弾性丸棒の水中横振動について

正員 鬼 頭 史 城*

On Transverse Vibration of an Elastic Circular
Bar which is immersed in a Water Region.

By Fumiki KITO, *Member*.

Summary

We consider the free vibration (of infinitesimally small amplitude) of an elastic circular bar, both ends of which are in state of fixed ends. This circular bar is supposed to be immersed in a water region which is made up by two parallel plane (rigid) walls. Starting from the differential equation for the transverse vibration of a straight elastic bar, wherein the effect of surrounding water is taken into account, the value of natural frequency of vibration is shown in a form of determinantal equation (of infinite order). Therefrom, an approximate formula for the natural frequency is also given.

1 は し が き

船に附属している物体には、水中に張出したプロペラ軸 (2 軸船の場合)、水槽または油槽の中に取付けられた円柱 (または円管)、などのごとく、水中に取り付けられた弾性丸棒の状況にある物体が存在する。それらのものの振動 (自由振動) を調べる基礎として、表題のような問題を考えた。応用面と切り離して、流体力学 (hydro-elasticity) の 1 問題とみなしてもよいであろう。

第 1 図に示すごとく、間隔 l をへだてた 2 つの平行平面で挟まれたところの (無限) 水域があるものとする。その中に 1 つの弾性丸棒が、2 平面に直角に、水中に取り付けてあるものとする。この弾性丸棒が微小振動をすると、まわりの水もまた、微小振動をする。この場合における、横振動の自由振動数を求めようとするものである。著者は、すでにこの問題に対し、棒の両端が単純支持の状態にある場合に対する計算結果を報告したり。今回は、全く同じ問題に対し、弾性棒が両端固定の状態にある場合についての、計算結果を報告するものである。与えられた問題に対し、ひとつの解法を示せば足りる筈であるが、別の解法も記してある。それは理論上、いくつかの興味があると感じたからである。

第 1 図 平行平面で挟まれた水域中の弾性丸棒

2 記 号

x =横座標 (棒の左端を $x=0$ とする), x_1 =横座標 (棒の中点を $x_1=0$ とする), θ =角座標, r =半径座標, ω =振動の角周波数, w =棒の横変位, a =丸棒の半径, EI =弾性棒の曲げ剛性, A =丸棒の断面積 (もし中実なれば πa^2), ρ_m =棒の材質の密度, ρ_w =水 (または液体) の密度, l =棒の長さ, $\eta=x/l$, p =水圧力, $\xi=x_1/l$, $k=\pi/l$, ϕ =水の振動を表わすところの速度ポテンシャル, $\varphi_\mu(\eta)$ または $\varphi_\mu(\xi)$ =両端固定の弾性棒の横振動に対する正規化直交関数 (固有関数), m_μ =同上に対する固有値 ($\mu=1, 2, \dots$)。

原稿受付 昭和 39 年 5 月 20 日

* 慶応義塾大学工学部

3 予 備 の 事 項

棒の横振動の変位 w は棒の中心 $x=l/2$ の左右に対称的である。これをフーリエ級数で表わすのに、第1の見方は、周期 l をもつた周期的関数 $f(x)$ (第2図) として表わすのである。その場合に

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{2n\pi}{l} x + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{2n\pi}{l} x$$

ととれば (対称性のために) $a_n=0$ となる。

第2図 曲線 $f(x)$ を周期 l で配列した場合

第3図 曲線 $f(x)$ を周期 $2l$ で配列した場合

第2の見方として、周期 $2l$ をもつた周期的関数 $f(x)$ (第3図) として表わせば、やはり対称性のために

$$f(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x_1$$

の形となる。

水域内の水の振動を表わす速度ポテンシャル ϕ は (イ) 水域内でラプラス方程式 $\nabla^2 \phi = 0$ を満足し, (ロ) $x=0$ と $x=l$ とで $\partial \phi / \partial x = 0$ となり, (ハ) 棒の表面 $r=a$ で $\partial \phi / \partial r$ が, 棒自身の振動からくる値と一致し, (ニ) $r \rightarrow \infty$ において $\partial \phi / \partial r \rightarrow 0$ となる, ごときものでなくてはならない。

第1の見方に対し, 振動の1成分

$$w = \cos kix \cos \omega t$$

($k=\pi/l$, $i=0, 2, 4, \dots$) をとつたとき, に対する水の運動の速度ポテンシャル ϕ_i は

$$\phi_i = \Phi_i(r, x) \sin \theta \sin \omega t, \quad \Phi_i(r, x) = A_i F_i(r) \cos kix, \quad F_i(r) = K_1(kir),$$

$$A_i = \frac{-\omega}{(ki) K_1'(kia)},$$

となる¹⁾。もしまた, 第2の見方に対応して

$$w = \cos knx_1 \cos \omega t$$

($n=1, 2, 3, \dots$) の振動成分に対する水の運動の速度ポテンシャル ϕ_i を作れば¹⁾,

$$\phi_n = \Phi_n(r, x_1) \sin \theta \sin \omega t, \quad \Phi_n(r, x_1) = A_n F_n(r) \cos knx_1 + \int_0^\infty s f_n(s) S_1(s, r) \cosh sx_1 ds$$

$$A_n = \frac{-\omega}{kn K_1'(kna)}, \quad F_n(r) = K_1(knr), \quad S_1(s, r) = J_1(sa) Y_1'(sa) - Y_1(sr) J_1'(sa),$$

$$f_n(s) = \frac{\omega nk}{s^2 M(s, s) \sinh(sl/2)} \frac{1}{(nk)^2 + s^2}, \quad M(s, s) = [Y_1'(sa)]^2 + [J_1'(sa)]^2$$

となる。

4 自由振動の方程式とその無限級数による解法

微小横変位 w に対する振動の方程式は

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_m A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p_a = 0 \quad (1)$$

ここで, p_a は棒に作用するところの, 水圧力の合成値とする。(1) 式を書きかえて

$$\frac{EI}{I^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + \rho_m A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p_a = 0 \quad (2)$$

とし、その解を

$$w = \sum_{\mu=1}^{\infty} G_{\mu} \varphi_{\mu}(\eta) \cos \omega t \quad (3)$$

と仮定する。 $\varphi_{\mu}(\eta)$ は微分方程式

$$\frac{d^4 \varphi_{\mu}(\eta)}{d\eta^4} = m_{\mu}^4 \varphi_{\mu}(\eta)$$

と端の条件 ($\varphi_{\mu}(0)=0$, $\varphi_{\mu}'(0)=0$, $\varphi_{\mu}(1)=0$, $\varphi_{\mu}'(1)=0$) とを満足するところの、正規化直交関数列である²⁾。 $\mu=1, 3, 5, \dots$ に対して (棒の中心から見て) 偶関数 (対称的), $\mu=2, 4, 6, \dots$ に対して (同上) 奇関数 (反対称的) となる。

(3) を (2) に代入すれば

$$\sum_{\mu} \left[\frac{EI}{I^4} m_{\mu}^4 - \rho_m A \omega^2 \right] G_{\mu} \varphi_{\mu}(\eta) \cos \omega t - p_a = 0 \quad (4)$$

となる。この両辺に $\varphi_{\mu}(\eta)$ をかけて、 $\eta=0$ から 1 まで積分すれば

$$\left[\frac{EI}{I^4} m_{\mu}^4 - \rho_m A \omega^2 \right] G_{\mu} \cos \omega t = \int_0^1 p_a \varphi_{\mu}(\eta) d\eta \quad (5)$$

棒の中心 $x=l/2$ から見て、左右に対称的な振動のあり方だけを考えるなれば、 $\mu=1, 3, 5, \dots$ とすればよい。水圧力は、微小振動の場合には、一般に

$$p = -\rho_w \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

で与えられるから、丸棒の表面上の値をとり、その合成値を求めると

$$p_a = \pi a \rho_w \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{r=a}, \quad (6)$$

となる。そこで、仮りに

$$w(\eta) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \cos(\pi i \eta) \cos \omega t \quad (7)$$

($i=0, 2, 4, \dots$ と展開ができるものとすれば

$$\phi = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \Phi_i(r, x) \sin \theta \sin \omega t \quad (8)$$

$$p_a = (\pi \omega a \rho_w) \sum_{i=0}^{\infty} w_i \Phi_i(a, x) \cos \omega t \quad (9)$$

である。

(7) は、もともと、(3) を別な形で表わしたものであるから、フーリエ係数の要領により

$$w_i = 2 \int_0^1 w(\eta) \cos(i\pi\eta) d\eta \cdot e_i \cos \omega t$$

ここで $e_0=1/2$, $i \neq 0$ のとき $e_i=1$, とする。そして、(3) より

$$w_i = 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} G_{\nu} \left[\int_0^1 \varphi_{\nu}(\eta) \cos(i\pi\eta) d\eta \right] e_i \cos \omega t = \sum_{\nu=1}^{\infty} G_{\nu} a_{i\nu} \cos \omega t \quad (\nu=1, 3, 5, \dots)$$

が得られる。 $a_{i\nu}$ は係数であつて

$$a_{i\nu} = 2 e_i \int_0^1 \varphi_{\nu}(\eta) \cos(i\pi\eta) d\eta$$

($i=0$ または偶数; ν =奇数)

つぎに、(9) に上記の w_i の値を代入すると

$$\int_0^1 p_a \varphi_{\mu}(\eta) d\eta = (\pi a \omega \rho_w) \cos \omega t \cdot \sum_i \sum_{\nu} G_{\nu} a_{i\nu} c_{i\mu},$$

ここで

$$c_{i\mu} = \int_0^1 \varphi_{\mu}(\eta) \Phi_i(a, x) d\eta = \omega a \frac{a_{i\mu}}{2 e_i} D_i, \quad D_i = \frac{A_i F_i(a)}{\omega a}$$

とおく。以上の計算結果を用い、また簡単のために

$$B = \frac{EI}{l^4} \cdot \frac{1}{\rho_m A}, \quad \varepsilon = \frac{\rho_w \pi a^2}{\rho_m A}, \quad \lambda = \frac{1}{\omega}, \quad K = B m_1^4 \lambda^2 = \frac{B m_1^4}{\omega^2}$$

とおくときは、方程式 (5) は

$$[(B m_\mu^4) \lambda^2 - 1] G_\mu = \varepsilon \sum_i \sum_\nu G_\nu a_{i\nu} a_{i\mu} \left(\frac{D_i}{2e_i} \right) \quad (5a)$$

の形になる。ここで $i=0, 2, 4, \dots; \mu, \nu=1, 3, 5, \dots$ ととる。方程式 (5a) は未知係数 G_μ に関する一次代数方程式であり、それは下記の (無限次元の) 行列式が 0 になる場合に限って、全部が 0 でないところの解をもっている。

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} (K-1) - \varepsilon B_{11}, & -\varepsilon B_{31}, & \dots \\ -\varepsilon (m_1/m_3)^4 B_{13}, & K - (m_1/m_3)^4 - \varepsilon (m_1/m_3)^4 B_{33}, & \dots \\ -\varepsilon (m_1/m_5)^4 B_{15}, & -\varepsilon (m_1/m_5)^4 B_{35}, & \dots \end{vmatrix} = 0, \quad (10)$$

ここで

$$B_{\nu\mu} = \sum_i \left(\frac{D_i}{2e_i} \right) a_{i\mu} a_{i\nu} \quad (11)$$

と置く。

5. 固有振動数に対する略近公式

もし $a/l \rightarrow 0$ ならば $D_i = 1$, そして

$$B_{\nu\mu} = \sum_i \left(\frac{1}{2e_i} \right) a_{i\mu} a_{i\nu}$$

となるが、この場合には、フーリエ級数に関する Parseval の定理によつて、 $B_{\mu\mu} = 1$, $B_{\mu\nu} = 0$ ($\mu \neq \nu$), である。ゆえに、この場合には、方程式 (10) は

$$[K-1-\varepsilon] \cdot [K-(m_1/m_3)^4(1+\varepsilon)] \cdot [K-(m_1/m_5)^4(1+\varepsilon)] \cdots = 0$$

となり、その根は

$$K = 1 + \varepsilon, \quad K = (1 + \varepsilon)(m_1/m_3)^4, \quad \dots,$$

によつて与えられる。

a/l が 0 でない場合に対し、 D_i の数値を求め、これを第 1 表に示してある。また、係数 $a_{i\mu}$ の数値を、第 2 表に示してある。これによつて、公式 (11) の $B_{\nu\mu}$ の値を求めることができる。

第 1 表 係数 D_i の値

$a/l =$	1/10	1/5	1/2.5
D_0	1.00	1.00	1.00
D_2	0.725	0.517	0.321
D_4	0.517	0.321	0.179
D_6	0.398	0.230	0.124
D_8	0.321	0.179	0.0945

第 3 表 係数 $B_{\mu\nu} = B_{\nu\mu}$ の値

	$\mu=1$	$\mu=3$	$\mu=5$
$\nu=1$	0.844	-0.141	0.089
3	-0.141	0.379	-0.032
5	0.089	-0.032	0.314

第 2 表 係数 $a_{i\mu}$ の値

	$\mu=1$	$\mu=3$	$\mu=5$	$\mu=7$
$i=0$	0.828	-0.364	0.223	-0.1650
2	-0.784	-0.818	0.4556	-0.3322
4	-0.0342	1.040	0.632	-0.362
6	-0.0062	0.0962	-1.120	-0.570
8	-0.0020	0.0278	-0.1394	1.164
10			-0.0468	-0.1612
12			-0.0244	0.0630
14				0.0342

例えば $l/a = 5$ ($l/2a = 2.5$) のときの $B_{\nu\mu}$ の値を第 3 表に示してある。

さて、 $m_1 = 4.7300$, $m_3 = 10.996$, $m_5 = 17.279, \dots$ であるから、 $(m_1/m_3)^4 \doteq 1/29$, $(m_1/m_5)^4 \doteq 1/180, \dots$ となる。 $\varepsilon = (\rho_w \pi a^2) / (\rho_m A)$ の値は、普通の場合には (中空棒の場合にでも) 1 位の値をもっている。それにより、(10) 式の行列式 Δ_0 は

$$\begin{vmatrix} \odot & \triangle & \triangle & \triangle & \dots \\ \times & \odot & \times & \times & \dots \\ \times & \times & \odot & \times & \dots \\ \times & \times & \times & \odot & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

の形になる。ここで Δ 印は0.1のオーダーの値、 $\times$ 印は1/300（またはそれ以下）のオーダーの値、となつてゐる。ゆえに略近解として、すくなくとも微小振動の基本振動に対しては

$$K = \lambda^2 (Bm_1^4) = 1 + \varepsilon B_{11}$$

したがつて

$$\omega^2 = \frac{Bm_1^4}{(1 + \varepsilon B_{11})} \quad (12)$$

とつてよいことになる。そして(12)の分母における εB_{11} の項が（略近的に）まわりの水の影響を表わすことになるのである。

これを要約すると（イ）まわりに水が存在しない場合には、公式(12)において $\varepsilon = 0$ ととる。（ロ）まわりに水が存在するが、 $l/a \rightarrow \infty$ であるときには $B_{11} = 1$ である。（ハ）まわりに水が存在し、且つ $l/a = 5$ のときには B_{11} は略近的に0.844の値となるのである。

6, 同じ問題に対する, 別の解法

第3節に記したところの, 第2の見方に立つて計算を進めると下記のごとくになる。変数 $\xi = x_1/l$ を用いて

$$w = \sum_{\mu=1}^{\infty} F_{\mu} \varphi_{\mu}(\xi) \cos \omega t \quad (13)$$

($\mu = 1, 3, 5, \dots$) とおく。

水圧力の計算に対しては

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \Phi_n(r, x_1) \sin \theta \sin \omega t \quad (14)$$

$$w(\xi) = \sum_{\mu=1}^{\infty} w_n \cos(n\pi\xi) \cos \omega t \quad (15)$$

とおく。これより

$$p_a = (\pi a \omega \rho_w) \sum_{n=1}^{\infty} w_n \Phi_n(a, x_1) \cos \omega t \quad (16)$$

さらに(15)と(13)とより

$$d_{n\mu} = 2 \int_{-1/2}^{+1/2} \varphi_{\mu}(\xi) \cos n\pi\xi d\xi$$

($n = 1, 2, 3, \dots; \mu = 1, 3, 5, \dots$) (事実上, n は奇数値だけをとることになる) また

$$\int_{-1/2}^{+1/2} p_a \varphi_{\mu}(\xi) d\xi = (\pi a \omega \rho_w) \cos \omega t \cdot \sum_n \sum_{\nu} F_{\nu} d_{n\nu} [\omega a b_{n\mu}], \quad b_{n\mu} = \frac{1}{\omega a} \int_{-1/2}^{+1/2} \varphi_{\mu}(\xi) \Phi_n(a, x_1) d\xi$$

さて, 振動の方程式(1)に(13)を代入することにより

$$\left[\frac{EI}{l^4} m_{\mu}^4 - \rho_m A \omega^2 \right] F_{\mu} \cos \omega t = \int_{-1/2}^{+1/2} p_a \varphi_{\mu}(\xi) d\xi \quad (17)$$

($\mu = 1, 3, 5, \dots$) が得られるが, 上記の値をこれに代入すると

$$[(Bm_{\mu}^4)\lambda^3 - 1] F_{\mu} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{\nu} d_{n\nu} b_{n\mu} \quad (18)$$

($n = 1, 2, \dots; \mu, \nu = 1, 3, 5, \dots$) が得られる。これが, 第1の見方に立つて得られたところの方程式(5a)に対応するものである。

関数 $\Phi_n(a, x_1)$ の値は, 数値計算のためには

$$\Phi_n(a, x_1) = A_n F_n(a) \cos(kn x_1) + \int_0^{\infty} \frac{(kna)(\omega a)}{[\zeta^2 M(\zeta)] \sinh\left(\frac{l}{2a}\zeta\right)} \cdot \frac{\cosh\left(\zeta \frac{x_1}{a}\right)}{(nka)^2 + \zeta^2} d\zeta$$

(ここで $\zeta = sa$)と書き直しておくのが便利である。それにしても, この第2の見方に立つ解法は, 基本振動数の評価に対しては不便である。しかし, 理論的興味が無いと言えないので, ここに略記した次第である。

参 考 文 献

- 1) 鬼頭, 二つの平行平面間に挟まれた水域中における弾性棒の振動について, 造船協会誌, 357号, 昭34, 6月
- 2) 鬼頭, 矩形水槽壁の接水振動について(第8報), 造船協会論文集, 第115号, 昭39.6.