(昭和 39 年 11 月造船協会秋季講演会において講演)

水中翼の一般揚力線理論とその応用

正員 西 山 哲 男*

Unified Lifting-line Theory of Fully Wetted Hydrofoils

By Tetsuo Nishiyama, *Member*

Summary

Unified lifting-line theory is developed for the hydrofoil of fully submerged and surface piercing type. The indirect and direct problems are discussed in some details in relation with the effect of the Froude number.

The disturbing velocity potential is derived from the linearized boundary condition on the free water surface. Then, from the boundary condition on the foil, a basic integral equation is obtained for the distribution of circulation over the span, from which the lift and resistance can be readily computed, and also the optimum condition is clarified.

Some numerical examples of practical interest are shown for the characteristics, and optimum circulation and minimum resistance in a specified condition of operation for the fully submerged and surface piercing hydrofoils.

1 緒 言

水中翼の流体力学的特性は、揚力線理論により取扱われており¹⁾²⁾³⁾⁴⁾⁵⁾⁶⁾⁷⁾、すでにかなりの有用な知見が集積されている。しかしながら全没、貫通型式等の個々の場合のみを取扱っているため、論述が局所的であり且また前者のみに主力が注がれ、後者がおろそかにされている一般的傾向が見られる。この結果、現在的水中翼の代表的二型式を組織的に検討して、流体力学的諸特性のみならず、最小抵抗を有する翼形状等の設計上の実用的要求を満たすには、包括的一般性に欠除しているものと考えられる。

本文では、全没および貫通両型式の水中翼に関する工学的重要な問題を、統一的に取扱う揚力線理論を一般的に記述することを意図してある。すなわち、前半部では、特性を求める計算法を提出して、実験値との対比により、その信頼性を確め、同時に数値計算結果を通して、特性に及ぼす水面の影響を詳細に説明してある。後半部では与えられた作働状態における最適条件とそれによる設計法を述べ、さらに、二型式の最小抵抗について論じてある。

2 速度ポテンシャル

擾乱速度が前進速度に比し小さく、翼面荷重も小さいものとして線型仮定の上に立つとき、水中翼は一本の束縛渦にて置換えることができる。水平傾斜角 β 、翼幅 b なる水中翼の翼幅中心点の没水深度を静水面より f とし、座標は第 1 図に示すごとく取るものとする。

無限遠流体中では、速度ポテンシャルは次式で与えられる。

$$\phi_{\infty}(x, y, z) = -\frac{m}{4\pi} \left[\frac{i}{2\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_0^{\infty} dk \int_{-\pi}^{\pi} \sec \theta e^{-k(z+f-l\eta)+ik\omega} d\theta \right. \\ \left. + \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_0^{\infty} e^{-k(z+f-l\eta)} \cos\{k(y-\eta m)\} dk \right]$$

第 1 図 座標および記号

原稿受付 昭和 39 年 6 月 20 日

* 東北大学 工学部

$$\begin{aligned}
& + \frac{l}{4\pi} \left[\frac{l}{2\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_0^\infty dk \int_{-\pi}^\pi \tan \theta e^{-k(z+f-l\eta)+ik\tilde{\omega}} d\theta \right. \\
& \left. + \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_0^\infty e^{-k(z+f-l\eta)} \sin\{k(y-\eta m)\} dk \right] \quad (1)
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし} \quad & l = \sin \beta, \quad m = \cos \beta \\ & \tilde{\omega} = x \cos \theta + (y - \eta m) \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

水面上の線型境界条件を満足せしめると、水中翼による擾乱の速度ポテンシャルは次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\phi(x, y, z) = & -\frac{m}{8\pi^2} i \left[\int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_{-\pi}^\pi \sec \theta d\theta \int_0^\infty e^{-k(z+f-l\eta)+ik\tilde{\omega}} dk \right. \\
& - \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_{-\pi}^\pi \sec \theta d\theta \int_0^\infty e^{-k(-z+f-l\eta)+ik\tilde{\omega}} dk \\
& - 2K_0 \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_{-\pi}^\pi \sec^3 \theta d\theta \int_0^\infty \frac{e^{-k(-z+f-l\eta)+ik\tilde{\omega}}}{k - K_0 \sec^2 \theta + i\mu \sec \theta} dk \\
& - 2\pi i \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_0^\infty e^{-k(z+f-l\eta)} \cos\{k(y-m\eta)\} dk \\
& - 2\pi i \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_0^\infty e^{-k(-z+f-l\eta)} \cos\{k(y-m\eta)\} dk \left. \right] \\
& + \frac{l}{8\pi^2} \left[\int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_{-\pi}^\pi \tan \theta d\theta \int_0^\infty e^{-k(z+f-l\eta)+ik\tilde{\omega}} dk \right. \\
& - \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_{-\pi}^\pi \tan \theta d\theta \int_0^\infty e^{-k(-z+f-l\eta)+ik\tilde{\omega}} dk \\
& - 2K_0 \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_{-\pi}^\pi \sin \theta \sec^3 \theta d\theta \int_0^\infty \frac{e^{-k(-z+f-l\eta)+ik\tilde{\omega}}}{k - K_0 \sec^2 \theta + i\mu \sec \theta} dk \\
& + 2\pi \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_0^\infty e^{-k(z+f-l\eta)} \sin\{k(y-\eta m)\} dk \\
& \left. + 2\pi \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_0^\infty e^{-k(-z+f-l\eta)} \sin\{k(y-\eta m)\} dk \right] \quad (3)
\end{aligned}$$

ただし、常に実数部を取り、 μ は最後に0に置くものとする。

$$K_0 = g/V^2$$

さて、(3)式 [] 内における第三項は波動を表わし、これを次のごとく変形する。

(i) $\tilde{\omega} > 0$

$$\begin{aligned}
\phi_w = & \frac{K_0}{2\pi^2} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2+\vartheta} \sec^3 \theta (m - l \sin \theta) d\theta \times \right. \\
& \left. \int_0^\infty \frac{k \sin\{k(-z+f-l\eta)\} + K_0 \sec^2 \theta \cos\{k(-z+f-l\eta)\}}{k^2 + K_0^2 \sec^4 \theta} e^{-k\tilde{\omega}} dk \right) \quad (4)
\end{aligned}$$

(ii) $\tilde{\omega} < 0$

$$\begin{aligned}
\phi_w = & \frac{K_0}{-2\pi^2} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2+\vartheta} \sec^3 \theta (m + l \sin \theta) d\theta \times \right. \\
& \left. \int_0^\infty \frac{k \sin\{k(-z+f-l\eta)\} + K_0 \sec^2 \theta \cos\{k(-z+f-l\eta)\}}{k^2 + K_0^2 \sec^4 \theta} e^{k\tilde{\omega}} dk \right) \\
& + \frac{K_0}{\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2+\vartheta} \sec^3 \theta e^{-K_0 \sec^2 \theta (-z+f-l\eta)} [m \cos(K_0 \tilde{\omega} \sec^2 \theta) - l \sin(K_0 \tilde{\omega} \sec^2 \theta) \sin \theta] d\theta \right) \quad (5)
\end{aligned}$$

ただし、 $\theta = \tan^{-1} \frac{y-m\eta}{x}$ に応じて、上または下の積分を取るものとする。

(5)式第二項は、規則波動を表わすので、超高速における挙動を検討する。

$u = \pm \tan \theta$ と置くと、次式を得る。

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ K_0 \rightarrow 0}} [(5) \text{式第二項}] = \frac{K_0}{\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \left(\int_{\cot \vartheta}^{-\cot \vartheta} \right) e^{-K_0(-z+f-l\eta)u^2} [m \cos\{K_0(y-\eta)u^2\} - l \sin\{K_0(y-\eta)u^2\}] u du \quad (6)$$

さらに、 $K_0 u^2 = t$ と置けば、(6) 式は次式となる。

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ K_0 \rightarrow 0}} [(5) \text{式第二項}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_0^\infty e^{-t(-z+f-l\eta)} [m \cos\{t(y-\eta)\} - l \sin\{t(y-\eta)\}] dt \quad (7)$$

したがって、(3)、(7) を比較することにより、次の関係を得る。

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ K_0 \rightarrow 0}} \left[\frac{K_0}{\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_0^{\pi/2} \sec^3 \theta e^{-K_0 \sec^2 \theta (-z+f-l\eta)} [m \cos(K_0 \sec^2 \theta) - l \sin(K_0 \sec^2 \theta)] d\theta \right. \\ \left. = -2 \left[\frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_0^\infty e^{-t(-z+f-l\eta)} [-m \cos\{t(y-\eta)\} + l \sin\{t(y-\eta)\}] dt \right] \right] \quad (8) \end{aligned}$$

すなわち、水中翼直後の規則波動は、超高速では、自由渦による運動に類似していると言える。

3 積分方程式の解法

翼幅に垂直な誘導速度は、次式

$$w = \left(m \frac{\partial}{\partial z} - l \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi \quad (9)$$

により与えられるから、揚力線位置 $(0, m\eta', l\eta' - f)$ では次のごとくなる。

$$\begin{aligned} w(\eta') = \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} \frac{d\eta}{\eta' - \eta} - \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) \frac{\{2f - (\eta' + \eta)l\}^2 - m^2(\eta' - \eta)^2}{[\{2f - (\eta' + \eta)l\}^2 + m^2(\eta' - \eta)^2]^2} d\eta \\ + \frac{K_0^2}{\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_0^{\pi/2} \sec^5 \theta e^{-K_0 \sec^2 \theta \{2f - (\eta' + \eta)l\}} (m^2 + l^2 \sin^2 \theta) \cos\{K_0 m(\eta' - \eta) \sin \theta \sec^2 \theta\} d\theta \quad (10) \end{aligned}$$

つぎに、循環を有限フーリエ級数

$$\Gamma(\theta) = 2bV \sum_{n=1}^7 a_n \sin n\theta \quad (11)$$

ただし

$$\left(\frac{\eta}{\eta'} \right) = -\frac{b}{2} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta'} \right) \quad (12)$$

に展開すると、(10) 式は次のごとく変形できる。

$$\frac{w(\theta')}{V} = \sum_{n=1}^7 a_n \left[\frac{n \sin n\theta'}{\sin \theta'} - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin n\theta \sin \theta \left\{ \frac{A^2 - B^2}{(A^2 + B^2)^2} - \frac{(K_0 b)^2}{8} (m^2 H + 2l^2 V) \right\} d\theta \right] \quad (13)$$

ただし

$$\begin{aligned} H(\theta, \theta') = e^{-\frac{K_0 b}{4} A} \left[\left(1 + \frac{A^2}{A^2 + B^2} \right) K_0 + 2 \left\{ \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \frac{2}{K_0 b \sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{4A^2}{K_0 b (A^2 + B^2)^{3/2}} \right\} K_1 \right] \\ V(\theta, \theta') = e^{-\frac{K_0 b}{4} A} \left[\frac{2A^2}{K_0 b (A^2 + B^2)^{3/2}} K_1 - \frac{B^2}{4(A^2 + B^2)} (K_0 + K_2) \right] \quad (14) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{4f}{b} + (\cos \theta + \cos \theta') l \\ B &= (\cos \theta - \cos \theta') m \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

かつ Bessel 函数 K_0, K_1 および K_2 の argument は $\frac{K_0 b}{4} (A^2 + B^2)^{1/2}$ である。

揚力線位置における境界条件は

$$\Gamma(\theta') = \frac{a}{2} V l(\theta') \left\{ \alpha(\theta') - \frac{w(\theta')}{V} \right\}, \quad a = \frac{dC_l}{d\alpha} \quad (16)$$

で与えられるから、(13) (16) より $\Gamma(\theta)$ に関する積分方程式が得られる。(13) 式第二項に Gauss の求積法を適用すると積分方程式は、次式に変形することができる。

$$\sum_{n=1}^7 \left[\frac{4\lambda}{a} \sin n\theta' + \frac{n \sin n\theta'}{\sin \theta'} - \sum_{\nu=-3}^3 G(\theta', \theta_\nu) \sin n\theta_\nu \sin \theta_\nu w_\nu \right] a_n = \alpha \quad (17)$$

$$\text{ただし} \quad G(\theta', \theta_v) = \frac{A_v^2 - \beta_v^2}{(A_v^2 + \beta_v^2)^2} - \frac{(K_0 b)^2}{8} \{m^2 H(\theta', \theta_v) + 2l^2 V(\theta', \theta_v)\} \quad (18)$$

かつ w_v は ν により決る weighting factor である。(17) 式を翼幅上 7 点で満足せしめると⁸⁾、7 元連立一次方程式より未定係数 a_n を決定することができる。

4 特 性

翼幅に垂直な揚力並びに抵抗は、それぞれ次式で与えられる。

$$L = \rho V \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \quad (19)$$

$$D = \rho \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) w(\eta) d\eta \quad (20)$$

つぎに、(10) 式を (20) 式へ代入すると、次式を得る

$$\begin{aligned} D = & \frac{\rho}{4\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty (P^2 + Q^2) e^{-uz} u du - \frac{\rho}{4\pi} \int_0^\infty (P_l^2 + Q_l^2) e^{-2f^2 u} u du \\ & + \frac{K_0^2}{\pi} \rho \int_0^{\pi/2} \sec^5 \theta \cdot e^{-2K_0 f \sec^2 \theta} (m^2 + l^2 \sin^2 \theta) (P_\theta^2 + Q_\theta^2) d\theta \end{aligned} \quad (21)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} P + iQ &= \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) e^{i u \eta} d\eta \\ P_l + iQ_l &= \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) e^{i u \eta (m - i l)} d\eta \\ P_\theta + iQ_\theta &= \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) e^{i K_0 \sec^2 \theta \eta (m \sin \theta - i l)} d\eta \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

第 2, 3 項が水面の存在により発生した付加抵抗で、前者は鏡像水中翼の誘導抵抗であり、後者は造波抵抗である。

造波抵抗の超高速時の挙動を検討するため、 $K_0 u^2 = t$ と置くと、次式を得る。

$$\lim_{K_0 \rightarrow 0} [(21) \text{ 式第 3 項}] = \frac{\rho}{2\pi} \int_0^\infty (P_l^2 + Q_l^2) e^{-2f^2 t} t dt \quad (23)$$

したがって、(21) (23) 式を比較すると、次の関係を得る。

$$\lim_{K_0 \rightarrow 0} [(21) \text{ 式第 3 項}] = -2[(21) \text{ 式第 2 項}] \quad (24)$$

すなわち、造波抵抗は超高速では誘導抵抗の性質を有していることが判る。また (24) 式は (8) 式の速度ポテンシャルの性質に相対応している。

なお、以上誘導した緒式において

$$\left. \begin{aligned} \beta = 0 & : l = 0, m = 1 \\ \beta = \pi/2 & : l = 1, m = 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

と置けば、それぞれ水平全没、垂直貫通型的水中翼に対するものが得られる。

5 誘 導 速 度 場

簡単のため、水平型の場合について考えることにする。水中翼より後方 $(x_2, y_2, -f)$ における垂直誘導速度は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} w = & \frac{i}{8\pi^2} \lim_{z \rightarrow 0} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_{-\pi}^{\pi} \sec \theta d\theta \int_0^\infty k e^{-kz + i k \tilde{\omega}} dk \\ & + \frac{1}{4\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_0^\infty u^{-uz} \cos\{u(y_2 - \eta)\} du \\ & + \frac{i}{8\pi^2} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_{-\pi}^{\pi} \sec \theta d\theta \int_0^\infty k e^{-2kf + i k \tilde{\omega}} dk \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_0^\infty u e^{-2uf} \cos\{u(y_2 - \eta)\} du \\ & + \frac{i}{4\pi^2} K_0 \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta \left(\int_{-\pi+\vartheta}^{\pi+\vartheta} \right) \sec^3 \theta d\theta \int_0^\infty \frac{e^{-2kf + i k \tilde{\omega}}}{k - K_0 \sec^2 \theta + i \mu \sec \theta} k dk \end{aligned} \quad (26)$$

ただし

$$\tilde{\omega} = x_2 \cos \theta + (y_2 - \eta) \sin \theta \quad (27)$$

$$\vartheta = \tan^{-1} \frac{y_2 - \eta}{x_2} \quad (28)$$

任意循環分布 Γ および翼幅 b なる水中翼は、誘導速度に関する限り、第2図に示すごとく、一様循環 Γ_0 および翼幅 b' なる相当水中翼で置換えることができ、一般に次の関係がある。

$$\frac{b'}{b} = \frac{\pi a_1}{4(a_1 - a_3 + a_5 - a_7)} \quad (29)$$

$$\frac{\Gamma_0}{bV} = \frac{C_l}{2} \frac{b'}{l} \quad (30)$$

第2図 有効翼幅

したがて、(26) (30) 式より翼幅中心線上の誘導速度は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{w(x, 0, -f)}{\frac{C_l}{2\pi} \frac{l}{b'} \frac{b}{b'}} = 1 + & \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + X^2}}{X} - \frac{1}{4p} \tan^{-1} q - \frac{1}{4pX} \left\{ \frac{X}{4q \left(\frac{1}{4} + 4p^2 \right)} - \frac{X^2 - 4p^2}{X} \tan^{-1} q \right\} \\ & + \frac{p}{X^2 + 4p^2} \left[\frac{4p^2 q}{\frac{1}{4} + 4p^2} + 2 \tan^{-1} - \frac{1}{X} \left\{ \frac{X}{4q \left(\frac{1}{4} + 4p^2 \right)} - \frac{X^2 - 4p^2}{X} \tan^{-1} q \right\} \right] \\ & + \frac{1}{4} - \frac{K_0 b'}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sec^3 \theta \operatorname{cosec} \theta \\ & \times \left[e^{-K_0 f \sec^2 \theta \left\{ 2 - \frac{i}{p} (-X \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta) \right\}} \left\{ Ei \left\{ K_0 f \sec^2 \theta \left(2 - \frac{i}{p} (-X \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta) \right) \right\} + i\pi \right\} \right. \\ & - e^{-K_0 f \sec^2 \theta \left\{ 2 + \frac{i}{p} (-X \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta) \right\}} \left\{ Ei \left\{ K_0 f \sec^2 \theta \left(2 + \frac{i}{p} (-X \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta) \right) \right\} + i\pi \right\} \\ & + e^{-K_0 f \sec^2 \theta \left\{ 2 + \frac{i}{p} (-X \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta) \right\}} \left\{ Ei \left\{ K_0 f \sec^2 \theta \left(2 + \frac{i}{p} (-X \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta) \right) \right\} + i\pi \right\} \\ & \left. - e^{-K_0 f \sec^2 \theta \left\{ 2 - \frac{i}{p} (-X \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta) \right\}} \left\{ Ei \left\{ K_0 f \sec^2 \theta \left(2 - \frac{i}{p} (-X \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta) \right) \right\} + i\pi \right\} \right] d\theta \end{aligned} \quad (31)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{f}{b'}, \quad q = \frac{X}{4p \sqrt{X^2 + p^2 + \frac{1}{4}}} \\ x &= -b'X \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

且つ Ei は指数積分である。

6 数 値 計 算 例

数値計算は、縦横比 6、一定迎角の矩形翼について行なわれた。

6.1 循環分布

循環分布の例を、全没型、貫通型について、それぞれ第3、4図に示してある。点線は、無限遠流体中の対応値であるから、全没型については傾斜角 β の増加と共に、水面の影響により、循環減少は大きくなる。これは特に、水面に接近した翼端側で甚だしい。一方、貫通型では、傾斜角 β の増加と共に、水面の影響による循環減少は小さくなる。

水平全没型について、有効翼幅の例を第5図

第3図 全没型の循環分布 ($V/\sqrt{gl}=5$, $f/l=1.5$)

第4図 貫通型の循環分布 ($V/\sqrt{gl}=5$)

第5図 全没水平型の有効翼幅

第7図 貫通型の揚力に及ぼす水面の影響係数

縦横比6および10の水平全没型についての実験値⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾との対比を第8図に示してある。いずれの場合も、全般的に可なり良好な一致を示していると見てよい。

6.3 抵抗

全没型、貫通型について、それぞれ抵抗と無限遠流体の対応値との比を、第9、10図に示してある。これは、抵抗に及ぼす水面の影響係数を示していると見てよく、したがって、水面の影響は、全没型に対しては、

に示してある。点線は、無限遠流体中の対応値であるから、有効翼幅は一般に没水深度が小さくなると共に、増加することが分る。

6.2 揚力

全没型、貫通型について、それぞれ揚力と無限遠流体の対応値との比を、第6、7図に示してある。これは、揚力に及ぼす水面の影響係数を示していると見てよく、したがって、水面の影響は、全没型に対しては、傾斜角の増加と共に顕著になり、貫通型に対しては、傾斜角の増加と共に減少する。

第6図 全没型の揚力に及ぼす水面影響係数 ($f/l=1.5$)

第8図 全没水平型の揚力に及ぼす没水深度の影響と実験値との比較

第 9 図 全没型の抵抗に及ぼす水面の影響係数 ($f/l=1.5$)

第 10 図 貫通型の抵抗に及ぼす水面の影響係数

第 11 図 全没水平型における誘導抵抗と造波抵抗の相対重要度 ($f/l=1.5$)

第 12 図 全没水平型の造波抵抗成分 ($f/l=1.5$)

傾斜角の増加と共に顕著になり、貫通型に対しては、傾斜角の増加と共に減少する。

誘導、造波両抵抗の相対重要度を見るために、水平全没型について、第 11 図に示してある。通常の Froude 数では、大約、全抵抗の 80% が誘導、20% が造波抵抗と考えてよい。さらに、造波抵抗の詳細に入るために、第 12 図には、水平全没型の造波抵抗成分を示してある。通常の Froude 数では、ほとんど大部分が発散波に由来するものであることが判る。

縦横比 6 および 10 の水平全没型についての実験値⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾ との対比並びに没水深度の影響を第 13 図に示してある。なお、比較参考のため、無限遠流体中の対応値を鎖線で示してある。測定全抵抗より、誘導および造波抵抗の和だけを取り出すのに、多少の問題がある実状を考えれば、全般的に理論値は合理的な結果を与えていると見てよいであろう。

7 最適条件と最小抵抗

一般に、最適状態では次式が成立すべきである。

$$\left. \begin{array}{l} \text{揚力 (19) = 一定} \\ \text{抵抗 (21) = 最小} \end{array} \right\} \quad (33)$$

したがって、変分を適用すると、次式を得る

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} \frac{d\eta}{y-\eta} - \frac{1}{2\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) \frac{\{2f-(y+\eta)l\}^2 - m^2(y-\eta)^2}{[\{2f-(y+\eta)l\}^2 + m^2(y-\eta)^2]^2} d\eta \\ & + \frac{2K_0^2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Gamma(\eta) d\eta \int_0^{\pi/2} \sec^5 \theta e^{-K_0 \eta \sec^2 \theta} \{2f-(y+\eta)l\} (m^2 + l^2 \sin^2 \theta) \cos \{K_0 m(y-\eta) \sin \theta \sec^2 \theta\} d\theta \\ & = \Omega V \end{aligned} \quad (34)$$

ただし Ω は Lagrange の不定常数

第13図 全没水平型の抵抗に及ぼす没水深度の影響と実験値との比較

となり、これが無限遠流体中の対応循環とも考えることができる。一般に、次式

$$\Delta\Gamma = \frac{a}{4} \frac{l}{b} \left(\frac{C_l}{\pi\lambda a_1} - \sum \frac{nb_n \sin n\theta}{\sin \theta} \right) \quad (41)$$

が成立するから、水中翼平面形状を適宜仮定することにより、必要な精度で算出できる。したがって、(41)(42)式より係数 b_n を求めることができるから、最適弦長および迎角は次式により決定できる。

$$\sum b_n \sin n\theta = \frac{a}{2} \frac{l(y)}{b} \left[\alpha(y) - \sum \frac{nb_n \sin \theta}{\sin \theta} \right] \quad (42)$$

弦長分布 $l(y)$ は、水中翼船の安定、翼の工作等の見地から決定されるものと見てよい。一方、迎角は次式で与えられる。

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_g \quad (43)$$

ただし α_0 は零揚力角で、反りを決定し、 α_g は幾可学的迎角で、翼幅方向の振れを決定する。したがって、算出された α を消化するのに次の二方法が考えられる。すなわち

- (i) 幾可学的迎角 α_g を一定に保ち、反りを変えることにより、翼幅方向の振れを無くする。
- (ii) 零揚力角 α_0 を一定に保ち、幾可学的迎角を変えて、翼幅方向の振れをつける。

9 数値計算例

最適循環分布を全没型、貫通型について、それぞれ第14、15図に示してある。点線は同一揚力を与える無限遠流体中の対応値(楕円形状)であって、実線との相異は水面の影響に基づき、全没型では傾斜角の増加と共に、顕著となり、貫通型では傾斜角の増加と共に減少している。何れの場合も、水面と反対側の翼端部へ循環を集中させた形状となっているのが特長である。

没水深度 $f=1.5l$ における最適水中翼の抵抗、すなわち最小抵抗を全没型、貫通型について第16、17図に示し、同時に無限遠流体中における対応値を鎖線で表わしてある。比較参考のため、同一縦横比の矩形水中翼の

(10) (34) 両式を比較すると、次の関係を得る

$$w(y) = \frac{\Omega}{2} V \quad (35)$$

すなわち、水面の影響を受けた状態で、全没貫通の型式に関係なく、誘導速度が翼幅上一定であれば、最適状態となることを示すもので、(35)が最適条件となる。最適循環分布は(34)式を $\Gamma(y)$ に関する積分方程式と見て、数値的に解けばよい。かくして、最適状態では、次の関係がある

$$\Gamma_{opt}(y) = \frac{a}{2} V l(y) \left\{ \alpha(y) - \frac{\Omega}{2} \right\} \quad (36)$$

$$C_l = \pi \lambda a_1 \frac{\Omega}{2} \quad (37)$$

$$C_{dmin} = \pi \lambda a_1 \left(\frac{\Omega}{2} \right)^2 \quad (38)$$

$$\text{ただし } \lambda = b^2/S \quad (39)$$

(38)式から、与えられた作動条件下における水中翼の最小抵抗を、求めることができる。

8 設計への応用

最適循環分布から、水中翼を設計するには、次の考察が必要である。すなわち、与えられた作動状態における有効循環が最適循環と完全に一致しなければならない。したがって、水面の影響による循環減少を $\Delta\Gamma$ と置けば、見掛け循環は

$$\Gamma_{opt} + \Delta\Gamma = 2bV \sum b_n \sin n\theta \quad (40)$$

第 14 図 全没型の最適循環分布
($V/\sqrt{gl}=5$, $f/l=1.5$)

第 15 図 貫通型の最適循環分布

抵抗を点線で示してある。したがって、最適水中翼の採用による抵抗減少は、全没型では、傾斜角の増加と共に、顕著となり、貫通型では、傾斜角の増加と共に、小さくなることが判る。

楕円形状の全没水平型水中翼の最適迎角分布を第 18 図に示してある。水面の影響を受けると、迎角が減少し、その有効値が点線のようになり、最適条件を満たすようになる。弦長分布が

$$l=l_0(1-\delta \cos \theta), \quad \delta = \text{テーパー比} \quad (44)$$

で与えられる平面形状を有する貫通型水中翼の最適迎角分布を第 19 図に示してあるが、平面形状と迎角分布との関係が極めて明瞭になる。

10 常用貫通型への拡張

第 12 図に示すごとく、座標を取ると擾乱の速度ポテンシャルは、次式で与えられる。

$$\phi = \phi_r + \phi_l \quad (45)$$

第 16 図 全没型の最小抵抗 ($f/l=1.5$)

第 17 図 貫通型の最小抵抗

第 18 図 水平全没、楕円平面形状の水中翼における最適迎角分布 ($f/l=1.5$)

第19図 貫通型水中翼の最適迎角と平面形状

第20図 座標および記号

ただし、 ϕ_r, ϕ_l それぞれ右翼、左翼によるもので、(3)式で $(y-m\eta)$ の代りに、 $(y-h-m\eta)$ と置けば、前者が得られ、 $(y+h+m\eta)$ と置けば後者が得られる。

つぎに、右翼の翼幅上垂直誘導速度は

$$w_r = \left(m \frac{\partial}{\partial z} - l \frac{\partial}{\partial y} \right) (\phi_r + \phi_l) = (w_r)_r + (w_l)_r \quad (46)$$

で与えられるから、第1項は(10)式、第2項は次式で与えられる。

$$(w_l)_r = \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) \{ l^2 k_v(\eta) + m^2 k_h(\eta) + l m k_{hv}(\eta) \} d\eta \quad (47)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} k_h(\eta) &= \frac{-l^2(y-\eta)^2 + (2h+my+m\eta)^2}{\{l^2(y-\eta)^2 + (2h+my+m\eta)^2\}^2} - \frac{-(2f-ly-l\eta)^2 + (2h+my+m\eta)^2}{\{(2f-ly-l\eta)^2 + (2h+my+m\eta)^2\}^2} \\ &\quad + 4K_0^2 \int_0^{\pi/2} \sec^5 \theta \exp\{-K_0 \sec^2 \theta (2f-ly-l\eta)\} \cos\{K_0 \sec^2 \theta (2h+my+m\eta)\} d\theta \\ k_{hv}(\eta) &= -\frac{4(2f-ly-l\eta)(2h+my+m\eta)}{\{(2f-ly-l\eta)^2 + (2h+my+m\eta)^2\}^2} \\ &\quad + 8K_0^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \sec^5 \theta \exp\{-K_0 \sec^2 \theta (2f-ly-l\eta)\} \sin\{K_0 \sec^2 \theta (2h+my+m\eta)\} d\theta \\ k_v(\eta) &= \frac{-l^2(y-\eta)^2 + (2h+my+m\eta)^2}{\{l^2(y-\eta)^2 + (2h+my+m\eta)^2\}^2} + \frac{-(2f-ly-l\eta)^2 + (2h+my+m\eta)^2}{\{(2f-ly-l\eta)^2 + (2h+my+m\eta)^2\}^2} \\ &\quad - 4K_0^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \sec^5 \theta \exp\{-K_0 \sec^2 \theta (2f-ly-l\eta)\} \cos\{K_0 \sec^2 \theta (2h+my+m\eta)\} d\theta \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

したがって、3節で述べた方法により循環を決定し、4節により特性を求めることができる。

(46)式を(20)式へ代入すると、次式を得る

$$D = (D_r)_r + (D_l)_r \quad (49)$$

(49)式第1項は右翼単独時の抵抗で(21)式で与えられ、第2項は左翼により生じた付加抵抗で、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} (D_l)_r &= \frac{\rho}{4\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty (P_+ P_- - Q_+ Q_-) e^{-uz} u du \\ &\quad + \frac{\rho}{4\pi} \int_0^\infty u e^{-2fu} \{ (l^2 - m^2) (P_+^2 - Q_+^2) - 4lm P_+ Q_+ \} du \\ &\quad + \frac{K_0^2 \rho}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sec^5 \theta e^{-2K_0 f \sec^2 \theta} \{ (P_\theta^2 - Q_\theta^2) (m^2 - l^2 \sin^2 \theta) + 4lm P_\theta^2 Q_\theta \sin \theta \} d\theta \end{aligned} \quad (50)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} P_+ + iQ_+ \\ P_- + iQ_- \end{pmatrix} &= \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) e^{\pm l\eta u + l(h+m\eta)u} du \\ P_\theta + iQ_\theta &= \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\eta) e^{K_0 f \sec^2 \theta l \eta + i K_0 f \sec^2 \theta (h+m\eta)} \sin \theta d\eta \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

最適条件としては、次式で与えられる。

第 21 図 循環分布

第 22 図 揚力及び抵抗におよぼす水面の影響係数

第 23 図 最適循環分布

第 24 図 最小抵抗

$$(w_r)_r + (w_l)_r = \frac{\Omega}{2} V \quad (52)$$

したがって、(10) (47) 式を (52) 式へ代入することによ

り求められる積分方程式から、最適循環分布を算出することができる。

縦横比 6, 傾斜角 30° , 没水深度 $f=0.25b$, 翼間隔 $h=0.625b$ の矩形水中翼について、数値計算を行なった。第 21 図には、右翼の循環分布を示してある。点線は、左翼の影響の無いときの対応値で、これより左翼の存在により右翼の循環は僅かながら減少することが判る。第 22 図には、揚力および抵抗におよぼす水面の影響係数を示してある。点線は、左翼の影響の無いときの対応値で、これより左翼の存在により揚力は減少し、抵抗は増

加して、水面の影響としては、左翼の無いときよりも大きくなることになる。

最適循環分布を、第 23 図に示してある。点線は、左翼の影響の無いときの対応値で、これより左翼の存在により、最適循環は多少減少することが判る。24 図には、最小抵抗を示してある。点線は左翼の影響無いときの最小抵抗である。鎖線は矩形水中翼の抵抗で、これと実線との比較より最適水中翼の採用による利得が明らかとなる。

11 結 論

全没および貫通両型式による擾乱速度ポテンシャルを、水面上の線型境界条件より求め、翼面上の境界条件から、循環を決定する積分方程式を導いた。循環より揚力、抵抗を算出し、実験値との比較結果を総合すると、理論の構成は、まず妥当性をもっていると見てよい。また、両型式に対する数値計算結果を通して、Froude 数の影響を十分に明かにすることができた。

一方、与えられた作動条件下における最適条件を求め、これより、両型式の水中翼設計に考察を払い、特に最小抵抗の見地より、最適水中翼の採用による利得量を理論的に明かにすることができた。

最後に、本研究の遂行に当つては、数式の誘導の一部を九大学院学生宮本政英君、数値計算を本学職員村上節子および伊藤充子君の助力によつた事を記し、それぞれ謝意を表する。

また本研究は文部省科学研究費による研究の一部であることを付記する。

References

- 1) T.Nishiyama, Jour. of Amer. Soc. of Nav. Eng., 71 (1957), 511-520.
 - 2) T.Nishiyama, Jour. of Amer. Soc. of Nav. Eng., 72 (1960), 153-159.
 - 3) T.Y.Wu, Jour. of Math. and Phys., 33 (1954), 207-248.
 - 4) J.P.Breslin, Jour. of Ship Res., 1 (1957).
 - 5) P.Kaplan, Rep. 561 Stevens Inst. of Tech. 1955.
 - 6) T.Nishiyama, Jour. of Amer. Soc. of Nav. Eng., 71 (1959), 693-702.
 - 7) P.Kaplan, Tec. Note 381 Stevens Inst. of Tech. 1956.
 - 8) H.Glauert, The elements of aerofoil and airscrew theory, 2nd ed. Cambridge University Press (1959), 138.
 - 9) K.L.Wadlin, C.L.Shuford and J.R.Mcgehee, NACA Rep. 1232 (1955).
 - 10) B.V.Korvin-Kroukovsky, Rep. 438 Stevens Inst. of Tech. (1952).
-