開口を持つ I 型桁の塑性モーメント に及ぼす剪断の影響

正員 西 牧 興* 正員 原 洋 一*
正員 小 笠 原 洋 一*

The Effect of Shear on the Plastic Moment of I-section Beams with Cutouts

By Ko Nishimaki, *Member*

Yoichi Hara, *Member*

and Yoichi Ogasahara, *Member*

Summary

In a cross section of a beam where no shear force exists the normal stress distribution is rectangular at the fully plastic state under the assumption of perfect plasticity of material. Under the existence of shear force the normal and stress distributions are somewhat complicated which must satisfy conditions of equilibrium, yielding and compatibility. By approximating these distributions of normal and shear stress by rectangular ones which satisfy yield condition, rational results are obtainable.

In this paper the interaction between the plastic moment and shear in I-section beams with cutouts is treated under the assumption of rectangular distributions of normal and shear stress and the interaction curves between the shearing-bending ratio $r = \frac{S}{S_0} \frac{M}{M_0}$ and the plastic moment coefficient $m = M/M_0$, at several opening ratios of cutouts, are obtained concerning three types of I-section. And using these interaction curves, the equestrength opening ratio κ , within the bounds of which the cutout does not at all weak down the collapsing strength of the beam, is obtained as the function of longitudinal position on a few beams with typical end condition and load condition.

1 緒 言

船体構造に用いられる桁には桁の高さに比べてスパンが比較的短かいものも多く、従つて塑性崩壊強度を考える際に剪断の影響を無視することができない場合が多い。剪断力の存在は全塑性状態における断面内の曲げ応力を低下させ、従つて断面の塑性モーメントを一般に低下させる。その曲げ応力および剪断応力の分布は降伏条件、平衡条件および変形適合条件を満足しなければならず、一般に正解を求めることは困難である。従つて一般の解析においては上限定理または下限定理によつて曲げおよび剪断応力分布の近似解を求め、これによつて剪断力と塑性モーメントの相関関係を調べることが行われている^{1)~4)}。このうち下限定理による方法をさらに簡易化して矩形分布の曲げおよび剪断応力を仮定して相関曲線を求める場合も多く、この方法でかなりよい近似が得られることがわかっている^{5)~7)}。厳密に云うと相関々係は一断面内での応力分布という局所的な議論から求められるものでなく、桁全体の形状および負荷状態によつて定まるものであることが指摘されているが⁸⁾、実用的にはこのような近似的解法で十分であるし、この近似計算から桁の設計に関する一般的な原則を掴むことは重要であると思われる。

この研究は I 型断面を有する桁に関して矩形応力分布を仮定して計算を行ない、開口を持つ場合の崩壊強度について一般的な考察を行なつたもので、なお理論の正当性を検討するため計算結果の一部について実験を行なつ

原稿受付 昭和 39 年 12 月 18 日

* 日立造船(株)技術研究所

たものである。すなわち、まず塑性モーメントにおよぼす剪断の影響の表示法および全塑性状態における断面内の応力分布など理論の基本的仮定についての考察を行ない、それに基づいて、開口を持つ場合についての考察および数値計算を実施し、最後に、各種の荷重条件および支持条件の梁について梁としての崩壊強度を低下させずにあけ得る最大の開口量についての考察を行なった。

2 基礎的考察

2.1 相関関係の表示法

断面の塑性モーメントを M 、剪断力を S とすると、その相関関係は S - M 平面における曲線 $M=f(S)$ で表わされるか、あるいは $S=0$ における M の値 M_0 および $M=0$ における S の値 S_0 で無次元化して点 $(1, 0)$ および $(0, 1)$ を通る曲線 $M/M_0=f(S/S_0)$ で表わされるのが普通である。しかし一般の強度計算や設計の問題においては塑性モーメントを考える場合に影響因子を剪断力そのもので考えるよりは剪断力とモーメントの比で考える方が便利なのでここでは

$$r = \frac{S}{S_0} / \frac{M}{M_0}$$

なる値を定義し、これに対する

$$m = M/M_0$$

の変化を調べることにする。

2.2 全塑性状態における応力分布

全塑性状態における断面内の応力分布を規定する条件のうち降伏条件は次の形で与えられる。

$$\sigma^2 + \alpha^2 \tau^2 = \sigma_0^2 \quad (1)$$

ここで α は最大剪断応力説によれば 2、八面体剪断応力説によれば $\sqrt{3}$ であつて、この問題に関する限り両説の差は係数の相違だけで本質的な違いはないので以後は α を 2 として計算を行なうことにする。

直応力分布と剪断応力分布のうちどちらか一方を仮定すると他方は (1) 式からきめることができる。

いま、直応力分布として弾性応力の場合にならつて

$$\sigma = ay \quad (2)$$

なる直線と仮定すると、(1) および (2) 式から剪断応力として

$$\tau = \frac{\sigma_0}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{ay}{\sigma_0}\right)^2} \quad (3)$$

なるダ円状の分布が得られる (Fig. 1)。

また Fig. 2 のように、直応力を引張側で $\mu\sigma_0$ 、圧縮側で $-\mu\sigma_0$ の矩形分布とすると、剪断力も矩形分布となりその大きさは (1) 式から

$$\tau = \frac{\sigma_0}{2} \sqrt{1 - \mu^2} \quad (4)$$

である。

Fig. 1 直線-ダ円応力分布

Fig. 2 矩形応力分布

Fig. 3 Hodge の応力分布

Hodge は (1) 式を満足する応力分布のうち与えられた剪断力に対し塑性モーメントを最大にする応力分布を求め次の式を得た²⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{\lambda y \sigma_0}{\sqrt{1 + \lambda^2 y^2}} \\ \tau &= \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 + \lambda^2 y^2}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(5) 式によつて表わされる応力分布を Fig. 3 に示した。

2.3 開口のない I 型断面における相関関係

開口のない I 型断面について, Fig. 1, Fig. 2 および Fig. 3 のそれぞれの応力分布によつて相関関係を求めてみよう。ただしここで断面の各寸法は Fig. 4 のように表わすものとし, さらに

$$\begin{aligned} A/H &= \alpha \\ J/B &= \beta \end{aligned}$$

なる無次元の値を定義する。\$M_0\$ および \$S_0\$ は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= 2\sigma_0 BH^2 [\alpha(2-\alpha) + \beta(1-\alpha)^2] \\ S_0 &= 2\sigma_0 BH [\alpha(1-\beta) + \beta] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Fig. 4 I 型断面の寸法

Fig. 5 I 型断面の直線-ダ円応力分布

(A) 直線-ダ円応力分布

Fig. 5 の a, b および c の各々に対応して次の三つの場合に分かれる。

$$0 \leq \mu \leq 1 \quad (\text{Fig. 5a})$$

$$M = \frac{4}{3} \mu \sigma_0 BH^2 [1 - (1-\alpha)^3 (1-\beta)]$$

$$S = \sigma_0 BH \left[\sqrt{1-\mu^2} + \frac{\sin^{-1} \mu}{\mu} - (1-\alpha)(1-\beta) \sqrt{1-\mu^2(1-\alpha)^2} - (1-\beta) \frac{\sin^{-1} \mu(1-\alpha)}{\mu} \right]$$

ゆえに

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{2[1 - (1-\alpha)^3(1-\beta)]\mu}{3[\alpha(2-\alpha) + \beta(1-\alpha)^2]} \\ r &= \frac{\sqrt{1-\mu^2} + \frac{\sin^{-1} \mu}{\mu} - (1-\alpha)(1-\beta) \sqrt{1-\mu^2(1-\alpha)^2} - (1-\beta) \frac{\sin^{-1} \mu(1-\alpha)}{\mu}}{2[\alpha(1-\beta) + \beta] \cdot m} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$1 \geq \nu \geq (1-\alpha) \quad (\text{Fig. 5b})$$

$$M = \frac{4\sigma_0}{3\nu} BH^2 [\nu^3 - (1-\alpha)^3(1-\beta)] + 2\sigma_0 BH^2 (1-\nu^2)$$

$$S = \sigma_0 BH \left[\frac{\pi\nu}{2} - \nu(1-\beta) \sin^{-1} \frac{1-\alpha}{\nu} - (1-\alpha)(1-\beta) \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha}{\nu} \right)^2} \right]$$

ゆえに

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{3-\nu^2 - \frac{2(1-\alpha)^3(1-\beta)}{\nu}}{3[\alpha(2-\alpha) + \beta(1-\alpha)^2]} \\ r &= \frac{\frac{\pi\nu}{2} - \nu(1-\beta) \sin^{-1} \frac{1-\alpha}{\nu} - (1-\alpha)(1-\beta) \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha}{\nu} \right)^2}}{2[\alpha(1-\beta) + \beta] \cdot m} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$(1-\alpha) \geq \nu \geq 0 \quad (\text{Fig. 5c})$$

$$M = \frac{2}{3} \sigma_0 BH^2 [\beta(3-\nu^2) + 3\alpha(2-\alpha)(1-\beta)]$$

$$S = \frac{1}{2} \sigma_0 BH \pi \beta \nu$$

ゆえに

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{\beta(3-\nu^2) + 3\alpha(2-\alpha)(1-\beta)}{3[\alpha(2-\alpha) + \beta(1-\alpha)^2]} \\ r &= \frac{\pi\beta\nu}{4[\alpha(1-\beta) + \beta] \cdot m} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(B) 矩形応力分布

I 型断面に矩形応力分布を適用するときはフランジ部は剪断力を受けもたないものとして Fig. 6 のようにする。

$$M = 2\sigma_0 BH^2 [\alpha(2-\alpha)(1-\beta) + \mu\beta]$$

Fig. 6 I型断面の矩形応力分布

$$S = 2\sigma_0 JH \sqrt{1-\mu^2}$$

ゆえに

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{\alpha(2-\alpha)(1-\beta) + \mu\beta}{\alpha(2-\alpha) + \beta(1-\alpha)^2} \\ r &= \frac{\beta\sqrt{1-\mu^2}}{[\alpha(1-\beta) + \beta]m} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(C) Hodge の応力分布

(5) 式によつて表わされる応力分布についてモーメントおよび剪断力を計算すると, $\sinh^{-1} \lambda H = \omega$ として

$$M = 2\sigma_0 B H^2 [2\alpha \tanh \omega + \beta (\coth \omega - \omega \operatorname{cosech}^2 \omega)]$$

$$S = 2\sigma_0 B H [\alpha \operatorname{sech} \omega + \beta \omega \operatorname{cosech} \omega]$$

を得る。故に

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{2\alpha \tanh \omega + \beta (\coth \omega - \omega \operatorname{cosech}^2 \omega)}{\alpha(2-\alpha) + \beta(1-\alpha)^2} \\ r &= \frac{\alpha \operatorname{sech} \omega + \beta \omega \operatorname{cosech} \omega}{[\alpha(1-\beta) + \beta] \cdot m} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$\alpha=1/10$, $\beta=1/15$ の断面について (7)~(11) 式から計算した各応力分布による相関曲線を Fig. 7 に示す。

2.4 実験値

Fig. 7 の計算結果を検証するために実験を行なつた。けたの断面形状は Fig. 8 に示す通りで、市販の H 形鋼 300×300×10×15 のフランジを半幅に切り落して製作したものである。 m と r の関係を求めるためには図の如く中央集中荷重を受ける単純梁の実験で十分であつて、この崩壊荷重を $2F$ とすると m および r は次のように計算される。

Fig. 7 各応力分布による相関曲線

Fig. 8 無開口試験片

$$m = FL/M_0$$

$$r = M_0/S_0 L$$

崩壊荷重は Fig. 9 の荷重たわみ曲線から図のように弾性域の延長線と塑性域の延長線の交点として求めた。実験結果を Table. 1 および Fig. 7 の中に実験点として示した。これを見ると矩形応力分布が非常に実験値に近いことがわかる。このことから以下の開口を持つ場合の解析は矩形応力分布によつて行なうことにした。

Fig. 9 荷重, たわみ曲線 (O-グループ)

Table. 1 無開口桁実験結果
($M_0 = 22.2 \times 10^3 \text{ T} \cdot \text{mm}$, $S_0 = 97.2 \text{ T}$)

試片番号	0-0	0-1	0-2	0-3	0-4	0-5
$L(\text{mm})$	125	150	300	500	800	1,500
$F(\text{ton})$	47.5	43.5	41.0	37.5	27.0	14.5
m	0.267	0.294	0.554	0.845	0.973	0.980
r	1.830	1.525	0.763	0.458	0.286	0.153

3 開口を持つ断面の塑性モーメント

3.1 崩壊形式

ウェブに開口を持つI型断面を考える場合、開口の上下位置は崩壊荷重にほとんど影響しないということが実験的に判っていたので(3.3参照)、計算を簡単にするため Fig. 10 に示すように開口は上下対称となる位置にある場合だけについて計算を行なった。ここで桁の高さに対する開口の高さの比 K/H を κ とおき、これを開口率と呼ぶことにする。この断面に対する矩形応力分布には Fig. 10b のほかに、崩壊形式によつて Fig. 10c のごとき分布も考えられる。同じ大きさの剪断力に対して Fig. 10c の塑性モーメントの方が Fig. 10b のものより低くなることは明らかであるが、Fig. 10b は断面だけで十分崩壊するのに対して、Fig. 10c は断面だけでは崩壊せず同一開口内の二断面で Fig. 11 のごとき全塑性性状態になることが必要である。ここで ν_1 および ν_2 は mm 断面における軸力と nn 断面における軸力とが等しいということと、 mm 断面における塑性モーメントと nn 断面における塑性モーメントとの比が荷重状態から与えられたものに等しいという2つの条件からきめられる。しかし実際に数値計算を行なった結果I型断面においてこの2つの条件を満足する ν_1, ν_2 が存在することは非常に稀であることがわかった。すなわち $(\alpha, \beta) = (1/10, 2/10), (1/10, 1/15)$ および $(2/10, 1/15)$ の3種のI型断面について、開口率を0から0.75まで、 mm 断面と nn 断面のモーメントの比を0から1までの範囲で計算を行なったところ、条件を満足する ν_1, ν_2 の解は皆無であつた。そこでここではすべて Fig. 10b のごとき崩壊形式だけを考慮して解析を進めることにした。

Fig. 10 開口断面の2つの塑性状態

Fig. 11 開口部の断面崩壊状態

3.2 相関関係の計算

Fig. 10b についてモーメントおよび剪断力を計算すると、次のようになる。

$$M = 2\sigma_0 B H^2 [\alpha(2-\alpha)(1-\beta) + \mu\beta(1-\kappa^2)]$$

$$S = 2\sigma_0 J(H-K) \sqrt{1-\mu^2}$$

したがつて

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{\alpha(2-\alpha)(1-\beta) + \mu\beta(1-\kappa^2)}{\alpha(2-\alpha) + \beta(1-\alpha)^2} \\ r &= \frac{\beta(1-\kappa) \sqrt{1-\mu^2}}{[\alpha(1-\beta) + \beta] \cdot m} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Fig. 12 相関曲線 I

(12)式に従つて $(\alpha, \beta) = (1/10, 2/10), (1/10, 1/15)$ および $(2/10, 1/15)$ の3種のI型断面について開口率を変えて計算を行なった結果を Fig. 12—Fig. 14 に示す。

3.3 開口桁の崩壊実験

$(\alpha, \beta) = (1/10, 1/15)$ の断面について開口を持つ場合の崩壊実験を行なった。実験は中央集中荷重を受ける単純梁で行なった。断面寸法その他実験の要領は2.4に述べた開口のない桁の場合とほぼ同じで、スパン L を変えることによって異なる r 値における実験値を得るようにした。試験片の一般形状を Fig. 15 に示す。

Fig. 15(a) は開口がウェブの中心位置にある場合で、開口の高さ $2K$ および開口の長さ $2D$ を種々に変えた。また Fig. 15(b) は開口がウェブの中心から偏っている場合で、偏よりの大きさ E を種々に変えた。

実験結果から開口の上下位置が崩壊強度に及ぼす影響を調べると Fig. 16 のようになる。この図をみると開口の二下位置は崩壊強度にほとんど影響しないように思われる。従つて本論文の開口がウェブ中心にある場合の解

Fig. 13 相関曲線 II

Fig. 14 相関曲線 III

Fig. 15 開口試験片

Fig. 16 開口上下位置の影響

析結果は開口が極端に偏よつていない場合にはそのまま適用できるものと考えられる。

3.1 に述べたように崩壊を一断面のみにおいて考える以上計算結果に開口長さの因子は入つて来ないが、これを実験結果から調べると、Fig. 17 のようになる。開口長さがある程度大きくなると崩壊強度が低下して Fig. 11 のとき崩壊形式が実現していることがうかがわれる。しかし開口長さと開口高さが同じ程度のものでは開口長さの影響はないようで Fig. 10b のごとく一断面崩壊で考えてよいものと思われる。

4 各種の梁の等強度開口率

つぎに、梁としての強度を低下させずにあけ得る最大の開口の大きさについて考える。例えば Fig. 18 の梁において開口率が小さい間は (a) のごとく開口に無関係に荷重点に塑性関節を生じて崩壊し、従つて崩壊荷重は開口に無関係に一定値であるが、開口率がある値を越えると (b) のごとく開口部が塑性関節となつて崩壊荷重は低下する。この両者の境界となる開口率が梁としての強度を低下させずにもち得る最大の開口率であつて、これを等強度開口率と呼ぶことにする。この等強度開口率は 3.2 に述べた相関関係が得られているとこれを用いて

Fig. 17 矩形開口の長さが崩壊荷重に及ぼす影響
($L/H=3\frac{1}{3}$)

Fig. 18

梁の支持状態および荷重状態に応じて梁上の位置の関数として求めることができる。

すなわち、梁の崩壊時におけるモーメント分布を M_x 、剪断力分布を S_x とすると、 x 点における m および r の値は

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{M_x}{M_0} \\ r &= \frac{S_x}{M_x} \cdot \frac{M_0}{S_0} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

で表わされる。これは x をパラメータとする r - m 平面上の曲線を表わし、この曲線とある開口率の相関曲線との交点に対応する x の値がその開口率を等強度開口率とする点の位置を表わすことになる。従つて等強度開口率曲線を求めるためにはその梁の崩壊時におけるモーメントおよび剪断力分布から (13) 式による曲線を作図し、これと Fig. 12—Fig. 14 のとき各開口率に対する相関曲線群との交点を求めればよいわけである。

以下代表的な 2, 3 の梁について、Fig. 12—Fig. 14 を用いて等強度開口率曲線を求めてみる。

4.1 両端支持中央集中荷重

Fig. 19 のごとく荷重点を原点とする X 座標をとり $X/L = \xi$ とする。

$0 \leq \xi \leq 1$ におけるモーメントおよび剪断力は

$$M_x = FL(1 - \xi)$$

$$S_x = F$$

これを (13) 式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{FL}{M_0}(1 - \xi) \\ r &= \frac{1}{1 - \xi} \cdot \frac{H}{L} \cdot \frac{\alpha(2 - \alpha) + \beta(1 - \alpha)^2}{\alpha(1 - \beta) + \beta} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Fig. 20 両端支持中央集中荷重梁の等強度開口率

4.2 両端支持等分布荷重

Fig. 21 のごとく座標の原点をスパン中央にとるとモーメントおよび剪断力は

$$M_x = \frac{wL^2}{2}(1 - \xi^2)$$

$$S_x = wL\xi$$

したがつて

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{wL^2}{2M_0}(1 - \xi^2) \\ r &= \frac{2\xi}{1 - \xi^2} \cdot \frac{H}{L} \cdot \frac{\alpha(2 - \alpha) + \beta(1 - \alpha)^2}{\alpha(1 - \beta) + \beta} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

上式中 $wL^2/2M_0$ はスパン中央における m 値であるが、スパン中央では $r=0$ であるから $wL^2/2M_0=1$ で

Fig. 19

上式中 FL/M_0 は荷重点における m 値であつて、これは $K/H=0$ の相関曲線から同じ荷重点における r 値 $\frac{H}{L} \cdot \frac{\alpha(2 - \alpha) + \beta(1 - \alpha)^2}{\alpha(1 - \beta) + \beta}$ に対応する値として読みとられるものである。(14) 式にみられるごとく、一般に (13) 式の曲線は桁の高さとスパンの比を表わす値 H/L の関数となる。 H/L が $1/3$, $1/5$ および $1/10$ の3通りの場合について (14) 式と Fig. 12—Fig. 14 から3種類の断面について等強度開口率曲線を求めた結果を Fig. 20 に示す。曲線が水平の直線となる部分は剪断の影響が大きくて等強度開口率が剪断のみできまることがを示している。 $(\alpha, \beta) = (2/10, 1/15)$ の断面では H/L が $1/5$ 以上ではもともと剪断の影響が大きいため等強度開口率は全領域に亘つてほとんど零である。

Fig. 21

Fig. 22 両端支持中央集中荷重梁の等強度開口率

Fig. 23

ある。(15) 式と Fig. 12—Fig. 14 から求めた等強度開口率曲線を Fig. 22 に示す。

4.3 両端固定等分布荷重

前節と同様スパン中央では $r=0$ であるから $m=1$, 従つて $M=M_0$ である。

従つてモーメントおよび剪断力の分布は Fig. 23 のようになり

$$M_x = M_0 - \frac{wL^2}{2}\xi^2$$

$$S_x = wL\xi$$

$$m = 1 - \frac{wL^2}{2M_0}\xi^2$$

したがつて

$$r = \frac{2\xi}{2M_0 - wL^2\xi^2} \cdot \frac{H}{L} \cdot \frac{\alpha(2-\alpha) + \beta(1-\alpha)^2}{\alpha(1-\beta) + \beta} \quad (16)$$

上式中 $wL^2/2M_0$ は固定端が塑性関節であるという条件から $K/H=0$ の相関曲線を用いて求めることができる。これを求めると $(\alpha, \beta) = (1/10, 2/10)$ の断面では $H/L=1/3$ で, $(1/10, 1/15)$ の断面では $H/L=1/3$ および $1/5$ で, また $(2/10, 1/15)$ の断面では $H/L=1/3, 1/5, 1/10$ の各場合において $wL^2/2M_0=1$ となつて, (15) 式と (16) 式は一致し従つて等強度開口率曲線も一致する。これは固定端の剪断力が大きくて固定端は剪断力だけで崩壊して塑性関節となるため塑性モーメントは零で従つて崩壊時のモーメント分布は両端固定であるにも拘らず Fig. 21 と同様になるためである。

前節と異なる場合のみの計算結果を Fig. 24 に示す。

5 結 言

開口を持つI型断面の全崩壊状態に対して矩形応力分布を仮定した場合の塑性モーメントと剪断力の関係について考察を行ない, 3種類のI型断面に対して種々の開口率に対する相関曲線を求めた。さらにこの相関曲線を用いて梁としての崩壊強度を低下させずにあける最大の開口量を求める方法を示し, 代表的な荷重条件および支持条件の梁について等強度開口率曲線を求めた。これらの結果が, 開口を持つ梁の設計にあつて多少共参考となれば幸いである。

Fig. 24 両端固定等分布荷重梁の等強度開口率

参 考 文 献

- 1) M.R. Horne: The Plastic Theory of Bending of Mild Steel Beams with Particular References to the Effect of Shear Forces (Proc. Roy. Soc. A 207, 1951)
- 2) P.G. Hodge: Interaction Curves for Shear and Bending of Plastic Beams (J. App. Mech. 24, 1957)
- 3) B.G. Neal: The Effect of Shear and Normal Forces on the Fully Plastic Moment of a Beam of Rectangular Cross Section (Trans. ASME, 1961)

- 4) E. T. Onat, R. T. Shield : The Influence of Shearing Forces on the Plastic Bending of Wide Beams (Proc. 2nd. U. S. Cong. App. Mech. 1954)
 - 5) J. Heyman, V. L. Dutton : Plastic Design of Plate Girders with Unstiffened Webs (Welding & Metal Fabrication, July 1954)
 - 6) M. R. Horne : The Full Plastic Moments of Sections Subjected to Shear Forces and Axial Load (British Welding J. 5. 1958)
 - 7) 楠田忠雄 : 梁の塑性モーメントに及ぼす軸力並びに剪断力の影響 (造船協会論文集 第105号 1959)
 - 8) D. C. Drucker : The Effect of Shear on the Plastic Bending of Beams (J. App. Mech. 23, 1956)
-