(昭和 40 年 11 月造船協会秋季講演会において講演)

船体振動と船底振動との連成について

正員 山 越 道 郎*

正員 大 沼 覚**

On the Coupling of Hull Vibration and Bottom Vibration of Ships

By Michio Yamakoshi, *Member*Satoru Ōnuma, *Member*

Summary

To make clear the nature of hull vibration of higher mode it is indispensable to investigate the problem of the coupling of hull vibration and local vibration of ships. This problem was investigated already by Prof. Watanabe, Dr. Suetsugu and others in connection with the causes of the stern vibration of ships. In these investigations, however, they analysed the problem by replacing the structure which makes a local vibration with a system of spring and mass. As a first step to investigate this problem more closely, in this paper we have analysed the same problem by treating the bottom structure, the typical structure which makes a local vibration, as an elastic plate instead of replacing it with a system of spring and mass. After this investigation the nature of so-called second spectrum owing to the coupling of hull vibration and bottom vibration of ships have been made clear. We think that the interesting phenomena found in the experiments of box beams and sometimes in the tests on actual ships are closely connected with the two nodes or three nodes vibration of second spectrum explained in this paper.

1 緒 言

船体振動と局部振動との連成の問題は船体高次振動の性質を明らかにするためには欠くことのできない重要な問題である。この問題はすでに渡辺教授¹⁾、末次博士²⁾等により船尾振動の発生原因と関連して研究されているが、これらの研究ではいずれも局部振動体をバネ振子で置き換えて解析を行なっている。本論文はこの問題をさらに精密に検討するための第一歩として、局部振動体である船底構造をバネ振子で置き換えずに弾性板として取扱うという方法で解析を行なつたものであつて、二、三の興味ある結果が得られた。

また栖原寿郎教授³⁾、末次博士⁴⁾等はこの問題に関し非常に興味ある現象の存在することを箱型梁の模型実験によつて明らかにしているが、本研究はこのような現象を理解するための有力な手がかりを与えるものと思う。

2 基礎方程式

本論文では次のような仮定のもとに解析を行なつた。

- i) 船体は一様断面の箱型梁と仮定し、前後対称とする。
- ii) 船底構造は直交異方性板と仮定し、船側で単純に支持されているものとする。
- iii) 船側構造と甲板構造は一体として取扱ひ、以下では仮にこれを主構造と呼ぶこととする。
- iv) 本論文では高次振動に重点を置いているので、主構造の振動は近似的に剪断振動として取扱う。
- v) 横隔壁の影響は無視する。

以上のように仮定すれば、主構造および船底構造の運動方程式はそれぞれ次のようになる。すなわち船の長さ

原稿受付 昭和 40 年 7 月 10 日

* 九州大学工学部

** 三菱重工長崎研究所

Fig. 1

方向に x 軸, 横方向に y 軸をとり, 主構造の撓みを w_H , 船底構造の w_B をふくんだ全撓みを w_B , 船底構造より船側構造に作用する単位長さ当たりの力を $p(x, t)$ とすれば

$$-k'GA_H \frac{\partial^2 w_H}{\partial x^2} + \mu_H \frac{\partial^2 w_H}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (1)$$

$$D_x \frac{\partial^4 w_B}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w_B}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w_B}{\partial y^4} + \frac{\mu_B}{B} \frac{\partial^2 w_B}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

ただし $k'GA_H$ は主構造の剪断剛性, D_x, H, D_y は船底構造を直交異方性板と考えた場合の剛性, μ_H, μ_B は主構造および船底構造の x 軸方向単位長さ当たりの質量, B は船の幅であつて, w_H および w_B は下方への変位を正, $p(x, t)$ は Fig. 1 に示す向の場合を正とする。次に中央断面の船底中央に座標原点を取れば, $p(x, t)$ は次式で与えられる。

$$\frac{1}{2} p(x, t) = \left[D_y \frac{\partial^3 w_B}{\partial y^3} + (2H - D_1) \frac{\partial^3 w_B}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=B/2} \quad (3)$$

ただし D_1 は異方性板の剛性であつて, 等方性板の場合の νD に相当する。(2) 式を用いれば, (3) 式は次のように表わすこともできる。

$$\frac{1}{2} p(x, t) = - \int_0^{B/2} \left[\frac{\mu_B}{B} \frac{\partial^2 w_B}{\partial t^2} + D_x \frac{\partial^4 w_B}{\partial x^4} + D_1 \frac{\partial^4 w_B}{\partial x^2 \partial y^2} \right] dy \quad (4)$$

(1) 式, (2) 式および (4) 式がこの問題の基礎方程式である。

3 船底構造の縦方向の剛性を無視した場合

(1) 式, (2) 式および (4) 式を正確に解くことは困難であるから, ここではまず第一段階として船底構造の縦方向の剛性を無視した場合, すなわち $D_x = H = D_1 = 0$, $D_y \neq 0$ なる場合について考える。これは船底構造を無限に細かく並んだ横桁よりなると仮定した場合に相当する。

この場合には次のようにして正解を求めることができる。すなわち

$$w_B(x, y, t) = u_B(x, y) e^{i\lambda t} \quad (5)$$

とおき, (2) 式において $D_x = H = 0$ とおいた式に (5) 式を代入すれば

$$\frac{\partial^4 u_B(x, y)}{\partial y^4} - \left(\frac{m}{B} \right)^4 u_B(x, y) = 0 \quad (6)$$

ここに

$$\left(\frac{m}{B} \right)^4 = \frac{\mu_B \lambda^2}{B D_y} \quad (7)$$

(6) 式の一般解は次のようになる。

$$u_B(x, y) = A_1(x) \cosh \frac{m}{B} y + A_2(x) \sinh \frac{m}{B} y + A_3(x) \cos \frac{m}{B} y + A_4(x) \sin \frac{m}{B} y \quad (8)$$

船底構造は船側で単純に支持されていると仮定しているから

$$y = \pm \frac{B}{2} \text{ にて } w_B = w_H, \quad -D_y \frac{\partial^2 w_B}{\partial y^2} = 0 \quad (9)$$

ゆえに

$$w_H(x, t) = u_H(x) e^{i\lambda t} \quad (10)$$

とおけば, (5) 式と (9) 式より次の条件式を得る。

$$y = \pm \frac{B}{2} \text{ にて } u_B(x, y) = u_H(x), \quad \frac{\partial^2 u_B(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (11)$$

上式に (8) 式を代入して $A_1(x), A_2(x), A_3(x), A_4(x)$ を定めれば

$$A_1(x) = \frac{u_H(x)}{2 \cosh(m/2)}, \quad A_3(x) = -\frac{u_H(x)}{2 \cos(m/2)}, \quad A_2(x) = A_4(x) = 0 \quad (12)$$

ゆえに

$$u_B(x, y) = \frac{u_H(x)}{2} \left[\frac{\cosh(my/B)}{\cosh(m/2)} + \frac{\cos(my/B)}{\cos(m/2)} \right] \quad (13)$$

つぎに (4) 式において $D_x = D_1 = 0$ とおいた式に (5) 式および (13) 式を代入すれば

$$\frac{1}{2} p(x, t) = \frac{u_H(x)}{2} \left(\tanh \frac{m}{2} + \tan \frac{m}{2} \right) \left(\frac{m}{B} \right)^3 D_y e^{i\lambda t} \quad (14)$$

(10) 式と (14) 式を (1) 式に代入すれば次式を得る。

$$\frac{d^2 u_H(x)}{dx^2} + \alpha^2 u_H(x) = 0 \quad (15)$$

ただし

$$\alpha^2 = \frac{k^2}{\pi^2 L^2} \left[1 + \frac{\gamma}{m} \left(\tanh \frac{m}{2} + \tan \frac{m}{2} \right) \right] m^4 \quad (16)$$

ここに L は船の長さであつて、 k および γ は次のような係数である。

$$k = \frac{\lambda_B}{\lambda_H}, \quad \gamma = \frac{\mu_B}{\mu_H}, \quad \lambda_B = \frac{\pi^2}{B^2} \sqrt{\frac{D_y B}{\mu_B}}, \quad \lambda_H = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{k' G A_H}{\mu_H}} \quad (17)$$

λ_B および λ_H は船体の構造と状態によつて定まる常数であつて、船底横桁および主構造がそれぞれ単独に振動する場合の最低次の circular frequency に等しい。(15) 式の一般解は

$$u_H(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x \quad (18)$$

主構造の境界条件を両端で自由と仮定すれば

$$x = \pm \frac{L}{2} \text{ にて } k' G A_H \frac{\partial u_H}{\partial x} = 0 \text{ したがつて } \frac{\partial u_H}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

上式に (18) 式を代入した式より、 C_1, C_2 を消去すれば

$$\sin \alpha L = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha L = n\pi \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (20)$$

(16) 式と上式より α を消去すれば

$$n = k \frac{m^2}{\pi^2} \sqrt{1 + \frac{\gamma}{m} \left(\tanh \frac{m}{2} + \tan \frac{m}{2} \right)} \equiv \Phi(m) \quad (21)$$

1 例として $k=0.535$, $\gamma=6.5$ の場合について、 m と $\Phi(m)$ の関係を計算して図示すれば Fig. 2 に示すようになる。Fig. 2 より $\Phi(m)=n$ なる関係を満足する m の値は任意の n の値に対して $m=0 \sim \pi$, $\pi \sim 3\pi$, $3\pi \sim 5\pi, \dots$ の間にそれぞれ 1 つずつ存在することがわかる。このようにして m の値が求められれば、circular freq. λ は (7) 式より求められ、次のようになる。

$$\lambda = \left(\frac{m}{B} \right)^2 \sqrt{\frac{D_y B}{\mu_B}} = \left(\frac{m}{\pi} \right)^2 \lambda_B \quad (22)$$

つぎに特別な場合として $D_y \rightarrow \infty$ の場合を考えると、この場合には (7) 式より明らかなように $m \rightarrow 0$ となるから、(21) 式より

$$\left. \begin{aligned} n &= k \sqrt{1 + \gamma} \frac{m^2}{\pi^2} = \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_H + \mu_B}{k' G A_H}} \lambda \\ \text{ゆえに} \quad \lambda &= \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{k' G A_H}{\mu_0}} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ただし

$$\mu_0 = \mu_H + \mu_B \quad (24)$$

μ_0 は主構造と船底構造とを合わせた船体全体の単位長さ当りの質量であるから、(23) 式は船体全体を 1 本の梁と考えた場合の剪断振動の circular freq. を与える式と全く一致する。

船底構造の縦方向の剛性を無視した場合には、以上のようにして正解を求めることができるが、船底構造を板として取扱う場合には正解は簡単には求められない。したがつて次には、このような場合にも適用可能な近似解法を用いて縦方向の剛性を無視した場合について計算を行ない、正解による計算結果と比較して見る。まず船底

Fig. 2 $\Phi(m)$

横桁の振動波形の中、実際上最も重要と思われる最低次のものに重点をおくこととし、 $w_B(x, y, t)$ を次のように仮定する。

$$w_B(x, y, t) = w_H(x, t) + w_R(x, t) \cos \frac{\pi}{B} y \quad (25)$$

$$\text{ここで } w_R(x, t) = u_R(x) e^{i\lambda t} \quad (26)$$

とおき、(4) 式において $D_x = D_1 = 0$ とおいた式に (25) 式、(10) 式および (26) 式を代入すれば

$$\frac{1}{2} p(x, t) = \frac{1}{2} \mu_B \lambda^2 \left[u_H(x) + \frac{2}{\pi} u_R(x) \right] e^{i\lambda t} \quad (27)$$

(1) 式に (10) 式および (27) 式を代入して整理すれば

$$k'GA_H \frac{d^2 u_H(x)}{dx^2} + \mu_0 \lambda^2 u_H(x) + \frac{2}{\pi} \mu_B \lambda^2 u_R(x) = 0 \quad (28)$$

つぎに (2) 式において $D_x = H = 0$ とおいた式に (25) 式、(10) 式および (26) 式を代入して整理すれば

$$\lambda^2 u_H(x) + (\lambda^2 - \lambda_B^2) u_R(x) \cos \frac{\pi}{B} y = 0 \quad (29)$$

ここで Galerkin 法を参考にして、上式の両辺に $\cos(\pi y/B)$ を乗じ $y=0$ から $y=B/2$ まで積分すれば

$$\frac{B}{\pi} \lambda^2 u_H(x) + \frac{B}{4} (\lambda^2 - \lambda_B^2) u_R(x) = 0 \quad (30)$$

(28) 式と (30) 式より $u_R(x)$ を消去すれば

$$\frac{d^2 u_H(x)}{dx^2} + \alpha_1^2 u_H(x) = 0 \quad (31)$$

ただし

$$\alpha_1^2 = \frac{\left(\mu_0 - \frac{8}{\pi^2} \mu_B \right) \lambda^4 - \mu_0 \lambda_B^2 \lambda^2}{k'GA_H (\lambda^2 - \lambda_B^2)} \quad (32)$$

(31) 式は (15) 式と全く同形であるから、以下前と全く同様にして (20) 式の代りに次式を得る。

$$\alpha_1 L = n\pi \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (33)$$

(32) 式と (33) 式より α_1 を消去すれば

$$\left[1 + \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \right) r \right] \lambda^4 - [(1+r)k^2 + n^2] \times \lambda_H^2 \lambda^2 + n^2 k^2 \lambda_H^4 = 0 \quad (34)$$

r, k および λ_H は (17) 式に示してある。(34) 式は λ^2 の 2 次式であるから、2 組の λ^2 の値が得られる。この中の小さい方の値が正解の $0 \sim \pi$ の間の m の値より求めた λ^2 、大きい方の値が $\pi \sim 3\pi$ の間の m の値より求めた λ^2 に対応する。1 例として $k=0.535, r=6.5$ の場合について、正解による振動数と近似解による振

Fig. 3 f_n/f_0

Table 1 f_n/f_0 の値 ($k=0.535, r=6.5$)

n	1st spectrum		2nd spectrum	
	正解	近似解	正解	近似解
1	0.857	0.856	3.117	3.137
2	1.228	1.227	4.311	4.376
3	1.350	1.350	5.790	5.971
4	1.399	1.399	7.271	7.684
5	1.422	1.422	8.622	9.447
6	1.435	1.435	9.762	11.233
7	1.444	1.444	10.646	13.034
8	1.448	1.449	11.289	14.842

動数とを比較すれば Table 1 および Fig. 3 に示すようになる。ただし f_n および f_0 は

$$f_n = \frac{60}{2\pi} \lambda, \quad f_0 = \frac{60}{2\pi} \cdot \frac{\lambda_H}{\sqrt{1+r}} \quad (35)$$

Fig. 4 mode curve ($n=2$)

Fig. 6 mode curve ($n=6$)

Fig. 5 mode curve ($n=4$)

Fig. 7 mode curve ($n=8$)

であつて、1st spectrum, 2nd spectrum とはそれぞれ $0 \sim \pi$ の間および $\pi \sim 3\pi$ の間の m の値に対応する振動数を指すものとする。

Table 1 より上述の近似解法は 1st spectrum に対してはおおろくべき精度を有すること、また 2nd spectrum に対しても n が小さい場合にはかなりよい精度を有することがわかる。なお f_0 は船体全体を 1 本の梁と考えた場合の 1 節剪断振動の 1 分間の振動数であつて、曲げと剪断を考慮した 2 節振動の振動数と大体同じ程度の値であると考えられる。次にこの近似解法において $D_y \rightarrow \infty$ の場合を考えると、まず (17) 式より $\lambda_B \rightarrow \infty$ したがつて $k \rightarrow \infty$ となるから、(34) 式は次のようになる。

$$-(1+r)\lambda^2 + n^2\lambda_H^2 = 0 \quad \text{ゆゑに} \quad \lambda = n \frac{\lambda_H}{\sqrt{1+r}} = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{k'GA_H}{\mu_0}} \quad (36)$$

すなわち正解の場合と同様に、 $D_y \rightarrow \infty$ の場合には船体全体を 1 本の梁と考えた場合の剪断振動の振動数と一致する。

なお Fig. 4~Fig. 7 は $k=0.535$, $r=6.5$ の場合について正解を用いて計算した mode curve であつて、 η は船体中心における振幅と船側の振幅の比を表わす。これらの図より、船底中心の船側に対する相対撓みと船側の撓みとは 1st spectrum の場合は同方向であるが、2nd spectrum の場合には逆方向となることがわかる。

4 船底構造を等方性板と仮定した場合

船底構造を板として取扱う場合には正解は簡単には求められないので、前節で述べた近似解法を用いて計算を行なう。本節で述べる計算法は船底構造を直交異方性板と仮定した場合にも適用できるが、本節では簡単のため等方性板と仮定し

$$D_x = D_y = H \equiv D, \quad D_1 = \nu D \quad (37)$$

とおく。したがつて (2) 式および (4) 式はそれぞれ次のようになる。

$$D \left[\frac{\partial^4 w_B}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_B}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_B}{\partial y^4} \right] + \frac{\mu_B}{B} \frac{\partial^2 w_B}{\partial t^2} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{1}{2} p(x, t) = - \int_0^{B/2} \left[-\frac{\mu_B}{B} \frac{\partial^2 w_B}{\partial t^2} + D \left(\frac{\partial^4 w_B}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w_B}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right] dy \quad (39)$$

まず (39) 式に (25) 式、(10) 式および (26) 式を代入すれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} p(x, t) = & \frac{1}{2} \left[\mu_B \lambda^2 u_H(x) - DB \frac{d^4 u_H(x)}{dx^4} + \frac{2}{\pi} \mu_B \lambda^2 u_R(x) \right. \\ & \left. - \frac{2}{\pi} DB \left\{ \frac{d^4 u_R(x)}{dx^4} - \nu \frac{\pi^2}{B^2} \frac{d^2 u_R(x)}{dx^2} \right\} \right] e^{i\lambda t} \end{aligned} \quad (40)$$

(1) 式に (10) 式および上式を代入して整理すれば

$$\begin{aligned} -DB \frac{d^4 u_H(x)}{dx^4} + k'GA_H \frac{d^2 u_H(x)}{dx^2} + \mu_0 \lambda^2 u_H(x) \\ + \frac{2}{\pi} \left[-DB \left\{ \frac{d^4 u_R(x)}{dx^4} - \nu \frac{\pi^2}{B^2} \frac{d^2 u_R(x)}{dx^2} \right\} + \mu_B \lambda^2 u_R(x) \right] = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

つぎに (38) 式に (25) 式、(10) 式および (26) 式を代入して整理すれば

$$\begin{aligned} -DB \frac{d^4 u_H(x)}{dx^4} + \mu_B \lambda^2 u_H(x) + \left[-DB \left\{ \frac{d^4 u_R(x)}{dx^4} - 2 \frac{\pi^2}{B^2} \frac{d^2 u_R(x)}{dx^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\pi^4}{B^4} u_R(x) \right\} + \mu_B \lambda^2 u_R(x) \right] \cos \frac{\pi}{B} y = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

ここで前節と同様に上式の両辺に $\cos(\pi y/B)$ を乗じ $y=0$ から $y=B/2$ まで積分すれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} -DB \frac{d^4 u_H(x)}{dx^4} + \mu_B \lambda^2 u_H(x) + \frac{\pi}{4} \left[-DB \left\{ \frac{d^4 u_R(x)}{dx^4} \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \frac{\pi^2}{B^2} \frac{d^2 u_R(x)}{dx^2} + \frac{\pi^4}{B^4} u_R(x) \right\} + \mu_B \lambda^2 u_R(x) \right] = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

(41) 式および (43) 式の左辺第 1 項の $DB[d^4 u_H(x)/dx^4]$ という項は船底構造が主構造と同一の撓みを生ずることによつて船底部分に生ずる剪断力の差を表わしており、この項の影響は小さいと考えられるので、以下ではこの項を無視することとする。しかるときは

$$k'GA_H \frac{d^2 u_H(x)}{dx^2} + \mu_0 \lambda^2 u_H(x) + \frac{2}{\pi} \left[-DB \left\{ \frac{d^4 u_R(x)}{dx^4} - \nu \frac{\pi^2}{B^2} \frac{d^2 u_R(x)}{dx^2} \right\} + \mu_B \lambda^2 u_R(x) \right] = 0 \quad (41)'$$

$$\frac{4}{\pi} \mu_B \lambda^2 u_H(x) - DB \left\{ \frac{d^4 u_R(x)}{dx^4} - 2 \frac{\pi^2}{B^2} \frac{d^2 u_R(x)}{dx^2} + \frac{\pi^4}{B^4} u_R(x) \right\} + \mu_B \lambda^2 u_R(x) = 0 \quad (43)'$$

$$u_H(x) = U_H e^{\beta x}, \quad u_R(x) = U_R e^{\beta x} \quad (44)$$

とおいて、(41)' 式と (43)' 式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} [k'GA_H \beta^2 + \mu_0 \lambda^2] U_H + \frac{2}{\pi} \left[-DB \left(\beta^4 - \nu \frac{\pi^2}{B^2} \beta^2 \right) + \mu_B \lambda^2 \right] U_R &= 0 \\ \frac{4}{\pi} \mu_B \lambda^2 U_H + \left[-DB \left(\beta^2 - \frac{\pi^2}{B^2} \right)^2 + \mu_B \lambda^2 \right] U_R &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

上式より U_H と U_R を消去すれば

$$\begin{aligned} & \left[1 + \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \gamma \right] \left(\frac{\lambda^2}{\sigma^2 \lambda_H^2} \right)^2 - \left[\left\{ 1 + \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \gamma \right\} \frac{k^2}{\sigma^2} \left(-\frac{\beta^2 B^2}{\pi^2} \right)^2 - \left\{ 1 + \left(2 + 2\gamma - \frac{8}{\pi^2} \nu \gamma \right) \frac{k^2}{\sigma^2} \right\} \right. \\ & \quad \left. \times \left(\frac{\beta^2 B^2}{\pi^2} \right) + (1 + \gamma) \frac{k^2}{\sigma^2} \right] \left(\frac{\lambda^2}{\sigma^2 \lambda_H^2} \right) - \frac{k^2}{\sigma^2} \left(\frac{\beta^2 B^2}{\pi^2} \right) \left(\frac{\beta^2 B^2}{\pi^2} - 1 \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

ただし

$$\sigma = L/B \quad (47)$$

であつて、 γ , k および λ_H は (17) 式に示してある。1例として $k=0.535$, $\gamma=6.5$, $\sigma=7.437$ の場合について、(46) 式より $(\beta^2 B^2/\pi^2)$ と $(\lambda^2/\sigma^2 \lambda_H^2)$ との関係を計算して図示すれば Fig. 8 に示すようになる。Fig. 8 より (46) 式を満足する β^2 は λ^2 がある値より小さい場合には2つの正の値と1つの負の値、大きい場合には1つの正の値と2つの負の値を有することがわかる。したがつて (41)' 式と (43)' 式の一般解は次のようになる。

Fig. 8 $\beta^2 B^2/\pi^2$

$$1) \quad \frac{\lambda^2}{\lambda_H^2} < \frac{(1+\gamma)k^2}{\left[1 + \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \gamma \right] \sigma^2} \quad \text{の場合: —}$$

(46) 式を満足する3つの β^2 の値を β_1^2 , β_2^2 , $-\beta_3^2$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} u_R(x) &= C_1 \cosh \beta_1 x + C'_1 \sinh \beta_1 x + C_2 \cosh \beta_2 x + C'_2 \sinh \beta_2 x \\ &\quad + C_3 \cos \beta_3 x + C'_3 \sin \beta_3 x \\ u_H(x) &= \kappa_1 (C_1 \cosh \beta_1 x + C'_1 \sinh \beta_1 x) + \kappa_2 (C_2 \cosh \beta_2 x + C'_2 \sinh \beta_2 x) \\ &\quad + \kappa_3 (C_3 \cos \beta_3 x + C'_3 \sin \beta_3 x) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$$2) \quad \frac{\lambda^2}{\lambda_H^2} > \frac{(1+\gamma)k^2}{\left[1 + \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \gamma \right] \sigma^2} \quad \text{の場合: —}$$

(46) 式を満足する3つの β^2 の値を β_1^2 , $-\beta_2^2$, $-\beta_3^2$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} u_R(x) &= C_1 \cosh \beta_1 x + C'_1 \sinh \beta_1 x + C_2 \cos \beta_2 x + C'_2 \sin \beta_2 x \\ &\quad + C_3 \cos \beta_3 x + C'_3 \sin \beta_3 x \\ u_H(x) &= \kappa_1 (C_1 \cosh \beta_1 x + C'_1 \sinh \beta_1 x) + \kappa_2 (C_2 \cos \beta_2 x + C'_2 \sin \beta_2 x) \\ &\quad + \kappa_3 (C_3 \cos \beta_3 x + C'_3 \sin \beta_3 x) \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

ここに $C_j, C'_j (j=1, 2, 3)$ は積分常数であつて、 $\kappa_j (j=1, 2, 3)$ は次式で与えられる。

$$\kappa_j = \frac{\pi}{4} (\phi_j - 1), \quad \phi_j = \frac{\lambda_B^2}{\lambda^2} \left(\frac{\beta_j^2 B^2}{\pi^2} - 1 \right)^2 \quad (50)$$

つぎに船の前後端における境界条件を船底構造、主構造とも完全に自由であると仮定すれば

$$\left. \begin{aligned} -D \left[\frac{\partial^2 w_B}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_B}{\partial y^2} \right]_{x=\pm L/2} &= 0, \\ -D \left[\frac{\partial^3 w_B}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w_B}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=\pm L/2} &= 0, \quad k' G A_H \left[\frac{\partial w_H}{\partial x} \right]_{x=\pm L/2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

上式に (25) 式、(10) 式および (26) 式を代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{d^2 u_H(x)}{dx^2} + \left\{ \frac{d^2 u_R(x)}{dx^2} - \nu \frac{\pi^2}{B^2} u_R(x) \right\} \cos \frac{\pi}{B} y \right]_{x=\pm L/2} &= 0 \\ \left[\frac{d^3 u_H(x)}{dx^3} + \left\{ \frac{d^3 u_R(x)}{dx^3} - (2-\nu) \frac{\pi^2}{B^2} \frac{du_R(x)}{dx} \right\} \cos \frac{\pi}{B} y \right]_{x=\pm L/2} &= 0 \\ \left[\frac{du_H(x)}{dx} \right]_{x=\pm L/2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

(52) の第1式と第2式は y を含んでいるから、前と同様に両式の両辺に $\cos(\pi y/B)$ を乗じ $y=0$ から $y=B/2$ まで積分すれば、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{d^2 u_H(x)}{dx^2} + \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{d^2 u_R(x)}{dx^2} - \nu \frac{\pi^2}{B^2} u_R(x) \right\} \right]_{x=\pm L/2} &= 0 \\ \left[\frac{d^3 u_H(x)}{dx^3} + \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{d^3 u_R(x)}{dx^3} - (2-\nu) \frac{\pi^2}{B^2} \frac{du_R(x)}{dx} \right\} \right]_{x=\pm L/2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

(53) 式および (52) の第3式に (48) 式或は (49) 式を代入すれば、 $C_j, C'_j (j=1, 2, 3)$ に関する連立1次方程式が得られる。そして $x=+L/2$ における条件式と $x=-L/2$ における条件式の相対応するものを辺々加えまたは減ずることにより、これらの連立1次方程式は $C_j (j=1, 2, 3)$ のみを含むものと、 $C'_j (j=1, 2, 3)$ のみを含むものの2つのグループに分離される。 C_j のみを含む連立方程式は船体中央断面に関し対称な mode に対応し、 C'_j のみを含む連立方程式は逆対称な mode に対応する。これらの連立方程式よりそれぞれ C_j または C'_j を消去すれば、次式を得る。

称 mode : —

1) の場合

$$\Psi(\lambda) = \begin{vmatrix} \beta_1 [\phi_1 \zeta_1 - (2-\nu)] \text{th } \delta_1, & (\phi_1 \zeta_1 - \nu), & (\phi_1 - 1) \text{th } \delta_1 \\ \beta_2 [\phi_2 \zeta_2 - (2-\nu)] \text{th } \delta_2, & (\phi_2 \zeta_2 - \nu), & (\phi_2 - 1) \text{th } \delta_2 \\ -\beta_3 [\phi_3 \zeta_3 - (2-\nu)] \sin \delta_3, & (\phi_3 \zeta_3 - \nu) \cos \delta_3, & -(\phi_3 - 1) \sin \delta_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (54)$$

2) の場合

$$\Psi(\lambda) = \begin{vmatrix} \beta_1 [\phi_1 \zeta_1 - (2-\nu)] \text{th } \delta_1, & (\phi_1 \zeta_1 - \nu), & (\phi_1 - 1) \text{th } \delta_1 \\ -\beta_2 [\phi_2 \zeta_2 - (2-\nu)] \sin \delta_2, & (\phi_2 \zeta_2 - \nu) \cos \delta_2, & -(\phi_2 - 1) \sin \delta_2 \\ -\beta_3 [\phi_3 \zeta_3 - (2-\nu)] \sin \delta_3, & (\phi_3 \zeta_3 - \nu) \cos \delta_3, & -(\phi_3 - 1) \sin \delta_3 \end{vmatrix} = 0$$

逆対称 mode : —

1) の場合

$$\Psi(\lambda) = \begin{vmatrix} \beta_1 [\phi_1 \zeta_1 - (2-\nu)], & (\phi_1 \zeta_1 - \nu) \text{th } \delta_1, & (\phi_1 - 1) \\ \beta_2 [\phi_2 \zeta_2 - (2-\nu)], & (\phi_2 \zeta_2 - \nu) \text{th } \delta_2, & (\phi_2 - 1) \\ \beta_3 [\phi_3 \zeta_3 - (2-\nu)] \cos \delta_3, & (\phi_3 \zeta_3 - \nu) \sin \delta_3, & (\phi_3 - 1) \cos \delta_3 \end{vmatrix} = 0$$

2) の場合

$$\Psi(\lambda) = \begin{vmatrix} \beta_1 [\phi_1 \zeta_1 - (2-\nu)], & (\phi_1 \zeta_1 - \nu) \text{th } \delta_1, & (\phi_1 - 1) \\ \beta_2 [\phi_2 \zeta_2 - (2-\nu)] \cos \delta_2, & (\phi_2 \zeta_2 - \nu) \sin \delta_2, & (\phi_2 - 1) \cos \delta_2 \\ \beta_3 [\phi_3 \zeta_3 - (2-\nu)] \cos \delta_3, & (\phi_3 \zeta_3 - \nu) \sin \delta_3, & (\phi_3 - 1) \cos \delta_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (55)$$

Fig. 9 $\psi(\lambda)$

Fig. 10 mode curve

$$\zeta_j = \beta_j^2 B^2 / \pi^2, \quad \delta_j = \beta_j L / 2 \quad (j=1, 2, 3) \quad (56)$$

$k=0.535$, $r=6.5$, $\sigma=7.437$ の場合について, $(\lambda^2/\sigma^2\lambda_H^2)$ を横軸に取り (54) 式および (55) 式の左辺の値を図示すれば, Fig. 9 に示すようになる。したがって, これらの曲線が横軸を切る点の値から λ が求められる。

Fig. 9 において ①, ②, ..., ⑧ で示した点の λ の値を用いて mode curve をえがいて見ると, Fig. 10 に示すようにこれらは明らかにそれぞれ 1 節, 2 節, ..., 8 節の振動の波形を示している。そして Fig. 9 からわかるように ① から ⑧ までは逆対称, 対称の順に交互に規則正しく並んでいるが, ①* と ⑨ のところでは逆対称な mode に対応する振動数が連続してあらわれている。そこで ①* と ⑨ に対応する mode curve をえがいて見ると Fig. 11 に示すようになり, ①* の方は主構造に着目すれば 1 節振動と見ることができる。Fig. 9 を見ると, さらに ②* と ⑩ のところで今度は対称な mode に対応する振動数が連続してあらわれているので, ②* に対応する mode curve

Fig. 11 mode curve

Fig. 12 mode curve

をえがいて見ると Fig. 12 に示すようになり, 主構造に着目すれば明らかに 2 節振動と見なす方が妥当である。そこで ①* および ②* を前節で述べた 2nd spectrum の 1 節振動および 2 節振動に対応するものと推定し, Fig. 9 より求めた振動数と節数 n との関係を図示すれば Fig. 13 に示すようになる。Fig. 13 には船底構造の縦方向の剛性を無視して前節の方法で計算した値が ●印で示してあるが, ①* と ②* より求めた値は前節の方法で計算した 2nd spectrum の 1 節振動および 2 節振動の振動数とかなりよく一致している。また Fig. 11 および Fig. 12 を見ると, ①* および ②* に対応する振動の場合には, 船底中心の船側に対する相対撓みと船側の撓みとはいずれも逆方向であつて, これも ①* と ②* が 2nd spectrum に対応するものであることの証左と考えられる。

つぎに 1st spectrum について考察すると, Fig. 13 よりわかるように, 船底構造の縦方向の剛性を無視した場合には f_n/f_0 は n が増してもある値 (この例では 1.466) を越えないのに対し, 船底構造を等方性板と仮定した場合には f_n/f_0 は n が増すにしたがつて大きくなっている。これは縦方向の剛性を無視した場合には船底構造の固有振動数が縦方向の波形に無関係に一定であるのに対し, 等方性板と仮定した場合には縦方向の波形が増すにしたがつて船底構造の固有振動数が次第に大きくなるためと考えられる。すなわち縦方向の平均の波長を l とすれば, 等方性板の場合の circular freq. λ_B^* は次式で与えられる。

Fig. 13 f_n/f_0

$$\lambda_B^* = \left(\frac{\pi^2}{B^2} + \frac{\pi^2}{l^2} \right) \sqrt{\frac{DB}{\mu_B}} = \left(1 + \frac{B^2}{l^2} \right) \lambda_B \quad (57)$$

しかるに Fig. 10 より平均の波長 l を求めると近似的に $l \approx L/n$ で与えられる。したがって

$$\lambda_B^* \approx \left(1 + \frac{n^2}{\sigma^2} \right) \lambda_B \quad (\text{ただし } \sigma = L/B) \quad (58)$$

上式を用いて計算した船底構造の固有振動数は Fig. 13 に鎖線で示してある。等方性板と仮定して計算した 1st spectrum の f_n/f_0 と鎖線の曲線とは大体よく一致しているので、上に述べた推論は誤りないものと思う。

5 結 言

本論文では船底構造を弾性板と考えて船体振動との連成の問題を検討し、その結果いわゆる 2nd spectrum の性質や船底構造の縦方向の剛性の影響等を明らかにした。本研究により、従来実船試験や模型実験によって明らかにされているいわゆる振動数の飛躍の現象が実は 2nd spectrum の 2 節または 3 節振動によるものであることが説明できたと思う。

なお本論文では一様断面で横隔壁のない最も簡単な場合について検討したが、本研究を実船に応用するためには横隔壁の影響、変断面の影響、主構造の曲げ変形の影響等について今後さらに研究する必要があると思われる。終りに本研究に対し有益なご示唆とご討論を賜った渡辺恵弘教授ならびに熊井豊二教授に対し深く感謝致します。

参 考 文 献

- 1) 渡辺恵弘：船尾振動の発生原因について，西部造船会々報第 20 号，（昭和 35 年）
- 2) 末次一誠：単螺旋船の船尾振動に就いて，造船協会論文集第 95 号，（昭和 29 年）
末次一誠：単螺旋船に於ける船尾振動の発生機構に依る分類とその防止法に就いて，造船協会論文集第 103 号，（昭和 33 年）

- 3) 栖原寿郎：箱型梁の振動実験，船体構造委員会西部地区部会資料 [32]12/1/1, [33]12/1/1, [34]12/1/1
 4) 末次一誠，藤井克哉：船底振動について，関西造船協会々誌第111号，(昭和38年)

〔付録 1〕 第二の近似解法

さきに述べた近似解法では $p(x, t)$ を求める場合 (4) 式を用いて計算を行なつたが，(4) 式の代りに (3) 式を用いて計算することもできるわけであつて，これを第二の近似解法とよぶこととする。正しい w_B を用いて計算する場合には，さきに述べた近似解法でも第二の近似解法でも全く同じ結果が得られる筈であるが， w_B が正しくない場合には第二の近似解法の方が一般に誤差が大きい。以下船底構造の縦方向の剛性を無視した場合について，第二の近似解法を説明する。

まず (3) 式において $H=D_1=0$ とおき，(25) 式を代入すれば

$$p(x, t) = 2D_y \frac{\pi^3}{B^3} w_R(x, t) = -\frac{2}{\pi} \mu_B \lambda_B^2 w_R(x, t) \quad (59)$$

(1) 式に上式を代入し，さらに (10) 式および (26) 式を代入すれば

$$k'GA_H \frac{d^2 u_H(x)}{dx^2} + \mu_H \lambda^2 u_H(x) + \frac{2}{\pi} \mu_B \lambda_B^2 u_R(x) = 0 \quad (60)$$

上式と (30) 式より $u_R(x)$ を消去すれば

$$\frac{d^2 u_H(x)}{dx^2} + \alpha_2^2 u_H(x) = 0 \quad (61)$$

ただし

$$\alpha_2^2 = \frac{\mu_H \lambda^4 - \left(\mu_H + \frac{8}{\pi^2} \mu_B \right) \lambda_B^2 \lambda^2}{k'GA_H (\lambda^2 - \lambda_B^2)} \quad (62)$$

(61) 式は (15) 式と全く同形であるから，以下前と全く同様にして

$$\alpha_2 L = n\pi \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (63)$$

(62) 式と (63) 式より α_2 を消去すれば

$$\lambda^4 - \left[\left(1 + \frac{8}{\pi^2} \gamma \right) k^2 + n^2 \right] \lambda_H^2 \lambda^2 + n^2 k^2 \lambda_H^4 = 0 \quad (64)$$

$k=0.535$, $\gamma=6.5$ の場合について，上式を用いて計算した振動数は Fig. 3 に×印で示してある。同図よりわかるように，この方法で計算した振動数は 1st spectrum の場合には正解と非常によく一致するが，2nd spectrum の場合には正解よりかなり大きい。

つぎにこの近似解法において $D_y \rightarrow \infty$ の場合を考えると，(17) 式より $\lambda_B \rightarrow \infty$ したがつて $k \rightarrow \infty$ となるから，(64) 式は次のようになる。

$$-\left(1 + \frac{8}{\pi^2} \gamma \right) \lambda^2 + n^2 \lambda_H^2 = 0 \quad (65)$$

ゆえに

$$\lambda = n \frac{\lambda_H}{\sqrt{1 + \frac{8}{\pi^2} \gamma}} = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{k'GA_H}{\mu_H + \frac{8}{\pi^2} \mu_B}} \quad (66)$$

上式の λ は (23) 式の λ より若干大きい。

〔付録 2〕 船底構造をバネ振子で置き換える計算法

渡辺教授は西部造船会々報第20号に発表された論文の中で，単位長さ当り質量 m_0 ，バネ常数 c_2 なるバネ振子が船の全長にわたつて一様に分布している場合の船体振動を解析されている。同論文の振動数方程式を本論文の記号を用いてあらわせば

$$\alpha_3^2 = \frac{\mu_H}{k'GA_H} \left[\lambda^2 + \frac{c_2 \lambda^2}{\mu_H (\lambda_B^2 - \lambda^2)} \right] = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad (67)$$

$$\text{しかるに } c_2/m_0 = \lambda_B^2 \quad \text{ゆえに } c_2 = m_0 \lambda_B^2 \quad (68)$$

したがつて $m_0 = \mu_B$ において (67) 式を変形すれば

$$\lambda^4 - [(1 + \gamma) k^2 + n^2] \lambda_H^2 \lambda^2 + n^2 k^2 \lambda_H^4 = 0 \quad (69)$$

上式を(34)式と比較して見ると、異なっているのは λ^4 の係数のみであつて、若し近似的に $8/\pi^2 \approx 1$ と見るならば両式は全く一致する。 $k=0.535$, $r=6.5$ の場合について、(69)式を用いて計算した振動数はFig. 3に△印で示してある。同図を見ると、この方法で計算した振動数は[付録1]で述べた第二の近似解法で計算した値と大体一致している。

[付録 3] 主構造の曲げ変形を考慮した場合の基礎式

本論文では主構造の曲げ変形を無視し剪断変形のみを考慮して解析を行なつたが、剪断変形と曲げ変形の両方を考慮した場合にも同様な解析が可能である。次にこの場合の基礎式を求めて見る。ただし回転慣性および前後振動の影響は特に高次の場合を除いてはあまり大きくないので無視することとする。

まず主構造に作用する曲げモーメントを M , 剪断力を F , 軸力を N_H , 船底構造より主構造に作用する単位長さ当りの剪断力を $q(x, t)$ とし、それぞれ Fig. 14 に示す向に作用する場合を正とすれば、主構造の上下方向の運動方程式より次式を得る。

$$\mu_H \frac{\partial^2 w_H}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} + p \quad (70)$$

つぎに回転慣性および前後振動の影響を無視する場合には、慣性力は上下方向のもの以外は考える必要がないから、モーメントおよび前後方向の力の平衡条件より次式を得る。

$$F - \frac{\partial M}{\partial x} - qa = 0, \quad \frac{\partial N_H}{\partial x} + q = 0 \quad (71)$$

ただし a は船底構造と主構造の境界面より主構造の中立軸までの距離である。また船底構造に作用する軸力を N_B とすれば、船底構造の前後方向の力の平衡条件より

$$-\frac{\partial N_B}{\partial x} - q = 0 \quad (72)$$

つぎに主構造の剪断による撓みを w_{Hs} , 曲げによる撓みを w_{Hb} とし、主構造の中立軸のまわりの断面 2 次モーメントを I_H とすれば

$$F = k'GA_H \frac{\partial w_{Hs}}{\partial x}, \quad M = -EI_H \frac{\partial^2 w_{Hb}}{\partial x^2} \quad (73)$$

主構造と船底構造の接合部分では x 方向の変位が等しくなければならず、したがつて応力が等しくなければならない。ゆえに主構造および船底構造の断面積をそれぞれ A_H および A_B とすれば

$$\frac{N_H}{A_H} + \frac{M}{I_H} a = \frac{N_B}{A_B} \quad (74)$$

(70) 式, (71) 式, (72) 式, (73) 式および (74) 式より N_H , N_B , q , M および F を消去し

$$w_{Hs} = w_H - w_{Hb}, \quad \frac{\partial w_{Hb}}{\partial x} = \theta \quad (75)$$

とおけば、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} -k'GA_H \left(\frac{\partial^2 w_H}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \mu_H \frac{\partial^2 w_H}{\partial t^2} &= p, \\ k'GA_H \left(\frac{\partial w_H}{\partial x} - \theta \right) + E(I_H + I_A) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

ただし

$$I_A = a^2 \frac{A_H A_B}{(A_H + A_B)} \quad (77)$$

主構造と船底構造とを合わせた船体全体の断面 2 次モーメントを I_0 とすれば、 $(I_H + I_A)$ は近似的に I_0 に等しい。すなわち

$$I_H + I_A = I_0 - D_y B \approx I_0 \quad (78)$$

(76) 式, (2) 式および (4) 式が主構造の剪断変形と曲げ変形の両方を考慮した場合の基礎式である。

Fig. 14