(昭和 40 年 5 月造船協会春季講演会において講演)

超空洞翼型の理論における Munk の積分とその応用

正員 西 山 哲 男*

Munk's Integral for Fully Cavitated Hydrofoils by Acceleration Potential Method.

By Tetsuo Nishiyama, *Member*

Summary

Paper is aimed to study analytically the steady characteristics of the fully cavitated hydrofoils by acceleration potential concepts. By taking the usual linearized assumptions, the problem can be reduced by Tulin transformation to potential one of mixed boundary type. Basic integral equation with respect to acceleration potential, resulted from the boundary condition over the hydrofoil, is of Söhnngen's type. After examining the behaviour of singularity of pressure at the leading edge from the acceleration potential obtained, the lift and drag are expressed in a form of Munk's integral. Then it is shown that the present method of analysis can be easily extend to the fully cavitated hydrofoils with upper and lower free boundary of practically extreme importance.

Numerical calculations are made for the fully cavitated hydrofoils with upper free boundary and the effect of upper free boundary on the steady characteristics are examined in some detail. Comparisons with experimental results confirm the present theory as far as the linearized assumptions hold.

1 緒 言

Tulin が薄翼近似の手法を用いて、不連続流理論の線型化に成功して以来 [1], 超空洞翼型に関する理論的研究が多数発表されて、急激に進展しており [2], その成果の一つである優秀な理論的翼型が、すでに実用化されている現状である。

超空洞翼型の理論が、水中翼や推進器に直接適用できるためには、それぞれに特有な自由境界の影響を正確に取入れて、理論の構成をすることが、本質的に重要である。すでに知られている Johnson [3], Auslaender [4] の広範囲にわたる研究にも、特性解析の手法および精度に関してなお不十分な憾みを残している。

本文では、薄翼近似の立場を保持しつつ、加速度ポテンシャルの概念 [5] を用いて、一般的に超空洞翼型の定常特性を、精密に解析することに重点を置き

- (i) 速度場における Tulin の理論を裏づけると同時に、空洞抗力に対して、解析的鮮明さを与え
- (ii) 特性を Munk の積分で与えることにより、簡潔にして便利な表示で、示すことができ
- (iii) さらに、理論を拡張することにより、超空洞翼型特性に及ぼす各種自由境界の影響を、正確に検討することができることを示して、実用性を与え

全体を通じて、超空洞翼型の周りの流れの場に、加速度ポテンシャルの概念を用いることは、極めて有効且鮮明であることが示されてある。また、詳細な数値計算を逐行して、特性に及ぼす自由境界の影響を、特に水中翼に関連して明かにし、且つ、実験値と比較することにより、線型理論の実用性について検討してある。

2 超空洞翼型に依る加速度場

原稿受付 昭和 39 年 12 月 19 日

* 東北大学 工学部

弦長 S なる超空洞翼型が速度 U なる一様流中にあるものとし、前縁に座標原点を取り、弦長方向を x 軸、これに垂直方向を y 軸とする。超空洞翼型による流体粒子の擾乱は、一般に極めて小さく、その二乗以上は省略できるものとする。Euler の運動方程式を線型化すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \operatorname{grad} u = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = a \quad (1)$$

となることから、加速度 a はスカラー量 $-p/\rho$ の勾配になつていて、ポテンシャルを有することになり、次式で与えられる

$$\phi(x, y, t) = -\frac{p}{\rho} \quad (2)$$

連続方程式 $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ へ代入することにより

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3)$$

が得られ、調和函数であることが知れるから、これと共役な調和函数 ψ も存在し、これを加速度流線函数とするとき複素加速度ポテンシャルは

$$w(z, t) = \phi + i\psi; \quad z = x + iy \quad (4)$$

で与えられる。従つて、超空洞翼型による擾乱加速度成分は Cauchy-Riemann の関係で与えられる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ a_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

定常運動に対する境界条件としては

(i) 空洞境界をなす自由流線上では、圧力 p は常に零であるべきことにより、(2) より

$$\phi(x, +0) = \phi(x, -0) = 0 \quad (6)$$

(ii) 超空洞翼型を

$$y = f(x), \quad s \geq x \geq 0 \quad (7)$$

で与える時、 y 方向の加速度成分は

$$a_y = U^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (8)$$

であるから、(5) より

$$\phi(x, -0) = -U^2 \frac{dy}{dx} \quad (9)$$

3 無限遠流体中における超空洞翼型

z 面を物理面とし、Tulin 変換

$$\sqrt{z} = -\zeta; \quad \zeta = \xi + i\eta \quad (10)$$

により、 ζ 面の下半平面に写像する。第1図に示すごとく、 ξ 軸上で (6) (9) なる境界値が与えられるから、混合型境界値問題となり、複素加速度ポテンシャルの実部および虚部は

$$\phi(\xi, \eta) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\sqrt{s}} \frac{\phi(\xi', 0) \eta}{(\xi - \xi')^2 + \eta^2} d\xi' \quad (11)$$

$$\psi(\xi, \eta) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\sqrt{s}} \frac{\phi(\xi', 0) (\xi - \xi')}{(\xi - \xi')^2 + \eta^2} d\xi' \quad (12)$$

で与えられる。(9) (12) より直ちに

$$U^2 \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\sqrt{s}} \frac{\phi(\xi', -0)}{\xi - \xi'} d\xi' \quad (13)$$

を得る。これは超空洞翼型の加速度ポテンシャルを決定する積分方程式で、基本となる。Söhngen の反転定理 [6] により、(13) の解析解は

$$\phi(\xi) = -\frac{U^2}{\pi} \sqrt{\frac{s - \xi}{\xi}} \int_0^{\sqrt{s}} \sqrt{\frac{\xi'}{s - \xi'}} \frac{dy}{dx} \frac{d\xi'}{\xi - \xi'} \quad (14)$$

第1図 無限遠流体中の物理面と写像面および線型境界条件

で与えられ、後縁では $\phi(\sqrt{s})=0$ となり、後縁では切線方向に、空洞流線が発生することを示している。(10) を用いて z 面で書直せば

$$\phi(x) = -\frac{U^2}{\pi} \sqrt{\frac{s-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} \int_0^{\sqrt{s}} \sqrt{\frac{\xi'}{\sqrt{s}-\xi'}} \frac{dy}{dx} \frac{d\xi'}{\sqrt{x}-\xi'} \quad (15)$$

となり、前縁には圧力の特異点があり、 $x^{-1/4}$ の性質を有していることが分る。一方、空洞の発生していない翼型では、 $x^{-1/2}$ の性質を有していることを併慮すれば [7], 超空洞状態になると、前縁における圧力の特異性が、弱くなることが言える。

超空洞翼型の揚力は

$$L = -\rho \int_0^s \phi(x, -0) dx = -\rho \int_0^{\sqrt{s}} \phi(\xi, -0) \cdot 2\xi d\xi \quad (16)$$

で与えられるから、(14) を代入して、 ξ に関する積分を行なえば、最後に次式

$$C_l = -2 \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{dy}{dx} (2\xi-1) d\xi \quad (17)$$

を得る。これは超空洞任意翼型の揚力に対する Munk の積分表示である。

つぎに、前縁における圧力の特異性を考慮すれば、空洞抗力は、一般に次式

$$D = \rho \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\epsilon}^s \phi(x, -0) \frac{dy}{dx} dx + \oint_{\epsilon} \phi(x, -0) \frac{dy}{dx} dx \right\} \quad (18)$$

で与えられる。翼面上における複素加速度ポテンシャルは、

$$w(x) = \phi(x) - iU^2 \frac{dy}{dx} \quad (19)$$

であることから、(18) は

$$D = \rho \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\epsilon}^s \phi(x, -0) \frac{dy}{dx} dx - \frac{1}{2U^2} \text{Im} \oint_{\epsilon} |w^2(z) dz| \right\} \quad (20)$$

となる。(20) 式第二項は、前縁吸引力による空洞抗力を示しているが、(15) より明かなごとく

$$w(z) \sim z^{-1/4} \quad (21)$$

であるから、(20) へ代入すれば、Cauchy の積分定理により、零となることが分る。一方、空洞の発生していない翼型の前縁吸引力は $2\pi\alpha^2$ で与えられることを併慮すれば [7], 超空洞状態になると、前縁吸引力による抗力は完全に消失することが明らかになる。従つて、(13) (20) より

$$C_d = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^1 \frac{\phi(\xi)}{U^2} d\xi \right]^2 \quad (22)$$

あるいは、(14) (22) より

$$C_d = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{dy}{dx} d\xi \right]^2 \quad (23)$$

を得る。(23) は超空洞任意翼型の空洞抗力に対する Munk の積分表示である。

自由流線は (9) より

$$y_c = - \int \frac{\phi(x)}{U^2} dx + C \quad (24)$$

で与えられる。ただし、積分常数 C は空洞が前縁より発生するように決めるものとする。実用上、問題になるのは、背面側自由流線であるから、 ζ 面の負の ξ 軸上の加速度流線函数は (12) (14) より

$$\psi(\xi) = -\frac{U^2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{-\xi}} \int_0^{\sqrt{s}} \sqrt{\frac{\xi'}{\sqrt{s}-\xi'}} \frac{dy}{dx} \frac{d\xi'}{\xi-\xi'} \quad (25)$$

となる。従つて、自由流線は (24) (25) より

$$y_c(\xi) = \frac{s}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi'}{1-\xi'}} \frac{dy}{dx} \left\{ 2\xi \sqrt{\frac{1-\xi}{-\xi}} + (1-2\xi') \log \frac{\sqrt{\frac{1-\xi}{-\xi}} - 1}{\sqrt{\frac{1-\xi}{-\xi}} + 1} - 4\xi' \sqrt{\frac{1-\xi'}{\xi'}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{1-\xi}{-\xi}}}{\sqrt{\frac{1-\xi'}{\xi'}}} \right\} d\xi' + C \quad (26)$$

を得る。(26) は超空洞任意翼型の背面自由流線に対する Munk の積分表示であつて、正規作動状態では常に

$$y_c \geq y \quad (27)$$

を満足しなければならぬ。

4 吟 味

以上、加速度ポテンシャルの概念により Munk の積分の形で、超空洞翼型の揚力、抗力および自由流線を求める解析法とその結果を示した。次に、既知の結果と対比して、吟味してみる。

4.1 Tulin の対応則

空洞の発生しない翼型の揚力は

$$\bar{L} = -\rho \int_0^{\sqrt{s}} \{\phi(\xi, +0) - \phi(\xi, -0)\} d\xi = -2\rho \int_0^{\sqrt{s}} \phi(\xi) d\xi \quad (28)$$

で与えられるから、(14) (28) より

$$\bar{C}_l = -4 \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{dy}{dx} d\xi \quad (29)$$

を得る。同様に、前縁に関するモーメントは

$$\bar{C}_m = -2 \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{dy}{dx} (2\xi - 1) d\xi \quad (30)$$

となり、(29) (30) は Munk による積分表示の原形である [8]。従つて、(17) (30) および (23) (29) を比較することにより、次の関係を得る

$$C_l = \bar{C}_m, \quad C_d = \frac{1}{8\pi} (\bar{C}_l)^2 \quad (31)$$

(30) は Tulin に依り導かれた対応則に完全に一致している [1]。

4.2 平板翼型

迎角 α なる超空洞平板の線型特性は (17) (23) および (26) において $dy/dx = -\alpha$ と置くことにより

$$C_l = \frac{\pi}{2} \alpha, \quad C_d = \frac{\pi}{2} \alpha^2 \quad (32)$$

$$y_c = -s\alpha \left[x - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x} \right) \sqrt{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{4} \log(1+2\sqrt{x}-2\sqrt{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}) \right] \quad (33)$$

を得る。(32) (33) は既知の非線型解を線型化することにより求められる解と完全に一致する [9]。

5 理論の拡張

第1図 ζ 面上 ξ 軸に、伸縮、跳躍点があつても、境界値問題の性質には、なんら変化がなく、上述の解析手法は依然成立する。次に、実用上、重要と考えられる場合へ理論の拡張を試みる。

5.1 上側に自由境界がある場合

z 面では、自由境界より、 f なる位置に、弦長 s なる超空洞翼型を考え、これを第2図に示すごとく

$$z = A \left(\zeta - a \log \frac{a+\zeta}{a} \right); \quad a \geq 0 \quad (34)$$

により、 ζ 面へ写像する。ただし、原点が対応する様に、積分常数を決めてあり且つ次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} s &= A l \left(1 - a \log \frac{a+1}{a} \right) \\ f &= a\pi A l \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

(17) (23) および (34) へを代入することにより、それぞれ Munk の積分表示で、次のごとく表わすことができる。

$$C_l = \frac{-2}{1-a \log \frac{1+a}{a}} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{dy}{dx} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{a(a+1)}}{a+\xi} \right\} d\xi \quad (36)$$

$$C_d = \frac{1+a}{\pi \left(1-a \log \frac{1+a}{a} \right)} \left[\int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{dy}{dx} \frac{d\xi}{\xi+a} \right]^2 \quad (37)$$

第2図 上側に自由境界がある場合の物理面と写像面および線型境界条件

$$y_c(\xi) = \frac{s}{\pi \left(1 - a \log \frac{1+a}{a}\right)} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi'}{1-\xi'}} \frac{dy}{dx} \frac{1}{\xi' + a} \left\{ (a + \xi') \log \frac{\sqrt{1-\xi} - 1}{\sqrt{1-\xi} + 1} \right. \\ \left. - \sqrt{a(a+1)} \log \frac{\sqrt{1-\xi} - \sqrt{1+a}}{\sqrt{1-\xi} + \sqrt{1+a}} + 2 \sqrt{\xi'(1-\xi')} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi'}} \right\} d\xi' + C \quad (38)$$

没水深度が零になつた極限では、翼型は自由境界上にある。このときの特性は、(36) (37) 式で $a \rightarrow 0$ の極限移行をすればよい。すなわち

$$(C_l)_{f=0} = -2 \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{dy}{dx} d\xi \quad (39)$$

$$(C_d)_{f=0} = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{dy}{dx} \frac{d\xi}{\xi} \right]^2 \quad (40)$$

一方、(33) より

$$\lim_{a \rightarrow 0} z = A\zeta \quad (41)$$

を得るから、(14) より明かな様に、前縁吸引力は零とはならず、(20) 式第二項より次式で与えられる

$$C_{ds} = -\frac{1}{\pi} \left[\int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{dy}{dx} \frac{d\xi}{\xi} \right]^2 \quad (42)$$

従つて、(29) (39) および (40) (42) より

$$\left. \begin{aligned} (C_l)_{f=0} &= \frac{1}{2} \bar{C}_l \\ (C_d)_{f=0} + C_{ds} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

が得られ、自由境界上では揚力は無限遠流体中の相当値の半分となり、空洞抗力は前縁吸引力と打消して、全体としては抗力が存在しないと言える。

5.2 下側に自由境界がある場合

z 面では、下側自由境界より f なる位置に、弦長 s なる超空洞翼型を考え、これを第3図に示すごとく

$$z = A \left(\zeta + a \log \frac{a-\zeta}{a} \right); \quad a \geq 1 \quad (44)$$

により、 ζ 面へ写像する。ただし、原点が対応するように、積分常数を決めてあり、且つ次の関係がある

$$\left. \begin{aligned} s &= Al \left(1 + a \log \frac{a-1}{a} \right) \\ f &= a\pi Al \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

(17) (23) および (26) へ (44) を代入することにより、それぞれ Munk の積分表示で、次のごとく表わすことができる。

$$C_l = \frac{-2}{1+a \log \frac{a-1}{a}} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{dy}{dx} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{a(a-1)}}{\xi-a} \right\} d\xi \quad (46)$$

$$C_d = \frac{a-1}{\pi \left(1 + a \log \frac{a-1}{a} \right)} \left[\int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{dy}{dx} \frac{d\xi}{\xi-a} \right]^2 \quad (47)$$

$$y_c(\xi) = \frac{-s}{\pi \left(1 + a \log \frac{a-1}{a} \right)} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi'}{1-\xi'}} \frac{dy}{dx} \frac{1}{\xi' - a} \left\{ (a + \xi') \log \frac{\sqrt{1-\xi} - 1}{\sqrt{1-\xi} + 1} \right. \\ \left. - \sqrt{a(a-1)} \log \frac{\sqrt{1-\xi} - \sqrt{a-1}}{\sqrt{1-\xi} + \sqrt{a-1}} + 2 \sqrt{\xi'(1-\xi')} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi'}} \right\} d\xi' + C \quad (48)$$

第3図 下側に自由境界がある場合の物理面と写像面および線型境界条件

第4図 上下両側に自由境界がある場合の物理面と写像面および線型境界条件

5.3 上下両側に自由境界がある場合

z 面では、幅 $2f$ なる噴流の中央に、弦長 s なる超空洞翼型を考える。これを第4図に示すごとく

$$z = \frac{A}{2} \log \frac{\zeta^2 - a^2}{a^2}; \quad a \geq 1 \quad (49)$$

により、 ζ 面へ写像する。ただし、原点が対応するように、積分常数を決めてあり、且つ次の関係がある。

$$s = -\frac{f}{\pi} \log \frac{a^2 - 1}{a^2} \quad (50)$$

(17) (23) および (26) へ (49) を代入することにより、それぞれ Munk の積分表示で、次のごとく表わすことができる。

$$C_l = \frac{-2}{\log \frac{a^2 - 1}{a^2}} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{dy}{dx} \left\{ \frac{\sqrt{\frac{a-1}{a}}}{\xi-a} + \frac{\sqrt{\frac{a+1}{a}}}{\xi+a} \right\} d\xi \quad (51)$$

$$C_d = \frac{-\pi}{\log \frac{a^2 - 1}{a^2}} \left[\left\{ \sqrt{\frac{a+1}{a}} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{dy}{dx} \frac{d\xi}{\xi+a} \right\}^2 + \left\{ \sqrt{\frac{a-1}{a}} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \frac{dy}{dx} \frac{d\xi}{\xi-a} \right\}^2 \right] \quad (52)$$

$$y_c(\xi) = \frac{f}{\pi^2} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi'}{1-\xi'}} \frac{dy}{dx} \left\{ \frac{1}{\xi'+a} \left\{ \sqrt{\frac{a+1}{a}} \log \frac{\sqrt{\frac{1-\xi}{-\xi}} - \sqrt{\frac{a+1}{a}}}{\sqrt{\frac{1-\xi}{-\xi}} + \sqrt{\frac{a+1}{a}}} + 2 \sqrt{\frac{1-\xi'}{\xi'}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{1-\xi}{-\xi}}}{\sqrt{\frac{1-\xi'}{\xi'}}} \right\} \right. \\ \left. - \frac{1}{\xi'-a} \left\{ \sqrt{\frac{a-1}{a}} \log \frac{\sqrt{\frac{1-\xi}{-\xi}} - \sqrt{\frac{a+1}{a}}}{\sqrt{\frac{1-\xi}{-\xi}} + \sqrt{\frac{a+1}{a}}} - 2 \sqrt{\frac{1-\xi'}{\xi'}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\frac{1-\xi}{-\xi}}}{\sqrt{\frac{1-\xi'}{\xi'}}} \right\} \right\} d\xi' + C \quad (53)$$

以上、自由境界がある場合の Tulin の対応則は、一般に次式で与えることができる

$$C_l = k_l \bar{C}_m, \quad C_d = \frac{k_d}{8\pi} \bar{C}_l^2 \quad (54)$$

ただし、 k_l, k_d はそれぞれ揚力、空洞抗力に及ぼす自由境界の影響を表わす係数で、次式

$$k_l = C_l / C_{l\infty}, \quad k_d = C_d / C_{d\infty} \quad (55)$$

で表われ、 $k_l = k_d = 1$ のときは (31) に帰着する。

なお、以上の諸式で $a \rightarrow \infty$ の極限移行をすることにより、それぞれ無限遠流体中の相当値に完全に一致することを容易に証明することができる。

6 Munk の積分の簡易化

以上、誘導した特性に関する Munk の積分表示は、後縁位置で特異性を示す函数が、被積分函数に含まれているので、次式

$$\xi = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta); \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (56)$$

により、変数変換をし、翼型を

$$dy/dx = -A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \quad (57)$$

と置けば、実用上、便利な形に表わすことができる。

(i) 無限遠流体

$$C_l = \frac{\pi}{2} \left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right) \quad (58)$$

$$C_d = \frac{\pi}{2} \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right)^2 \quad (59)$$

これは Tulin の結果に一致している [1]。

(ii) 上側に自由境界がある場合

$$C_l = \frac{1}{1-a \log \frac{a+1}{a}} \left[\left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right) \pi + 2\sqrt{a(a+1)} \left\{ A_0(I_1 - I_0) + \frac{1}{2} \sum_1^\infty A_n(2I_n - I_{n+1} - I_{n-1}) \right\} \right] \quad (60)$$

$$C_d = \frac{a+1}{\pi \left(1-a \log \frac{a+1}{a} \right)} \left[A_0(I_1 - I_0) + \frac{1}{2} \sum_1^\infty A_n(2I_n - I_{n+1} - I_{n-1}) \right]^2 \quad (61)$$

$$\text{ただし} \quad I_n = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{1+2a-\cos\theta} d\theta \quad (62)$$

(iii) 下側に自由境界がある場合

$$C_l = \frac{1}{1+a \log \frac{a-1}{a}} \left[\left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right) \pi - 2\sqrt{a(a-1)} \left\{ A_0(J_1 - J_0) + \frac{1}{2} \sum_1^\infty A_n(2J_n - J_{n+1} - J_{n-1}) \right\} \right] \quad (63)$$

$$C_d = \frac{a-1}{\pi \left(1+a \log \frac{a-1}{a} \right)} \left[A_0(J_1 - J_0) + \frac{1}{2} \sum_1^\infty A_n(2J_n - J_{n+1} - J_{n-1}) \right]^2 \quad (64)$$

$$\text{ただし} \quad J_n = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{1-2a-\cos\theta} d\theta \quad (65)$$

(iv) 上下両側に自由境界がある場合

$$C_l = \frac{-2}{\log \frac{a^2-1}{a^2}} \left[\sqrt{\frac{a+1}{a}} \left\{ A_0(I_0 - I_1) - \frac{1}{2} \sum_1^\infty A_n(2I_n - I_{n+1} - I_{n-1}) \right\} \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{a-1}{a}} \left\{ A_0(J_0 - J_1) - \frac{1}{2} \sum_1^\infty A_n(2J_n - J_{n+1} - J_{n-1}) \right\} \right] \quad (66)$$

$$C_d = \frac{-1}{\pi \log \frac{a^2-1}{a^2}} \left[\sqrt{\frac{a+1}{a}} \left\{ A_0(I_0 - I_1) - \frac{1}{2} \sum_1^\infty A_n(2I_n - I_{n+1} - I_{n-1}) \right\}^2 \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{a-1}{a}} \left\{ A_0(J_0 - J_1) - \frac{1}{2} \sum_1^\infty A_n(2J_n - J_{n+1} - J_{n-1}) \right\}^2 \right] \quad (67)$$

7 数 値 例 結 言

数値計算は、水中翼に関連のある上側自由境界の場合について行ない、迎角と反りの影響をそれぞれ別箇に取出してあるので、実際の場合は、これら二つの線型結合により求めればよい。

第5図には、迎角を持った超空洞平板の圧力分布を示す。上側自由境界に接近する程、圧力は一般に増加している。

第6図には、迎角を持った超空洞平板の揚力、空洞抗力を示してある。一般に、没水深度が小さくなる程、自由境界の影響により、揚力および空洞抗力ともに増加し、没水深度が零という極限では、無限遠流体中における相当値の倍となる。一方、Green の非線型解[10]を点線で示してあるが、迎角毎に異つた影響を示し、本線型解は迎角が 0° と 4° との非線型解のほぼ中間にあることが分る。つぎに、空洞発生、無い時の揚力を鎖線で示してあるが、超空洞状態とは反対に、自由境界の影響により、揚力は減少し且つその影響量も小さい。

反りの影響を見るために、代表的な理論的翼型三種

(i) 二項翼 $A_2 = -\frac{1}{2} A_1$

第5図 超空洞平板翼型の圧力分布

第6図 超空洞平板翼型の揚力、抗力に及ぼす自由境界の影響

第7図 超空洞翼型の反り分布

第8図 超空洞二項翼型の圧力分布

第9図 反りによる超空洞翼型の揚力、抗力に及ぼす自由境界の影響

(ii) 三項翼 $A_2 = -A_1, A_3 = \frac{1}{2} A_1$

(iii) 五項翼 $A_2 = -\frac{3}{4} A_1, A_3 = \frac{4}{3} A_1, A_4 = -\frac{2}{3} A_1, A_5 = \frac{1}{3} A_1$

を選び、第7図にその形状を示してある。

第8図には、二項翼型の圧力分布の例を示してある。一般に、自由境界に接近するに伴い、圧力分布は増加し、特に翼型前半部で著しいことが注目される。

したがって、第9図に示すごとく、反りによる揚力は自由境界へ接近するに伴い、何れの翼型も増加している。一方、空洞抗力は、逆に減少しており、反りの最大値が後縁へ接近する程顕著であるのが特長であつて、自由境界の影響度は揚力に比し空洞抗力の方が大きい。

第10図には、迎角および反りによる理論揚抗比に及ぼす自由境界の影響を示してある。迎角による揚抗比は、自由境界の影響を受けず、常に一定であるが、反りによる揚抗比は一般に自由境界へ接近するとともに増加し、二項、三項、五項翼の順に、その量が多い。

第11図には、超空洞平板翼の背面自由流線を示してある。無限遠流体中における相当値に比し、背面自由流線は、自由境界の影響により、上側へ移動し、空洞容積は大きくなることが特長である。点線で示したAuslaenderの解[4]は、僅かながら大きい値を与えている。

第12, 13図には、それぞれ超空洞平板翼の理論揚力と空洞抗力に対する水槽実験値[3]との比較を示してある。解析の相異に由来するものだけを取り出すために、縦横比および摩擦抵抗に対する修正は、Johnson[3]と全く同一に行なつてある。非線型解を用いたJohnson値に比し、本線型解は、一般に大きい値を与えているが、線型仮定の成立する小迎角の範囲では、非線型解に比し計算の簡単な線型理論の有効性が十分認められる。

第14図には、超空洞平板翼の揚力、空洞抗力に及ぼす各種自由境界の影響を括め、同時にJohnson[3]、Tulin[11]および大場[12]の結果を点線で示し、比較参考に供してある。

第10図 揚力係数 0.1 における超空洞翼型の迎角および反りによる理論揚抗比

第11図 超空洞平板翼型の背面自由流線

8 結 言

加速度ポテンシャルの概念を用いて、超空洞翼型の線型理論を展開し、速度場における Tulin の理論を裏付

第 12 図 超空洞平板翼型の理論揚力と NASA 実験値との比較

第 13 図 超空洞平板翼型の理論抗力と NASA 実験値との比較

第 14 図 超空洞平板翼型の揚力、抗力に及ぼす各種自由境界の影響

けるとともに、統一的な鮮明さを与え、Munk の積分表示による簡潔な特性表示を求めることができた。また、
斯様な解析方法は、実用上重要な自由境界のある場合でも、容易に拡張できることを示した。

References

- [1] M. P. Tulin ; DTMB Rep. C-638, 1955
 - [2] J. A. Guerst ; Int. Shipb. Prog. vol 7, 1960
T. Y. Wu ; Calif. Inst. Tech. Rep. 21-22, 1956
R. Ōba ; ZAMM Bd 41, 1961
B. L. Parkin ; Jour. of Aero. Sci. vol 29, 1962
A. G. Fabula ; Jour. of Aero. Sci. vol 28, 1961
 - [3] V. E. Johnson ; NASA T. R. R- 93, 1961
 - [4] J. Auslaender ; Jour. of Ship Res. vol 6, 1962
 - [5] L. Prandtl ; Luftfahrtforschung Bd 13, 1936
 - [6] H. Söhngen ; Mathem. Zeitsch. Bd 45, 1939
 - [7] Robinson & Laurmann ; Wing Theory, Camb. Univ. Press 1956
 - [8] M. Munk ; NACA Rep. 142, 1922
 - [9] H. Lamb ; Hydrodynamics, 6th ed. 1945
 - [10] A. E. Green ; Proc. Camb. Phil. Soc. vol 32, 1936
 - [11] M. P. Tulin ; Naval Hydrodynamics-4th Symp. 1962
 - [12] 大場 ; 東北大学速研報告 vol 19, 1963
-