(昭和 40 年 5 月造船協会春季講演会において講演)

外圧を受ける円筒の胴板座屈について

正員 本 間 康 之*

Shell Buckling of Circular Cylindrical Shells Subjected to External Pressure

By Yasuyuki Homma, *Member*

Summary

A theoretical studies are presented for the some problems of shell instability of circular cylindrical shells subjected to hydrostatic pressure. The method used is that of minimization of the total potential.

(1) Effect of frame on shell buckling

The deformation of the shell immediately before buckling was assumed to be uniform by previous investigators. But the deflection prior to buckling is not uniform owing to the effect of the frame on the deflection, it is the axisymmetrical deformation. The buckling pressure occurred from this axisymmetrical state is calculated.

(2) Effect of buckling configuration

An axial distribution of radial displacement during buckling was given by $Q = \cos \pi \xi$ in many previous papers. But it may be thought that buckled wave pattern is more flat form than $\cos \pi \xi$ by the effect of tangential stress existing in the shell, then the buckling pressure obtained by putting the buckled wave pattern as follows

$$Q = A \sinh \kappa_2 \xi \sin \kappa_1 \xi + D \cosh \kappa_2 \xi \cos \kappa_1 \xi + K$$

is compared to the pressure in the case of the pattern given by $\cos \pi \xi$.

(3) Error of approximate formula of buckling pressure

The approximate formulas of buckling pressure developed from Mises' accurate formula by Tokugawa or Windenburg are used generally for the design and checking of experimental data. The accuracies of these formulas are examined, and checking of experimental data by Mises' formula are proposed.

1 著 言

この論文は一樣な外圧を受ける円筒の胴板座屈についてつぎのような点に対し理論的な検討を行なつたものである。

1.1 肋骨の影響

現在までに胴板座屈について多数の論文が発表されているが何れも座屈前の変形を考えると肋骨の影響を無視して、歪ならびに応力は一樣であるとし、この状態からの座屈を論じている。しかし肋骨を考慮に入れると従来の仮定にくらべて周方向平均圧縮応力は減少し、軸方向には曲げを生ずることになる。これらの現象はそれぞれ座屈圧力を増加および減少させる効果があるように思われる。このような肋骨の影響をしらべるため座屈直前に円筒は座屈時の圧力に対応する軸対称変形を生じていると仮定し、エネルギー法によつて座屈圧力を計算した。

1.2 座屈波形の形による影響

エネルギー法によつて座屈圧力を求める場合座屈波形の軸方向分布を余弦（または正弦）曲線に仮定することが多い。しかし円筒には周方向応力が存在しているので円筒の形状、肋骨の寸法等によつては座屈波形が余弦曲

原稿受付 昭和 39 年 12 月 20 日

* 東京大学教養学部

線より flat な形になることが予想され、事実山本¹⁾は円筒の全体的な座屈に対し、2種類の余弦曲線を組み合わせた flat な形を仮定し、良い理論値を得ている。そこで座屈波形を「両端で支持された円筒が外圧によつて生ずる撓み形」と相似な形において求めた座屈圧力を余弦曲線に仮定した場合と比較してみた。

第1図

1.3 座屈応力の近似式

現在では、徳川、鬼頭²⁾あるいは Windenburg, Trilling³⁾によつて理論式から導びかれた近似式を基礎にして実験結果の整理が行われている。しかしこれらの近似式は杉村⁴⁾が指摘しているように相当の誤差を有する。そこでこれらの近似式の精度を検討し、別の整理方法を試みてみた。

2 座屈圧力に対する肋骨の影響

2.1 外圧を受ける円筒殻の歪エネルギー

第1図に示す記号および座標系を用い、円筒の軸方向、周方向および円筒面に垂直な方向にそれぞれ U , V , W の変位を生じてい

るとき歪エネルギーは円筒の半径の変化を考慮に入れて⁵⁾

$$\left. \begin{aligned} U_e &= \frac{Ehab}{2(1-\nu^2)} \frac{h^2}{a^2} \iint \left[\frac{a^2}{b^2} \left(u_\xi + \frac{1}{2} \frac{h}{b} w_\xi^2 \right)^2 + 2\nu \frac{a}{b} \left(u_\xi + \frac{1}{2} \frac{h}{b} w_\xi^2 \right) \left\{ v_\varphi - w + \frac{h}{2a} (v + w_\varphi)^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ v_\varphi - w + \frac{h}{2a} (v + w_\varphi)^2 \right\}^2 \right] \left(1 - \frac{h}{a} w \right) d\xi d\varphi \\ U_s &= \frac{Ehab}{4(1+\nu)} \frac{h^2}{a^2} \iint \left(u_\varphi + \frac{a}{b} v_\xi \right)^2 \left(1 - \frac{h}{a} w \right) d\xi d\varphi \\ U_b &= \frac{Ehab}{24(1-\nu^2)} \frac{h^2}{a^2} \iint \left[\frac{a^2 h^2}{b^4} w_{\xi\xi}^2 + \frac{h^2}{a^2} (w_{\varphi\varphi} + w)^2 + 2\nu \frac{h^2}{b^2} w_{\xi\xi} (w_{\varphi\varphi} + w) \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{h}{b} w_{\xi\varphi} + \frac{h}{2b} v_\xi - \frac{h}{2a} u_\varphi \right)^2 \right] \left(1 - \frac{h}{a} w \right) d\xi d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに

U_e = 伸び歪エネルギー, U_s = 剪断歪エネルギー, U_b = 曲げ歪エネルギー

$u = U/h$, $v = V/h$, $w = W/h$, E = ヤング率, ν = ポアソン比

a = 円筒の半径, b = 円筒の長さ, h = 円筒の板厚

2.2 座屈前の変形

円筒は外圧 P で座屈するものとし、座屈直前の変位を U_0 , V_0 , W_0 であらわす。円筒の初期撓みは無いものとする。座屈前の変形は軸対称と考えてよい。円筒の中性面における軸方向および周方向の歪と応力を ε_{x0} , $\varepsilon_{\varphi 0}$ および σ_{x0} , $\sigma_{\varphi 0}$ とおくと参考文献(6)から

$$\varepsilon_{x0} = \frac{\partial U_0}{\partial \chi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_0}{\partial \chi} \right)^2, \quad \varepsilon_{\varphi 0} = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial V_0}{\partial \varphi} - W_0 \right) + \frac{1}{2a^2} \left(V_0 + \frac{\partial W_0}{\partial \varphi} \right)^2$$

変形は軸対称であるから

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varphi} = V_0 = \frac{\partial V_0}{\partial \chi} = \frac{\partial V_0}{\partial \varphi} = \frac{\partial W_0}{\partial \varphi} = 0$$

したがつて

$$\varepsilon_{x0} = U_{0x} + \frac{1}{2} W_{0x}^2, \quad \varepsilon_{\varphi 0} = -\frac{W_0}{a} \quad (2)$$

外力との釣合から

$$\begin{aligned} \sigma_{x0} &= -Pa/2h, \quad \sigma_{\varphi 0} = -E \left(\frac{W_0}{a} + \nu \frac{Pa}{2Eh} \right) \\ \therefore \varepsilon_{x0} &= -\frac{1-\nu^2}{E} \frac{Pa}{2h} + \nu \frac{W_0}{a} \end{aligned} \quad (3)$$

(2), (3) から

$$U_{0x} + \frac{1}{2} W_0^2 x = -\frac{1-\nu^2}{E} \frac{Pa}{2h} + \nu \frac{W_0}{a}$$

無次元化して

$$u_{0\xi} + \frac{1}{2} \frac{h}{b} w_0^2 \xi = \frac{b}{h} \left(-\frac{1-\nu^2}{2} q + \nu \frac{h}{a} w_0 \right) \quad (4)$$

ここに

$$u_0 = U_0/h, \quad w_0 = W_0/h, \quad q = Pa/Eh$$

2.3 座屈に伴うエネルギー変化

歪エネルギーの変化 u_0, v_0 および w_0 の変位を生じている状態から座屈によつてさらに u, v および w の変位を生じたとする。座屈直前の伸び、剪断および曲げ歪エネルギーをそれぞれ U_{0e}, U_{0s}, U_{0b} であらわすと、これらは (1) で u, v, w の代りに u_0, v_0, w_0 とおきさらに (4) を入れてつぎのようになる。

$$U_{0e} = \frac{Ehab}{2(1-\nu^2)} \frac{h^2}{a^2} \iint \left[\frac{a^2}{h^2} \left(\frac{1-\nu^2}{2} q \right)^2 + (1-\nu^2) w_0^2 \right] \left(1 - \frac{h}{a} w_0 \right) d\xi d\varphi$$

$$U_{0s} = 0$$

$$U_{0b} = \frac{Ehab}{24(1-\nu^2)} \frac{h^2}{a^2} \iint \left[\frac{a^2 h^2}{b^4} w_{0\xi\xi}^2 + \frac{h^2}{a^2} w_0^2 + 2\nu \frac{h^2}{b^2} w_{0\xi\xi} w_0 \right] \left(1 - \frac{h}{a} w_0 \right) d\xi d\varphi$$

つぎに座屈変位を生じたあとの歪エネルギー U_e, U_s および U_b は (1) において u, v, w の代りにそれぞれ u_0+u, v_0+v, w_0+w とおいて得られる。従つて座屈による歪エネルギーの変化 $\Delta U_e, \Delta U_s, \Delta U_b$ 等は U_e, U_s, U_b と U_{0e}, U_{0s}, U_{0b} の差を求め、座屈変位の 3 次以上の項と 1 次および 2 次の項については高次の微小量を省略してつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \Delta U_e = & \frac{Ehab}{2(1-\nu^2)} \frac{h^2}{a^2} \iint d\xi d\varphi \\ & \left\{ \left[-(1-\nu^2) \frac{a^2}{bh} q u_\xi - 2(1-\nu^2) \left(\nu \frac{a}{h} \frac{q}{2} + w_0 \right) (v_\varphi - w) - (1-\nu^2) \frac{a^2}{b^2} q w_{0\xi} w_\xi \right] \right. \\ & + \left[\frac{a^2}{b^2} u_\xi^2 + 2\nu \frac{a}{b} u_\xi (v_\varphi - w) + (v_\varphi - w)^2 \right] \\ & + \left[-(1-\nu^2) \frac{a^2}{b^2} \frac{q}{2} w_\xi^2 - (1-\nu^2) \left(\frac{\nu}{2} q + \frac{h}{a} w_0 \right) (v + w_\varphi)^2 + 2 \frac{ah}{b^2} w_{0\xi} \left\{ \frac{a}{b} u_\xi w_\xi + \nu w_\xi (v_\varphi - w) \right\} \right] \\ & + \frac{h}{a} w \left[(1-\nu^2) \frac{a^2}{bh} q u_\xi + 2(1-\nu^2) \left(\nu \frac{a}{h} \frac{q}{2} + w_0 \right) (v_\varphi - w) \right] \\ & \left. - \frac{h}{a} w_0 \left[\frac{a^2}{b^2} u_\xi^2 + 2\nu \frac{a}{b} u_\xi (v_\varphi - w) + (v_\varphi - w)^2 \right] + \frac{a^2 h^2}{b^4} w_{0\xi}^2 w_\xi^2 \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

$$\Delta U_s = \frac{Ehab}{4(1+\nu)} \frac{h^2}{a^2} \iint \left[\left(\frac{a}{b} v_\xi + u_\varphi \right)^2 - \frac{h}{a} w_0 \left(\frac{a}{b} v_\xi + u_\varphi \right)^2 \right] d\xi d\varphi \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Delta U_b = & \frac{Ehab}{24(1-\nu^2)} \frac{h^2}{a^2} \iint d\xi d\varphi \\ & \left\{ \left[\frac{a^2 h^2}{b^4} w_{\xi\xi}^2 + \frac{h^2}{a^2} (w_{\varphi\varphi} + w)^2 + 2\nu \frac{h^2}{b^2} w_{\xi\xi} (w_{\varphi\varphi} + w) + 2(1-\nu) \frac{h^2}{b^2} \left(w_{\xi\varphi} + \frac{v_\xi}{2} - \frac{b}{2a} u_\varphi \right)^2 \right] \right. \\ & \left. + \left[2 \frac{a^2 h^2}{b^4} w_{0\xi\xi} w_{\xi\xi} + 2 \frac{h^2}{a^2} w_0 (w_{\varphi\varphi} + w) + 2\nu \frac{h^2}{b^2} \{ w_{0\xi\xi} (w_{\varphi\varphi} + w) + w_0 w_{\xi\xi} \} \right] \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

外圧によってなされる仕事

半径の変化による仕事 変位 U, V, W を生じているとき任意の位置における半径の短縮量 ΔR は変位の 2 次の項まで考えてつぎのようになる⁶⁾。

$$\Delta R = W - U W_x - \frac{1}{a} V W_\varphi - \frac{1}{2a} V^2$$

したがつて座屈直前 (U_0, V_0, W_0) の半径 R_0 は

$$R_0 = a \left(1 - \frac{h}{a} w_0 + \frac{h^2}{ab} u_0 w_{0\xi} + \frac{h^2}{a^2} v_0 w_{0\varphi} + \frac{h^2}{2a^2} v_0^2 \right)$$

座屈後 (U_0+U , V_0+V , W_0+W) の半径 R は

$$R=a\left\{1-\frac{h}{a}(w_0+w)+\frac{h^2}{ab}(u_0+u)(w_{0\xi}+w_\xi)+\frac{h^2}{a^2}(v_0+v)(w_{0\varphi}+w_\varphi)+\frac{h^2}{2a^2}(v_0+v)^2\right\}$$

外圧によつてなされる仕事は体積変化に外圧を乗じて得られるから、半径の変化による仕事 ΔW_1 は $\Delta W_1 > 0$ となるように符号をえらんで

$$\Delta W_1 = \frac{P}{2} \iint (R_0+R)(R_0-R) d\xi d\varphi$$

R_0 , R を代入し, $v_0=w_{0\varphi}=0$ に注意して整理すると

$$\begin{aligned} \Delta W_1 = Ehabq \frac{h^2}{a^2} \iint \frac{a}{h} \left\{ w - \frac{1}{2} \frac{h}{a} w^2 - \frac{h}{b} uw_\xi - \frac{h}{a} (vw_\varphi + \frac{v^2}{2}) \right. \\ \left. - \frac{h}{b} (u_0 w_\xi + w_{0\xi} u) - \frac{h}{a} w_0 w \right\} d\xi d\varphi \end{aligned} \quad (8)$$

端部の移動による仕事 端部が移動するとき掃過する体積は近似的に底円の半径, R_0 頂円の半径, R 高さ $U_{x=b/2}$ の円錐台の体積に等しいと考えることができる。従つて端部の移動によつてなされる仕事 ΔW_2 は

$$\Delta W_2 = -\frac{P}{6} \int_0^{2\pi} [(R^2+RR_0+R_0^2)U]_{x=\frac{b}{2}} d\varphi$$

ここで $U_{x=0}=0$ であることを考慮し

$$[(R^2+RR_0+R_0^2)U]_{x=\frac{b}{2}} = [(R^2+RR_0+R_0^2)U]_{x=0}^{\chi=\frac{b}{2}} = \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{\partial}{\partial \chi} \{(R^2+RR_0+R_0^2)U\} d\chi$$

が成立つように座屈変位をえらぶことにすると

$$\Delta W_2 = -\frac{P}{6} \iint \frac{\partial}{\partial \chi} \{(R^2+RR_0+R_0^2)U\} d\chi d\varphi$$

R_0 , R を代入し, 座屈変位の3次以上の項および高次の微小項を省略して

$$\Delta W_2 = -\frac{1}{2} Ehabq \frac{h^2}{a^2} \iint \left\{ \frac{a^2}{bh} u_\xi - 2 \frac{a}{b} (w_{0\xi} u + w_0 u_\xi) - \frac{a}{b} (u_\xi w + u w_\xi) \right\} d\xi d\varphi \quad (9)$$

したがつて外圧のなす仕事 $\Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2$ は

$$\begin{aligned} \Delta W = Ehabq \frac{h^2}{a^2} \iint \left[\frac{a}{h} w - \frac{1}{2} \frac{a^2}{bh} u_\xi + \frac{a}{b} (w_0 u_\xi - u_0 w_\xi) - w_0 w \right. \\ \left. - \frac{1}{2} w^2 - v w_\varphi - \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} \frac{a}{b} (u_\xi w - u w_\xi) \right] d\xi d\varphi \end{aligned}$$

座屈変位の1次の項のうち第3項, 第4項は, 第1項, 第2項にくらべて無視できるから

$$\Delta W = Ehabq \frac{h^2}{a^2} \iint \left[\frac{a}{h} w - \frac{1}{2} \frac{a^2}{bh} u_\xi - \frac{1}{2} w^2 - v w_\varphi - \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} \frac{a}{b} (u_\xi w - u w_\xi) \right] d\xi d\varphi \quad (10)$$

全エネルギーの変化 座屈を生ずるとき肋骨は変形しないと仮定すると, 肋骨の弾性エネルギーには変化がないから座屈による全エネルギーの変化 ΔU_T は

$$\Delta U_T = \Delta U_e + \Delta U_s + \Delta U_b - \Delta W$$

となる。座屈直前の円筒は外圧 P で平衡を保っているから ΔU_T の座屈変位 u , v , w およびその微分係数の1次の項の和は零でなければならない。そして2次の項の和が座屈に伴うエネルギー変化をあらわしている。

ΔU_T の1次の項は (5), (6), (7) および (10) から

$$\begin{aligned} Ehab \frac{h^2}{a^2} \iint \left[-\frac{1}{2} \frac{a^2}{bh} q u_\xi - \left(\frac{\nu}{2} \frac{a}{h} q + w_0 \right) (v_\varphi - w) - \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} q w_{0\xi} w_\xi \right. \\ \left. + \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{a^2 h^2}{b^4} w_{0\xi\xi} w_{\xi\xi\xi} + \frac{h^2}{a^2} w_0 (w_{\varphi\varphi} - w) + 2\nu \frac{h^2}{b^2} \{ w_{0\xi\xi} (w_{\varphi\varphi} + w) + w_0 w_{\xi\xi} \} \right] \right. \\ \left. + q \left(\frac{1}{2} \frac{a^2}{bh} u_\xi - \frac{a}{h} w \right) \right] d\xi d\varphi = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

ΔU_T の2次の項から

$$\Delta U_T = Ehab \frac{h^2}{a^2} \iint d\xi d\varphi$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[\frac{1}{2(1-\nu^2)} \left\{ \frac{a^2}{b^2} u_{\xi}^2 + 2\nu \frac{a}{b} u_{\xi} (v_{\varphi} - w) + (v_{\varphi} - w)^2 \right\} \right. \right. \\
& \quad + \frac{1}{24(1-\nu^2)} \left\{ \frac{a^2 h^2}{b^4} w_{\xi\xi}^2 + \frac{h^2}{a^2} (w_{\varphi\varphi} + w)^2 + 2\nu \frac{h^2}{b^2} w_{\xi\xi} (w_{\varphi\varphi} + w) \right. \\
& \quad \left. \left. + 2(1-\nu) \frac{h^2}{b^2} \left(w_{\xi\varphi} + \frac{v_{\xi}}{2} - \frac{b}{2a} u_{\varphi} \right)^2 \right\} + \frac{1}{4(1+\nu)} \left\{ u_{\varphi}^2 + 2 \frac{a}{b} u_{\varphi} v_{\xi} + \frac{a^2}{b^2} v_{\xi}^2 \right\} \right] \\
& \quad + q \left[\frac{1}{2} w^2 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{b^2} w_{\xi}^2 + v w_{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{a}{b} u w_{\xi} + \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{2} + \frac{h}{a} \frac{w_0}{q} \right) (v + w_{\varphi})^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{1-\nu^2} \frac{ah}{b^2} \frac{w_0}{q} \left\{ \frac{a}{b} u_{\xi} w_{\xi} + \nu w_{\xi} (v_{\varphi} - w) \right\} + \left(\frac{\nu}{2} + \frac{h}{a} \frac{w_0}{q} \right) (v_{\varphi} - w) w \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2(1-\nu^2)} \frac{h}{a} \frac{w_0}{q} \left\{ \frac{a^2}{b^2} u_{\xi}^2 + 2\nu \frac{a}{b} u_{\xi} (v_{\varphi} - w) + (v_{\varphi} - w)^2 \right\} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4(1+\nu)} \frac{h}{a} \frac{w_0}{q} \left(\frac{a}{b} v_{\xi} + u_{\varphi} \right)^2 + q^2 \left[\frac{1}{2(1-\nu^2)} \frac{a^2 h^2}{b^4} \frac{w_0^2}{q^2} w_{\xi}^2 \right] \right\} \quad (12)
\end{aligned}$$

2.4 座 屈 圧 力

座屈直前の変形 座屈直前の変形 w_0 は (11) を満足しなければならない。 w_0 は軸対称であるから

$$\int_0^{2\pi} w_0 w_{\varphi\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} w_{0\xi\xi} w_{\varphi\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} w_0 v_{\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} v_{\varphi} d\varphi = 0$$

座屈変形 w は座標の原点を第 1 図のようにとつてゐるから

$$[w_{\xi}]_{\xi=0} = [w_{\xi\xi}]_{\xi=0} = 0$$

また w はつぎの境界条件を満足するように仮定することにする。

$$[w]_{\xi=\frac{1}{2}} = \int_0^{2\pi} [w_{\xi}]_{\xi=\frac{1}{2}} d\varphi = 0$$

これらの条件と部分積分を使つて (11) を変形すると、 ξ についての微分を肩符 ' であらわして

$$\begin{aligned}
& \iint \left[\frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{a^2 h^2}{b^4} w_0'''' + \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} q w_0'' + w_0 - \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) \frac{a}{h} q \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{h^2}{a^2} w_0 + \frac{2\nu}{6(1-\nu^2)} \frac{h^2}{b^2} w_0'' \right] w d\xi d\varphi = 0
\end{aligned}$$

任意の w に対してこの式が成立しなければならない。また第 5 項、第 6 項は他の項にくらべて省略できる。これらのことから

$$w_0'''' + 2\alpha_0^2 q w_0'' + \beta_0^4 w_0 - \gamma_0^2 q = 0 \quad (13)$$

ここに

$$\alpha_0^2 = 3(1-\nu^2) \frac{b^2}{h^2}, \quad \beta_0^2 = 2\sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{b^2}{ah}, \quad \gamma_0^2 = 12 \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) (1-\nu^2) \frac{b^4}{a^2 h^2} \frac{a}{h}$$

座屈直前の変形 w_0 は (13) を満足しなければならない。

(13) の解は原点に関して対称であることを考えてつぎのようにあらわすことができる。

$$\frac{w_0}{q} = A_0 \sinh \kappa_2 \xi \sin \kappa_1 \xi + D_0 \cosh \kappa_2 \xi \cos \kappa_1 \xi + k_0 \quad (14)$$

$$\kappa_1^2 = \frac{1}{2} (\beta_0^2 + \alpha_0^2 q), \quad \kappa_2^2 = \frac{1}{2} (\beta_0^2 - \alpha_0^2 q)$$

A_0, D_0 は境界条件により決まる常数

両端支持の場合の座屈前変形 両端支持のときの境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \xi = 1/2, \quad w_0'' = 0 \\ w_0 = \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) \frac{a}{h} \vartheta_1 q + \frac{\vartheta_2}{\beta_0^4} w_0'''' \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ϑ_1, ϑ_2 は肋骨の形状と寸法によつて決まる係数で、 ϑ_1 の項は肋骨に直接加わる外圧を、 ϑ_2 の項は胴板から肋骨に伝えられる剪断力をあらわしている。

この場合の A_0, D_0, k_0 は

$$A_0 = - \frac{(1-\vartheta_1)(\alpha_0^2 q C c + 2\kappa_1 \kappa_2 S s)}{2\kappa_1 \kappa_2 (S^2 s^2 + C^2 c^2) + \vartheta_2 (\kappa_1 C S + \kappa_2 s c)} \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) \frac{a}{h}$$

$$D_0 = -\frac{(1-\vartheta_1)(2\kappa_1\kappa_2Cc - \alpha_0^2 qSs)}{2\kappa_1\kappa_2(S^2s^2 + C^2c^2) + \vartheta_2(\kappa_1CS + \kappa_2sc)} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \frac{a}{h}$$

$$k_0 = \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \frac{a}{h}$$

ただし

$$C = \cosh \frac{\kappa_2}{2}, \quad S = \sinh \frac{\kappa_2}{2}, \quad s = \sin \frac{\kappa_1}{2}, \quad c = \cos \frac{\kappa_1}{2}$$

両端固定の場合の座屈前変形 両端固定の境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \xi = 1/2, \quad w_0' &= 0 \\ w_0 &= \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \frac{a}{h} \vartheta_1 q + \frac{\vartheta_2}{\beta_0^4} w''' \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

この場合の A_0 , D_0 , k_0 は

$$A_0 = -\frac{(1-\vartheta_1)(\kappa_1Cs - \kappa_2Sc)}{\kappa_1CS + \kappa_2sc + 2\vartheta_2 \frac{\kappa_1\kappa_2}{\beta_0^2} (C^2s^2 + S^2c^2)} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \frac{a}{h}$$

$$D_0 = -\frac{(1-\vartheta_1)(\kappa_2Cs + \kappa_1Sc)}{\kappa_1CS + \kappa_2sc + 2\vartheta_2 \frac{\kappa_1\kappa_2}{\beta_0^2} (C^2s^2 + S^2c^2)} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \frac{a}{h}$$

$$k_0 = \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \frac{a}{h}$$

座 屈 変 形

座屈変位 U , V , W による軸方向の平均応力 σ_x は変位の2次以上の項を省略して

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ U_x + \frac{\nu}{a} (V_\varphi - W) \right\}$$

座屈の前後で外圧は一定であるから軸方向の平均応力は変化しないと考えてよく, $\sigma_x = 0$ となる。

$$\therefore U = -\frac{\nu}{a} \int_0^x (V_\varphi - W) d\chi$$

あるいは

$$u = -\nu \frac{b}{a} \int_0^\xi (v_\varphi - w) d\xi \quad (17)$$

(17) を考慮して無次元化した軸方向, 周方向および垂直方向の変位をつぎのように仮定する。

$$u = \bar{U}R(\xi) \sin n\varphi, \quad v = \bar{V}Q(\xi) \cos n\varphi, \quad w = \bar{W}Q(\xi) \sin n\varphi \quad (18)$$

ここに $Q(\xi)$: 軸方向座屈波形で ξ の偶関数

$$R(\xi) = \int Q d\xi$$

座 屈 圧 力

(18) を (12) へ入れ φ についての積分を行ない

$$\frac{\partial}{\partial \bar{U}} (\Delta U_T) = \frac{\partial}{\partial \bar{V}} (\Delta U_T) = \frac{\partial}{\partial \bar{W}} (\Delta U_T) = 0$$

の条件から座屈圧力を求めるつぎの式が得られる。

$$\begin{vmatrix} f_{11} + g_{11}q + h_{11}q^2 & f_{12} + g_{12}q & f_{13} + g_{13}q \\ f_{12} + g_{12}q & f_{22} + g_{22}q & f_{23} + g_{23}q \\ f_{13} + g_{13}q & f_{23} + g_{23}q & f_{33} + g_{33}q \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

ここに

$$f_{11} = 2 \int \left[\frac{1}{2(1-\nu^2)} Q^2 + \frac{1}{24(1-\nu^2)} \left\{ \frac{a^2 h^2}{b^4} Q_{;\xi\xi}^2 + (n^2 - 1)^2 \frac{h^2}{a^2} Q^2 \right. \right. \\ \left. \left. - 2\nu(n^2 - 1) \frac{h^2}{b^2} Q Q_{;\xi\xi} + 2(1-\nu^2)n^2 \frac{h^2}{b^2} Q_{;\xi}^2 \right\} \right] d\xi$$

$$f_{12} = 2 \int \left[\frac{n}{2(1-\nu^2)} Q^2 + \frac{1-\nu}{24(1-\nu^2)} n \frac{h^2}{b^2} Q_{;\xi}^2 \right] d\xi$$

$$\begin{aligned}
f_{13} &= -2 \int \frac{a}{b} \left[\frac{\nu}{2(1-\nu^2)} R_{\xi} Q + \frac{1-\nu}{24(1-\nu^2)} n^2 \frac{h^2}{a^2} R Q_{\xi} \right] d\xi \\
f_{22} &= 2 \int \left[\frac{n^2}{2(1-\nu^2)} Q^2 + \frac{1}{4(1+\nu)} \frac{a^2}{b^2} Q_{\xi}^2 \right] d\xi \\
f_{23} &= 2 \int n \frac{a}{b} \left[-\frac{\nu}{2(1-\nu^2)} R_{\xi} Q + \frac{1}{4(1+\nu)} R Q_{\xi} \right] d\xi \\
f_{33} &= 2 \int \left[\frac{1}{2(1-\nu^2)} \frac{a^2}{b^2} R_{\xi}^2 + \frac{n^2}{4(1+\nu)} R^2 \right] d\xi \\
g_{11} &= -2 \int \left[\left\{ -\frac{1}{2} + \left(1 + \frac{n^2}{2} \right) \left(\frac{\nu}{2} + \frac{h}{a} \frac{w_0}{q} \right) + \frac{1}{2(1-\nu^2)} \frac{h}{a} \frac{w_0}{q} \right\} Q^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \frac{a^2}{b^2} Q_{\xi}^2 + \frac{2\nu}{2(1-\nu^2)} \frac{ah}{b^2} \frac{w_{0\xi}}{q} Q Q_{\xi} \right] d\xi \\
g_{12} &= -2 \int n \left[\left\{ \left(\frac{\nu}{2} + \frac{h}{a} \frac{w_0}{q} \right) + \frac{1}{2(1-\nu^2)} \frac{h}{a} \frac{w_0}{q} - \frac{1}{2} \right\} Q^2 + \frac{\nu}{2(1-\nu^2)} \frac{ah}{b^2} \frac{w_{0\xi}}{q} Q Q_{\xi} \right] d\xi \\
g_{13} &= 2 \int \frac{a}{b} \left[\frac{1}{4} R Q_{\xi} + \frac{1}{2(1-\nu^2)} \frac{ah}{b^2} \frac{w_{0\xi}}{q} R_{\xi} Q_{\xi} + \frac{\nu}{2(1-\nu^2)} \frac{h}{a} \frac{w_0}{q} R_{\xi} Q \right] d\xi \\
g_{22} &= -2 \int \left[\left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{2} + \frac{h}{a} \frac{w_0}{q} \right) + \frac{n^2}{2(1-\nu^2)} \frac{h}{a} \frac{w_0}{q} \right\} Q^2 + \frac{1}{4(1+\nu)} \frac{ah}{b^2} \frac{w_0}{q} Q_{\xi}^2 \right] d\xi \\
g_{23} &= -2 \int n \frac{h}{b} \frac{w_0}{q} \left[-\frac{\nu}{2(1-\nu^2)} R_{\xi} Q + \frac{1}{4(1+\nu)} R Q_{\xi} \right] d\xi \\
g_{33} &= -2 \int \frac{h}{a} \frac{w_0}{q} \left[\frac{1}{2(1-\nu^2)} \frac{a^2}{b^2} R_{\xi}^2 + \frac{n^2}{4(1+\nu)} R^2 \right] d\xi \\
h_{11} &= 2 \int \frac{1}{2(1-\nu^2)} \frac{a^2 h^2}{b^4} \left(\frac{w_{0\xi}}{q} \right)^2 Q_{\xi}^2 d\xi
\end{aligned}$$

ξ についての積分は $0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$ について行なう。

(14) から $w_0/q, w_{0\xi}/q$ を求め、さらに軸方向座屈波形 Q を適当に仮定して f, g および h を数値積分によつて計算し、(19) に入れて q を求めることができる。胴板付フランジを有する肋骨の場合を除いて一般に肋骨に直接加わる外圧の影響は小さいのでこの影響を無視し得るから座屈前変形の境界条件式 (15), (16) の ϑ_1 を零とおくことができる。また ϑ_2 は近似的に $\vartheta_2 \doteq 2 \times (\text{胴板断面積} / \text{肋骨断面積})$ であるから ϑ_2 が零および無限大はそれぞれ肋骨断面積が無限大および零の場合に相当する。

座屈前の変形 w_0 の境界条件が固定のとき肋骨寸法 $\vartheta_1=0, \vartheta_2=\infty, 6, 0$ について、また w_0 が支持のときは $\vartheta_1=0, \vartheta_2=6$ について何れも $Q = \cos \pi \xi$ として計算し、 $\vartheta_2=\infty$ の場合を 1 とし第 2 図～第 3 図に示した。

なお $\vartheta_2=\infty$ として得られた座屈圧力を Mises の式から求めた値と比較するとその差は 1% 以下であつた。

座屈前変形 w_0 の境界条件、肋骨の寸法等により差はあるが長い円筒では何れも座屈圧力が低くなつてゐる。

第 2 図 座屈圧力に対する肋骨の影響

第3図 座屈圧力に対する肋骨の影響

これは円筒が長い場合にはスパン中央部附近の周方向平均応力の減少はほとんどなく、これによる座屈圧力の上昇より軸方向に生じた曲げによる低下の方が大きいであろう。同筒が短くなるにつれて座屈圧力は高くなつており、特に肋骨断面積が無限大で w_0 の境界条件が固定の場合は第2図のように上昇の割合が大きい。しかし $\vartheta_2=6$ (肋骨断面積が胴板断面積の約 $1/3$)、 $a/b \leq 4$ のときは肋骨を考慮しない場合の圧力との差は±5%以内である。これは $\vartheta_2=6$ 程度の肋骨

骨を有する円筒では肋骨の撓みがスパン中央の撓みの70~80%になり w_0 を一様と仮定してもあまり差がないためであろう。そして肋骨の寸法は全体的圧壊強度が胴板圧壊強度より低くならぬように決定されるが $\vartheta_2 < 6$ となることはないであろう。

圧壊時の周方向平均応力が降伏点より相当低い場合でも初期撓みその他の影響で円筒は塑性変形をしていると考えられる。そのため円筒は弾性変形をすると言う仮定の下に得られたこの結論をそのまま認めるわけにはいかないが、大きな肋骨は圧壊圧力に影響を与えるものと思われ、ことに設計の対象となるような寸法の円筒では圧壊圧力が高くなる。従つて圧壊実験模型の肋骨を必要以上に大きくすることは避けるべきであろう。

3 座屈波形の影響

軸方向座屈波形 $Q(\xi)$ を両端支持の円筒が外圧を受けたとき生ずる撓み形と相似な形に仮定したとき、すなわち

$$Q(\xi) = A \sin h\kappa_2 \xi \sin \kappa_1 \xi + D \cos h\kappa_2 \xi \cos \kappa_1 \xi + k \quad (20)$$

ここに

$$A = -\frac{1}{\Delta} (\alpha_0^2 q C c + 2\kappa_1 \kappa_2 S_s), \quad D = \frac{1}{\Delta} (\alpha_0^2 q S_s - 2\kappa_1 \kappa_2 C c)$$

$$k = \frac{1}{\Delta} \times 2\kappa_1 \kappa_2 (C^2 c^2 + S^2 s^2)$$

$$\Delta = 2\kappa_1 \kappa_2 (C^2 c^2 + S^2 s^2) + \alpha_0^2 q S s - 2\kappa_1 \kappa_2 C c$$

$$Q\left(\pm \frac{1}{2}\right) = Q_{\xi\xi}\left(\pm \frac{1}{2}\right) = 0, \quad Q(0) = 1$$

このときの座屈圧力を計算し、 $Q = \cos \pi \xi$ とした場合の座屈圧力に対する比を第1表に示してある。

予想とは異なり、 $Q = \cos \pi \xi$ とおいた方が低い座屈圧力を与える。これは全体座屈では周方向の剛性が軸方向のそれにくらべて大きいので座屈波形は flat になるが胴板座屈の場合にはこのような剛性の違いがなく座屈波形はむしろ余弦曲線に近くなるからであろう。

第1表 座屈波形と座屈圧力の関係 ($\vartheta_2 = \infty$)

a/h	80	100	120	140	160
a/b					
2	1.178	1.277	1.361	1.444	1.501
3	1.001	1.024	1.051	1.095	1.133
4	0.9833	0.9911	0.9991	1.007	1.024

4 座屈圧力の近似式の検討

座屈前の変形に対する肋骨の影響を無視して $\vartheta_2 = \infty$ とし、さらに座屈変形を $Q = \cos \pi \xi$ とおいた場合座屈圧力は Miseses, あるいは徳川により $n^2 \gg 1$ として次式ようになる。

$$P_\infty = \frac{E \frac{h}{a}}{n^2 + \frac{1}{2} \frac{\pi^2 a^2}{b^2}} \left[\frac{\left(\frac{\pi^2 a^2}{b^2} \right)^2}{\left(n^2 + \frac{\pi^2 a^2}{b^2} \right)^2} + \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(n^2 + \frac{\pi^2 a^2}{b^2} \right)^2 \frac{h^2}{a^2} \right] \quad (21)$$

徳川, 鬼頭²⁾は $(\pi a/b)^2$ は n^2 にくらべて無視し得ると仮定し, $\partial P/\partial n=0$ の条件を使つて n を消去し

$$P_T = 2.42 E \left(\frac{2a}{b} \right) \left(\frac{h}{2a} \right)^{2.5} \quad (22)$$

ただし
を得ている。

また Windenburg および Trilling³⁾ は (21) と $\partial P/\partial n=0$ を組み合わせて得られた式に含まれているパラメター

$$\theta = 3 + 2(\pi a/nb)^2$$

は多くの場合 $1/3 < \pi a/nb < 2/3$ であるから $\pi a/nb$ の平均値として $1/2$ をとり, $\theta = 3.5$ としてつぎの近似式を得ている。

$$P_W = \frac{2.60 E \left(\frac{h}{2a} \right)^{2.5}}{\frac{b}{2a} - 0.45 \left(\frac{h}{2a} \right)^{0.5}} \quad (23)$$

ただし $\nu = 0.3$

さらに分母の第2項を無視して変形し

$$\varphi = \frac{P_W a}{Y h} = \frac{1.30}{\lambda^2} \quad (24)$$

ここに

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{(b/2a)^2}{(h/2a)^3}} \sqrt{\frac{Y}{E}}, \quad Y: \text{胴板の降伏点}$$

これらの近似式 (22), (24) を (21) と比較するわけであるが (22) と (24) は係数が異なるだけで本質的には同じであるから (22) についてだけ検討してみる。計算結果を第4図に示す。横軸に円筒の半径と長さの比 a/b を縦軸に (21) の正確な値と, (22) から得られる近似値の比 P_∞/P_T をとつている。 a/b が大きくなるにつれて誤差が増加している。

5 実験結果の整理方法

肋骨の影響を無視した場合外圧を受ける円筒の弾性座屈圧力の理論値は (21) で与えられる。座屈時の応力がごく低いときは実験値と理論値の差はあまりないようであるが

座屈応力が高くなると実際に製作される円筒は初期撓み, その他の欠陥を持つているため周方向平均応力が降伏点以下であつても理論値より相当低い圧力で破壊する。初期撓みとこれに伴う塑性変形を考えた論文も幾つか発表されているが, 現在のところこれらの理論を直接設計に結びつけるまでには到つてないようである。そのため実験結果の整理には座屈圧力を簡単な形で表現している近似式 (22) あるいは (24) が使われているようである。すなわち横軸に $(2a/b)(h/2a)^{1.5}$ あるいは λ を, 縦軸には周方向応力または pressure factor φ の実験値をプロットしている。そして横軸のパラメーターを変化させるため a/h を一定とし, a/b を変えた実験を行なつている。このように a/b を変えることは第4図から分るように近似式の誤差を変化させることになる。実際の座屈圧力は円筒の持つている欠陥, 塑性変形等の影響を受けるわけであり, この程度のことは問題にならないとは思われるが参考文献 3) および 4) の実験のうち胴板座屈したものについてつぎのような整理方法を試みてみた。すなわちこれらの実験模型の形状は大部分が $a/h \geq 120$, $a/b \leq 4$, および $\varphi_2 < 6$ の範囲にある。すでにのべたようにこのような形状の円筒では肋骨が弾性座屈圧力に与える影響は $\pm 5\%$ 以下であるから肋骨の影響を無視すると座屈圧力の理論値は (21) で代表することができる。そこでこの値を横軸に, 実験値を縦軸に何れも pressure factor の形にしてプロットしてみた。結果は第5図のようになる。

第4図 近似式の精度

こをの計算行なうにあたってたびたびご助言を頂いた東京大学の山本教授、実験データの引用をお許し下さった防衛庁技研の杉村船体構造研究室長に厚くお礼申し上げます。

参考文献

- 1) 山本：補強円筒殻の外圧による全体的圧壊の研究，造船協会論文集，Vol.113（昭和38年6月）p.95
- 2) 徳川，鬼頭：弾性的安定原論，海軍技術研究所（昭和15年）p.217
- 3) Trilling & Windenburg：Collapse by Instability of Thin Cylindrical Shells, Under External Pressure. Applied Mechanics A. S. M. E. Vol. 53 (1931) p. A-207
- 4) 杉村外：耐圧船体構造の研究，防衛庁技術研究所報告（昭和35年9月）
- 5) 寺田外：補強材を有する薄肉円筒殻の圧潰に関する研究，造船協会論文集，Vol.108（昭和35年12月）p.199
- 6) W. A. Nash：Buckling of Multiple-Bay Ring-Reinforced Cylindrical Shells Subjected to Hydrostatic Pressure, Applied Mechanics Vol.20 (1953) p.469