であるとする。この点を座標の原点 O とし、長さ方向および垂直方向に x, y 軸をとる。この槽に比重 γ の流体を深さ $h(=H+b)$ だけ入れた場合の 2 次元の運動を考える。

原稿受付 昭和 37 年 6 月 15 日

* 三菱造船 (株) 長崎造船所

** 東京大学工学部

によつて求められ、槽に相対的な波高 η は、

$$\eta = \eta^* - x\theta, \quad (1.14)$$

となる (第 1.2 図)。

ϕ の表式 (1.11) より知られるように、波動を構成する各成分は k の増加とともに急激に減少するので、 x に関する Fourier 級数の第 1 項のみに注目することにする。このとき、上記の波高 η は近似的に、

$$\begin{aligned} \eta &= -\Theta \sin pt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 8lp^2}{(2k+1)^2 \pi^2 (p^2 - n_{2k+1}^2)} \left[2 - \frac{bn_{2k+1}^2}{g} - \frac{2}{\cosh(2k+1)\pi h/2l} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi^2}{8} \frac{n_{2k+1}^2}{p^2} \right] \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \\ &\approx -\Theta l \sin pt \cdot \frac{8}{\pi^2} \frac{p^2}{(p^2 - n_1^2)} \left(2 - \frac{bn_1^2}{g} - \frac{2}{\cosh \pi h/2l} - \frac{\pi^2}{8} \frac{n_1^2}{p^2} \right) \cdot \sin \frac{\pi x}{2l} \end{aligned} \quad (1.15)$$

と表わされる。したがつて壁面 $x=l$ における波高 η_0 は

$$\eta_0 = -\frac{1-\delta\alpha^2}{1-\alpha^2} \Theta l \sin pt \quad (1.16)$$

と書ける。ここに

$$\alpha = \frac{p}{n_1} \quad (1.17)$$

$$\delta = \frac{8}{\pi^2} \left(2 - \frac{bn_1^2}{g} - \frac{2}{\cosh \pi h/2l} \right) \quad (1.18)$$

である。(1.15) は、

$$\eta \doteq -\eta_0 \sin \frac{\pi x}{2l} \quad (1.19)$$

となるので、波動の共振は著しく δ に影響されることがわかる。特に $\delta=1$ のときは実際に共振が生じないことになる。

1.2 槽に流体を満たした場合

上述の理論は流体の運動が槽頂によつて制限されることを考慮していない。しかし、実際の槽には槽頂板があり、これを考慮せねばならない。静止時における自由表面と槽頂の距離を c とする。 c が大で $|\eta_0| \leq c$ のときは前節の結果がそのまま成立つが、 $|\eta_0| > c$ のときは別の理論を必要とする。 c が 0 となる極限では速度ポテンシャルは、(1.1)、(1.9)、(1.10) および境界条件

$$y=b \quad \text{で} \quad -\frac{\partial \phi}{\partial y} = x \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1.24)$$

で定まる。その結果

$$\begin{aligned} \phi &= \Theta p \cos pt \left[xy - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 32l^2 \sin(2k+1)\pi x/2l}{(2k+1)^3 \pi^3 \sinh(2k+1)\pi h/2l} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \cosh \frac{(2k+1)\pi(y+H)}{2l} - \cosh \frac{(2k+1)\pi(b-y)}{2l} \right\} \right] \end{aligned} \quad (1.25)$$

となり、波動は生じない。このときの圧力は、 θ の正負に応じて $(\pm l, b)$ なる隅部で圧力が 0 となるとして定めればよい。これによつて壁面 $x=l$ 上の圧力 P_0 は、

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{\rho} &= b - y_0 - \Theta l \sin pt \left\{ 2 + \frac{lp^2}{g} \left[\frac{b+y_0}{l} - \left(\cosh \frac{\pi h}{2l} + \cosh \frac{\pi(y_0+H)}{2l} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 1 - \cosh \frac{\pi(b-y_0)}{2l} \right) \operatorname{cosech} \frac{\pi h}{2l} \right\}, \quad (\sin pt < 0) \end{aligned} \quad (1.26)$$

と定まる。この中、動的圧力を表わすのは $\{ \}$ 内の第 2 項である。特に槽頂部では、 $\theta < 0$ のとき、

$$\frac{P_0(y=b)}{\rho} = -2\Theta l \sin pt \left\{ 1 + \frac{lp^2}{g} \left[\frac{b}{l} - \frac{\cosh \pi h/2l - 1}{\sinh \pi h/2l} \right] \right\}, \quad (\sin pt < 0) \quad (1.27)$$

である。ここで求められた圧力は、 c が 0 でなくても c が小さく、流体が槽頂に接しているときの圧力を近似的に与えると考えてよからう。このとき、(1.26) および (1.27) の b の代りに $b+c$ を代入したものが成立する。槽頂部では、

$$\frac{P_0(y=b+c)}{r} = -2\Theta l \sin pt \left\{ 1 + \frac{lp^2}{g} \left[\frac{b+c}{l} - \frac{\cosh \pi d/2l - 1}{\sinh \pi d/2l} \right] \right\}, \quad (\sin pt < 0) \quad (1.28)$$

となる。実際に壁面に大なる圧力が生ずるのは c が 0 のときではなく、波面が槽頂に衝突する場合である。次章において、そのような場合について考察することにする。

II 槽頂部に発生する衝撃的圧力

槽内に生じた波面が槽頂に衝突すると、その付近に衝撃圧力が発生する。その大きさは波面と槽頂板のなす角に関係するが、その角度が十分小さい時は渡辺〔5〕によつて近似的に

$$\frac{P}{r} = \frac{\pi}{2g} \tan 85^\circ (\dot{\eta}_0)^2 = \frac{18}{g} (\dot{\eta}_0)^2 \quad (2.1)$$

と与えられている。ここに $\dot{\eta}_0$ は波面の衝撃速度である。この $\tan 85^\circ$ と云う値は船首底のスラミングに対して経験的に定められた数字であつて必ずしも一般性をもたないように考えられるが、この式によつて概略の衝撃圧力の値が得られるとして差し支えなからう。

つぎに、波面の衝撃速度 $\dot{\eta}_0$ を求める。槽が規則的の動揺 (1.8) を行なうとき、(1.16) で与えられる η_0 が c より大になり得るときは、波面の衝突が起こる。このような場合でも、波面が槽頂に接していない間については速度ポテンシャルは (1.5) と (1.11) で与えられるものを加え合せて得られる。したがつて、級数の高次の項を省略すると槽に相対的な波高として、

$$\eta = -\Theta l \sin pt \frac{1-\delta\alpha^2}{1-\alpha^2} \sin \frac{\pi x}{2l} + (a_1 \cos n_1 t + a_2 \sin n_1 t) \sin \frac{\pi x}{2l} \quad (2.2)$$

が得られる。ここに a_1, a_2 は積分常数である。壁面 $x=l$ では、

$$\eta_0 = -\frac{1-\delta\alpha^2}{1-\alpha^2} \Theta l \sin pt + a_1 \cos n_1(t-t_0) + a_2 \sin n_1(t-t_0) \quad (2.3)$$

となり、この η_0 を用いると

$$\eta = \eta_0 \sin \frac{\pi x}{2l} \quad (2.4)$$

となる。なお、(2.3) の t_0 は適当に定め得る。以下特に断わらない限り η_0 および η は (2.3) および (2.4) で与えられる波動を表わすものとする。

(2.2) は波頂が槽頂から離れた瞬間から、次に波頂が槽頂に接するまでの槽に相対的な波高を表わすが、実際には高次の波動も重要な役を演ずることが考えられる。したがつて (2.2) は不満足ではあるが、取扱いの便宜上これを仮定することにする。

波頂が槽頂に接するとその部分の波形は槽の形状に応じて変化し、数学的取り扱いが極めて困難になる。それゆえここでは近似的に扱い、“波形が (2.4) のように与えられ、しかも槽頂に接した後もこの波形は壊れない”と仮定する。したがつて、波頂が槽頂に接している間は

$$|\eta_0| = c, \quad \dot{\eta}_0 = 0$$

となる。このような仮定は、(1.16) で与えられる η_0 と c が同程度の大きさであるとき、比較的よい近似で成立すると考えてよいであろう。

今、壁面 $x=-l$ にて波頂が槽頂に接しており、 $t=t_0 \equiv \beta/p$ なる瞬間に槽頂を離れたとする。このとき (2.3) は次の条件を満たさねばならない。

$$t=t_0 \equiv \frac{\beta}{p} \quad \text{で} \quad \eta_0 = -c \quad (2.5)$$

$$\dot{\eta}_0 = 0 \quad (2.6)$$

$$\ddot{\eta}_0 = 0 \quad (2.7)$$

(2.7) は槽頂から波頂へ及ぼす圧力が 0 であることを示す。この 3 条件により (2.3) の積分常数 a_1, a_2 および β が決定される。すなわち、

$$\sin \beta = \frac{c}{(1-\delta\alpha^2)\Theta l} \quad \left(\begin{array}{l} 1 > \delta\alpha^2, \quad \pi/2 < \beta < \pi; \\ 1 < \delta\alpha^2, \quad -\pi/2 < \beta < 0 \end{array} \right) \quad (2.8)$$

$$\frac{a_1}{c} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}, \quad \frac{a_2}{c} = \frac{\alpha \cot \beta}{1-\alpha^2} \quad (2.9)$$

となり、 η_0 は確定する。

さてつぎに、波頂は壁面 $x=l$ において槽頂に接する。
この間の時間を φ/n_1 とすると、その時刻は、

$$t = t_0 + \frac{\varphi}{n_1} = \frac{\alpha\varphi + \beta}{p} \equiv t_1 \quad (2.10)$$

である。これらの時間の関係を図示すると第 2.1(a) 図のようになる。この φ は、さきに定められた η_0 の表式が

$$t = t_1 \equiv \frac{\alpha\varphi + \beta}{p} \quad \text{で} \quad \eta_0 = c \quad (2.11)$$

を満たすことによつて決定できる。すなわち

$$\tan \beta = \begin{cases} \frac{\alpha \sin \varphi - \sin \alpha \varphi}{1 + \cos \alpha \varphi - \alpha^2(1 + \cos \varphi)}, & (\alpha \neq 1) \\ \frac{\varphi \cos \varphi - \sin \varphi}{\varphi \sin \varphi + 2(1 + \cos \varphi)}, & (\alpha = 1) \end{cases} \quad (2.12)$$

となる。この瞬間における速度 $\dot{\eta}_0$ が波面の槽頂に対する衝撃速度であり、

$$\frac{\dot{\eta}_0(\eta_0=c)}{nc} = \begin{cases} \frac{\alpha}{1-\alpha^2} [\cot \beta (\cos \varphi - \cos \alpha \varphi) + \sin \alpha \varphi - \alpha \sin \varphi], & (\alpha \neq 1) \\ \frac{1}{2} [-\cot \beta \cdot \varphi \cdot \sin \varphi + \sin \varphi - \varphi \cos \varphi], & (\alpha = 1) \end{cases} \quad (2.13)$$

と定まる。この $\dot{\eta}_0$ を (2.1) に用いると衝撃圧力 P_0 が求まるわけである。

ここで注意すべきことは、(2.8) より、

$$\left| \frac{c}{(1-\delta\alpha^2)\Theta l} \right| \leq 1 \quad (2.14)$$

でなければならないことである。この条件が満たされないときでも条件 (2.7) を除外すれば解くことができる。すなわち衝突によつて相対速度 0 となつた流体の塊は、重力によつてすぐに下方に落ち始めるわけである。実際の槽では衝撃後流体の塊は変形するが、なお多少上向きの運動を続けるので、上述のような運動は正確には生じない。(第 3.1(a) 図) しかし、このような運動を認めると、流体運動を近似的に定めることができる。この場合には衝撃直後に波面は槽頂を離れるのであるから、

$$\varphi = \frac{\pi}{\alpha} \quad (2.15)$$

でなければならない。これより β は (2.11) に対応する条件

$$t = t_1 \equiv \frac{\pi + \beta}{p} \quad \text{で} \quad \eta_0 = c \quad (2.16)$$

によつて定められる。(第 2.1(b) 図) また、 a_1, a_2 は (2.5) および (2.6) により β の函数として定められ、

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta + \frac{\alpha \sin \pi/\alpha \cos \beta}{1 + \cos \pi/\alpha} &= \frac{c(1-\alpha^2)}{\Theta l(1-\delta\alpha^2)}, & (\alpha \neq 1) \\ \beta &= \frac{\pi}{2}, & (\alpha = 1) \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

$$a_1 = \frac{\Theta l(1-\delta\alpha^2) \sin \beta}{1-\alpha^2} - c, \quad a_2 = \frac{\Theta l(1-\delta\alpha^2) \alpha \cos \beta}{1-\alpha^2} \quad (2.18)$$

となる。これらによつて η_0 は確定し、 $\eta_0 = c$ における衝撃速度は

$$\frac{\dot{\eta}_0(\eta_0=c)}{n} = \begin{cases} \frac{2\Theta l(1-\delta\alpha^2) \alpha \cos \beta}{1-\alpha^2}, & (\alpha \neq 1) \\ \Theta l(1-\delta) \frac{\pi}{2}, & (\alpha = 1) \end{cases} \quad (2.19)$$

第 2.1 図 波面の運動

となる。

III 検討および数値計算

3.1 槽頂板による減衰効果

本論文における計算は第3.1(a)図に実線で示すように $x=\pm l$ で波頂が槽頂に達した後もそのままの波形 η_0 を保つと仮定したわけであるが、実際は同図の点線のごとき波形となり、その運動はむしろ同(b)図のごとき波形の場合に近い。したがって本仮定は槽頂に衝撃することによる減衰を過大に評価したことになる。また第II章の計算で生じた不具合も、波面が実際には第3.1(a)図の破線のようになるのを実線と仮定し、流体の上向きの

第3.1図 波面の衝撃

第3.2図 c^*/c の影響(計測点④は第3.5図参照)

運動(同図中の矢印)を無視したことによるのは前述の通りである。この点を解決する方法として、同(b)図のように波面が頂板位置より上方の c^* まで昇り得ると仮定することが考えられる。すなわち、 c の代りに c^* を用いて η_0 を求め衝撃速度としては $\eta_0=c$ における値を用いるわけである。この場合の理論については appendix で述べる。この c^*/c の種々な値に対する $P_0 \sim c$ 関係を求めたのが第3.2図である。これより c^*/c を適当に定めることにより理論値を実験値に近づけられるが、 c^*/c の明確な決定法がないので、以下本論文では圧力はすべて $c^*/c=1$ として計算することにした。なお、 α が1に近づき、 θ/l が大なるほど、 c^*/c は大きくなる。しかし、この値は高々 $\pi/2$ の程度と考えられる。

3.2 δ の影響

前章にも述べたように流体運動の激しさに及ぼす δ の影響は極めて大きい。特に $\delta=1$ の場合には同調は起こらないことになり、 $|\delta-1|$ が大になると、共振時の流体運動は激しくなる。これは第3.3図に示す実験結果にも明瞭にあらわれている。

つぎに槽長との関係を考える。(2.8), (2.12), (2.13), (2.17) および (2.19) の各式から明らかなごとく、 α および β が同じなら $\dot{\eta}_0/\eta c$ は等しくなる。通常の油槽の場合、 δ の変化は (1.18) より明らかなように主に $(2-\pi b/2l)8/\pi^2$ によつて決定される。このため、 $\alpha=\pi/4$ のときは $(1-\delta\alpha^2)\theta/l$ がほとんど l に関係しないようになり、 b, c が一定なら $\dot{\eta}_0^2$ 、したがって P_0 は $1/l$ に比例することになる。実際の場合のように強制動揺の周期 $T=2\pi/p$ が与えられ液体の自由動揺周期 T_1 より長い場合には、 $\alpha=T_1/T$ が1より小さくなり、槽長が短い程共振点よりずれるため、衝撃圧力は減少することが第3.4図に示されている。しかし共振点 $\alpha=1$ 付近では

同図で知られるように $2l$ が小になると衝撃圧力 P_0 が大きくなる。実際には、流体運動が激しくなると粘性影響も無視できなくなるし、 c^*/c は槽長が大なるほど大になると考えられるので、多少この結果は補正されねばならないかも知れない。なお、理論より知られるように衝撃圧力は $\alpha=1$ の近くで大になるが、必ずしも $\alpha=1$ のときに極大値を示すとは限らない。

3.3 理論と実験との比較

(1) 第3.5図には槽頂と静止液面との距離と衝撃圧力との関係を $2l=350\text{mm}$ と $2l=700\text{mm}$ の場合について計算し、実験値 [1, 2] と比較してある。これより、最大の衝撃圧力を与える c は理論値は実験値よりかなり小さくなる。しかもこの c の値は槽長が短い方が大となる傾向を有す。圧力については、 $2l=700\text{mm}$ の場合は最大値が理論と実験で同程度の値を示す。 $2l=350$ 場合

第3.3図 δ の影響 (計測点④⑤は第3.5図参照)

第3.4図 槽長の影響 (計測点④は第3.5図参照)

の計測点④は $2l=700\text{mm}$ の場合の計測点④より多少槽の中央よりの点、むしろ計測点⑤に対応する圧力を示すものとする。また計測値が $\alpha=0.81$ の場合のものであることを考慮すると、 α が1に近いときには第3.4図の理論値のように $2l=700\text{mm}$ の場合の値より大なる圧力値を示すことも期待できる。

(2) 第3.4図の計算に用いた c の値は最大の衝撃圧力を示すと思われるものを採用した。同図の実験値も同様な c に対応するものである。実験値は理論値より多少低目であるが、傾向は大体一致している。

(3) 第3.6図は動揺角 Θ と最大衝撃圧力 P_0 の関係で、計算値は各 Θ に対して c を変えた場合の P_0 の最大値である。この結果は Θ が大きい範囲ではむしろ直線に近くなっている。これは槽頂板による減衰の影響と考えられるが、実験では波形の乱れおよび気泡の発生による液体密度の減少などによつて、 Θ の大きい範囲でさらに圧力が減少することも考えられる。

(4) 第3.7図は、 c と P_0 の関係を $\alpha=1$ および $\alpha=0.6$ について計算し、それに近い実験値と比較したものである。これより $2l=700\text{mm}$ の場合、圧力の大きさは $\alpha=0.6$ ではよく一致するが $\alpha=1$ ではかなり低い値を与える。この場合でも圧力が最大となる c の値は理論の方がかなり小さくなっている。

計算値と実験値の相異は衝撃による自由表面の形の変化の影響のほか、高次の波動を省略したことが大きな理

第3.5.図 実験と理論の比較

第3.6.図 最大圧力と角振幅 (計測点④は第3.5.図参照)

第3.7.図 実験と理論の比較

第3.8.図 衝撃圧力

由と思われる。また圧力計算の式(2.1), 粘性による抵抗等もある程度関係していると思われる。

(3) 圧力の波形について調べる。衝撃によるピーク圧力が発生した後もかなりの大きさの圧力が発生する。この圧力は近似的に1.2節の理論によつて定めることができる。このようにして求められた圧力は満載の場合を仮想して求めたものであるから、その静的圧力に相当する部分は高目になっている。しかし、動的圧力の部分については満載のときより上部に空間のある時の方が液体の運動が激しいと考

えられるから低目の結果を与えると考えてよからう。それゆえ、全体としての圧力は(1.28)で近似的に表わされるとしてよいと思われる。 $\alpha = 1$ の場合について計算すると第3.8図に示すようになり、ほぼ実験と一致した値を示している。なお、 c が小さい時はこのようにして得られた圧力が衝撃圧力より大となり、したがって最大圧力 P_0 は、このようにして得られた圧力で与えられる。(第3.4.図および第3.7.図参照)

IV 結 論

以上の結果をまとめると次のようになる。

- (1) 槽頂に衝突することによつて生ずる減衰の大きさの評価の仕方などに問題は残るが、槽内流体の衝撃を伴う運動の概要を把むことができた。
- (2) 衝撃による減衰の影響は c^*/c を 1 より大にとることで一応の解決はできるが、 c^*/c の値についての検討を要する。
- (3) より正確な理論値を得るためには、泡の発生などを考慮した衝撃速度と衝撃圧力の関係を検討し、高次の項やさらに粘性減衰をも考慮せねばならないであろう。
- (4) 槽内流体の運動の激しさは、動揺周期と固有周期の関係のほかには動揺の幾何学的条件で決定される δ なる factor に関係する。 $\delta=1$ のときには共振は生じないし、 $|\delta-1|$ が大きいときは大なる衝撃圧力が生じ得る。
- (5) したがつて、動揺による圧力を減少させるには、船体と液体との共振を避けるほかに δ を 1 に近づけることが有効である。

槽内流体の運動は極めて複雑で理論的取り扱いが困難である。本論文が今後のこの方面の研究の緒となれば幸いである。

本研究の実施に当つて終始御指導賜つた東大工学部長吉識先生、御後援賜つた三菱造船株式会社社長崎造船所造船設計部長岡部博士、同所船殻設計課長藤田氏に厚く感謝の意を表する。

参 考 文 献

- [1] 吉識・山本・萩原 “船体運動時に荷油によって生ずる動的圧力の研究” 造船協会論文集 109 号 (昭 36/6)
- [2] “荷油の運動による隔壁強度の研究” 日本造船研究協会報告 第 33 号, 第 1 章 (昭 36/10)
- [3] 菱田・田中・北村・林 “槽油が槽構造に与える荷重について” 関西造船協会誌 82 号 (昭 31/6)
- [4] 田宮 “遊動水の動的影響について” 造船協会論文集 103 号 (昭 33/7)
- [5] 渡辺 “船首底衝撃の機構について” 造船協会論文集 93 号 (昭 28/7)

Appendix 仮想的波高を用いたときの衝撃圧力

本文第 3・1 (b) 図に示すように仮想的波高を $c^*>c$ とする。このとき、 η_0 の決定すなわち β^*, a_1^*, a_2^* の決定はすべて第二章の (2・5)~(2・9) において c の代りに c^* を用いることによつて次のように求められる。

$$\sin \beta^* = \frac{c^*}{(1-\delta\alpha^2)\Theta l}, \quad \begin{cases} 1 > \delta\alpha^2, & \pi/2 < \beta^* < \pi \\ 1 < \delta\alpha^2, & -\pi/2 < \beta^* < 0 \end{cases} \quad (\text{A} \cdot 1)$$

$$\frac{a_1^*}{c^*} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}, \quad \frac{a_2^*}{c^*} = \frac{\alpha \cot \beta^*}{1-\alpha^2} \quad (\text{A} \cdot 2)$$

衝撃時刻 $t=t_1^* \equiv (\alpha\varphi^* + \beta^*)/p$ は上記 η_0 が c に達する時刻として次のように得られる。

$$\tan \beta^* = \begin{cases} \frac{\alpha \sin \varphi^* - \sin \alpha \varphi^*}{(c/c^*)(1-\alpha^2) + \cos \alpha \varphi^* - \alpha^2 \cos \varphi^*}, & (\alpha \neq 1) \\ \frac{\varphi^* \cos \varphi^* - \sin \varphi^*}{\varphi^* \sin \varphi^* + (2c/c^*) + 2 \cos \varphi^*}, & (\alpha = 1) \end{cases} \quad (\text{A} \cdot 3)$$

これより衝撃速度は (2・13) と同様に

$$\frac{\dot{\eta}_0(\eta_0=c)}{nc^*} = \begin{cases} \frac{\alpha}{1-\alpha^2} [\cot \beta^* (\cos \varphi^* - \cos \alpha \varphi^*) + \sin \alpha \varphi^* - \alpha \sin \varphi^*], & (\alpha \neq 1) \\ \frac{1}{2} [-\cot \beta^* \cdot \varphi^* \sin \varphi^* + \sin \varphi^* - \varphi^* \cos \varphi^*], & (\alpha = 1) \end{cases} \quad (\text{A} \cdot 4)$$

と定まる。

$|c/(1-\delta\alpha^2)\Theta l| > 1$ のときも全く同様である。

衝撃時刻：

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{c(1-\alpha^2)}{\Theta l(1-\delta\alpha^2)} &= \frac{\sin \beta^*(\cos \varphi^* - \cos \alpha \varphi^*) + \cos \beta^*(\alpha \sin \varphi^* - \sin \alpha \varphi^*)}{1 + (c^*/c) \cos \varphi^*}, & (\alpha \neq 1) \\ \frac{2c}{\Theta l(1-\delta)} &= -\frac{\varphi^* \sin \varphi^*}{1 + (c^*/c) \cos \varphi^*}, & (\alpha = 1) \end{aligned} \right. \quad (\text{A} \cdot 5)$$

衝撃速度：

$$\frac{\dot{\eta}_0(\eta_0=c)}{n} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\Theta l(1-\delta\alpha^2)\alpha}{1-\alpha^2} \left\{ \sin \beta^* \sin \alpha \varphi^* + \cos \beta^* \left[\frac{\cos(\varphi^* - \pi/\alpha) + \cos \varphi^*}{1 + \cos \pi/\alpha} - \cos \alpha \varphi^* \right] \right\}, & (\alpha \neq 1) \\ &c^* \sin \varphi^* - \frac{\Theta l(1-\delta)}{2} (\sin \varphi^* + \varphi^* \cos \varphi^*), & (\alpha = 1) \end{aligned} \right. \quad (\text{A} \cdot 6)$$

これらの η_0 を (2.1) に用いればこの場合の衝撃圧力が求められる。なお、この方法によつて水平桁材に加わる衝撃圧力を算定し得る。