(昭和 41 年 5 月造船協会春季講演会において講演)

プロペラ揚力面理論の新展開 (第 1 報)

正員 菅 井 和 夫

Hydrodynamics of Screw Propellers based on a new Lifting Surface Theory
(The 1st Report)

By Kazuo Sugai, *Member*

Summary

Recently, the author has developed a new lifting surface theory for low aspect ratio wings, in which the bound vortices representing the wing are distributed not over the projected surface on the stream plane but over the wing surface itself, while the free vortices are trailed along the locus of the moving wing under the category of linearized theory.

In the present paper, the application of this new lifting surface theory to screw propellers is discussed theoretically. The bound vortices representing the screw blade are distributed over the helical surface of the blade itself, while the free vortices are trailed along the helical locus of the moving blade. It is desirable to treat the problem three-dimensionally, in order to investigate the form of load distribution, not only in the radial direction but in the chord direction, in relation with the blade shapes and the working conditions. A two-dimensional integral equation that relate lift and downwash distributions on the screw blade is formulated. The numerical method of solution of the equation is obtained, considering the singularity of the kernel functions.

Besides, some numerical calculations are made to examine the characteristics of the kernel functions.

1 緒 言

著者は、さきに、縦横比が小さい翼の性能を考える場合、翼端附近から出る自由渦層がほとんど支配的な影響を持つており、またそれが一般流とほぼ同一方向に流出していることから、一つの新しい揚力面模型を考案した⁽¹⁾。すなわち、従来の線型揚力面理論においては、束縛渦を一般流に対する投影面上に分布させているのに対し、翼面そのもの上に分布させ、ただ後流渦は一般流と同一方向に流出させるというものである。そして、この新しい線型揚力面模型をもととし、小縦横比翼に対する近似揚力面理論を展開したところ、満足すべき結果を得ることができた。本論文は、この新しい揚力面模型をプロペラに導入するとともに、プロペラ理論を完全な揚力面の形で展開することを試みたものである。

螺旋推進器は、比較的縦横比の小さいいくつかの薄翼から成立っているものと考えることができる。ただその直進翼との顕著な相違は、螺旋面に沿って回転しながら前進しているということである。したがって、プロペラ理論は、翼理論にともなつて発展をとげてきたということができる。螺旋状に進行する翼としてのいわゆる線型プロペラ理論は、渦理論の導入にはじまり、近藤教授の加速度ポテンシャル理論により端麗な形に完成されている⁽²⁾。そして、主として航空機プロペラに揚力線技法の形で採入れられ、輝かしい貢献をとげることができた。

しかしながら、船用プロペラは航空機のそれと異なり、翼面積比が大きく、しかも翼面の幾何学的形状もかなり変化に富んだものである。また作動状態も軽荷重から重荷重に至るまで相当広範囲にわたっている。こうしたいわゆる broad bladed propeller⁽³⁾ を取扱うには、単なる揚力線技法では不十分で、揚力面理論を導入し翼面上の圧力分布まで求めてやる必要がある。このことは、特に最近のようにキャビテーションの限界を求めたり、

原稿受付 昭和 41 年 1 月 10 日

* 船舶技術研究所

可変ピッチプロペラの変節モーメントを求める上にも重要である。

近年、多くの研究者により、船用プロペラを揚力面として取扱う努力がなされてきた。まず、Weissinger 等の近似揚力面の導入にはじまり⁽⁴⁾⁽⁶⁾、最近では Falkner の渦格子法の応用^{(7)~(9)}、あるいはさらに渦を連続的に分布させたもの等⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾、いろいろな揚力面計算が行なわれるようになってきた。しかしながら、これらの揚力面計算ではもつばら螺旋進行翼を直進翼におきかえるためのいわば修正因子の計算に努力が注がれ、プロペラを螺旋揚力面とみなし、その境界条件を満たすような積分方程式を解くことにより、圧力分布を求めるといったような、いわば流体力学的にいつて正攻法的な行き方⁽¹²⁾は少ないようである。本論文は、プロペラを完全に揚力面の形で取扱い、その翼面上の揚力分布を積分方程式を解くことにより、翼面の幾何学的形状ならびに作動状態との関連において求めようとするものである。

かつては、揚力面を解くのに莫大な計算を必要とするため、これをいかに手計算可能にするかに多くの工夫がこらされた。しかしながら、現在のように電子計算機の利用が一般化した場合、こうした一見華麗とも見える数式的な展開も、理論そのものの性質をより明確に把握するためにのみ必要とされ、以前のような計算技術上必要とされた工夫は、現在ではむしろ電子計算機の利用を前提として、いかに上手に計算を行なうかに振向けられるようになってきた。本論文における数式の展開も、すべて電子計算機の利用を前提としたものである。

2 螺旋推進器の流場

2.1 プロペラの幾何学的表示と記号

本論文では、対称プロペラが完全流体の定常流れの中で作動している場合を取扱うことにする。すなわち、プロペラは Fig. 1 に示すごとく、時計方向に一定角速度 Ω で回転しながら x 軸の負の方向に一定速度 V で前進

Fig. 1 Representation of the Screw Blade and the Trailing Vortex

しているものとする。普通、船用プロペラの圧力面は螺旋面をなしており、ピッチや翼断面の形状等ははこの面を基準にして測られる。したがって、今後この面をプロペラの基準螺旋面と呼ぶことにしよう。これに対して、プロペラがあるスリップをもつて作動しているとき、その運動軌跡は上記基準螺旋面とは異なる螺旋面を画くことになる。この螺旋面は直進翼についていえば一般流の面に相当するもので、これを軌跡螺旋面と呼ぶことにする。そうすると、新しい揚力面では、束縛渦は基準螺旋面すなわち翼面そのものの上に分布させることになり、また後流渦は軌跡螺旋面に沿って流出されることになる。なお、本論文ではプロペラ翼を薄翼としてあつかい、その厚みは考えない

ものとする。ただし翼のキャンバーは境界条件を入れるときに考慮する。プロペラの rake は今回は考えないことにする。

論文文中に使用される記号をここにまとめて表示すると次のごとくである。

記 号 表

- x, y, z : 直角座標
- x, r, θ : 円柱座標
- s : 螺旋状の流れに沿った座標
- V : 前進速度
- Ω : 回転角速度
- Φ : 速度ポテンシャル
- N : 翼 数
- r_0 : プロペラの半径
- r_B : ボスの半径

一般に suffix L は翼の前縁、 T は後縁に関する座標を意味する。また $*$ は翼の基準螺旋面に関するものは軌跡螺旋面に関するものを意味する。また、次のような記号

$$h = V/\Omega, \quad h^* = V^*/\Omega, \quad \mu = r/h, \quad \mu^* = r/h^*,$$

$$W = \sqrt{V^2 + \Omega^2 r^2} = V \sqrt{1 + \mu^2}, \quad W^* = V^* \sqrt{1 + \mu^{*2}}$$

を使用する。ここで V^* はプロペラが幾何学的にスリップ零で前進しているときの速度に相当するものである。

2.2 渦理論により導かれる螺旋推進器の速度場

翼をあらわす基準螺旋面上に、循環分布 $\gamma(s^*, r^*)$ が任意の函数形をもつて分布しているものとする。新しい揚力面模型を導入すると、空間内の任意の点 (x, r, θ) に誘導される速度ポテンシャルは次式のごとく与えられる。

$$\Phi(x, r, \theta) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{M=0}^{N-1} \int_{r_B}^{r_0} \int_{s_L}^{s_T} ds^* dr^* \int_{s^*}^{\infty} \gamma(s^*, r^*) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) ds' \quad (1)$$

ここで

$$R = \sqrt{(x' - x)^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta' - \theta + 2\pi M/N)} \quad (2)$$

n' は軌跡螺旋面に対する法線方向をあらわし、また ds' は自由渦に沿つての、すなわち軌跡螺旋に沿つての積分をあらわしている。(1) 式が従来の渦理論と異なる主要な点は、束縛渦がある迎角をもつた面上に分布しており、後流渦はその各点から軌跡螺旋に沿つて流出されるため、単一な螺旋渦面ではなくある厚さをもつた螺旋渦層を形成していることである。

さて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n'} &= \cos \varepsilon' \frac{\partial}{\partial x'} - \sin \varepsilon' \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial \theta'} \\ &= \frac{\Omega r'}{W'} \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V}{W'} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial \theta'} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \mu'^2}} \left\{ \frac{r'}{h} \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial \theta'} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

であり、また

$$ds' = h \sqrt{1 + \mu'^2} d\theta' \quad (4)$$

なる関係があるから、これらを(1)式に代入して積分変数を s' から θ' に変換すると

$$\Phi(x, r, \theta) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{M=0}^{N-1} \int_{r_B}^{r_0} \int_{s_L}^{s_T} ds^* dr^* \int_{s^*}^{\infty} \gamma(s^*, r^*) \left\{ r' \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{h}{r'} \frac{\partial}{\partial \theta'} \right\} \frac{1}{R} d\theta' \quad (5)$$

が得られる。

つぎに、翼の基準螺旋面に対する法線方向を n^* であらわすと、(3)、(4) 両式と同様に

$$\frac{\partial}{\partial n^*} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^{*2}}} \left\{ \frac{r}{h^*} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} \quad (6)$$

$$ds^* = h^* \sqrt{1 + \mu^{*2}} d\theta^* \quad (7)$$

なる関係があるから、これらを(5)式に代入して基準螺旋面に対する法線方向の誘導速度 $w(x, r, \theta)$ を求めると、

$$\begin{aligned} w(x, r, \theta) &= \frac{\partial}{\partial n^*} \Phi(x, r, \theta) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{M=0}^{N-1} \int_{r_B}^{r_0} \int_{s_L}^{s_T} d\theta^* dr^* \int_{s^*}^{\infty} \gamma(\theta^*, r^*) \left\{ r \frac{\partial}{\partial x} - \frac{h^*}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} \left\{ r' \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{h}{r'} \frac{\partial}{\partial \theta'} \right\} \frac{1}{R} d\theta' \end{aligned} \quad (8)$$

となる。(8) 式の最後の積分の内部を演算すると、

$$\begin{aligned} &\left\{ r \frac{\partial}{\partial x} - \frac{h^*}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} \left\{ r' \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{h}{r'} \frac{\partial}{\partial \theta'} \right\} \frac{1}{R} \\ &= \frac{rr' + hh^* \cos(\theta' - \theta + 2\pi(M/N))}{R^3} \\ &\quad - \frac{3\{r(x' - x) - h^*r' \sin(\theta' - \theta + 2\pi(M/N))\} \{r'(x' - x) - hr \sin(\theta' - \theta + 2\pi(M/N))\}}{R^5} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで x' , θ' と θ^* 等の関係をしらべてみることにする。いま

$$h^* = h(1 + \alpha) \quad (10)$$

のごとくあらわすと、

$$x' - x = h\{\alpha(\theta^* - \theta) + \theta' - \theta\} \quad (11)$$

なる関係があり、さらに

$$\theta' - \theta = \theta'', \quad \theta^* - \theta = \theta_0 \quad (12)$$

とおくと、(11) 式は

$$x' - x = h(\alpha\theta_0 + \theta'') \quad (13)$$

となる。(9)~(13) 式の関係を使って (8) 式の積分を θ' から θ'' に変換すると、結局誘導速度は、

$$w(x, r, \theta) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{M=0}^{N-1} \int_{r_B}^{r_0} \int_{\theta_L}^{\theta_T} d\theta^* dr^* \int_{\theta_0}^{\infty} \gamma(\theta^*, r^*) \left[\frac{rr' + h^2(1+\alpha)\cos(\theta' + 2\pi(M/N))}{R^3} \right. \\ \left. - \frac{3\{hr(\alpha\theta_0 + \theta'') - hr'(1+\alpha)\sin(\theta'' + 2\pi(M/N))\}\{hr'(\alpha\theta_0 + \theta'') - hr\sin(\theta'' + 2\pi(M/N))\}}{R^5} \right] d\theta'' \quad (14)$$

となる。ここで

$$R = \sqrt{h^2(\alpha\theta_0 + \theta'')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta'' + 2\pi(M/N))} \quad (15)$$

3 積分方程式

3.1 境界条件と積分方程式

循環分布はプロペラ翼の基準螺旋面上に分布させたのであるから、境界条件もこの面上で満足させることにする。Fig. 2 は翼素まわりの流れの関係を、螺旋を直線に展開した形で示したものである。いま、翼の迎角を β であらわすことにすると、境界条件は、

$$w(r, \theta) = -W \sin \beta \quad (16)$$

のごとくあらわされる。ここで迎角 β を適当にとることにより、翼の厚みによるキャンパーを考慮に入れることにする。すなわち、基準螺旋面上に任意の点 (r, θ) をとり、これに対応する点を平均矢向線上にとつたとき、その点において引かれた接線が基準螺旋に対してなす角を $\Delta\beta(r, \theta)$ 、またその基準螺旋が軌跡螺旋に対してなす角を β_0 とすると、 $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$ である。一方、 $\sin(\epsilon + \beta) = \tilde{V}/\tilde{W}$ のごとく定義すると、

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sin(\epsilon + \beta) \cos \epsilon - \cos(\epsilon + \beta) \sin \epsilon \\ &= \frac{\tilde{V}}{W} \frac{\Omega r}{W} - \frac{\Omega r}{W} \frac{V}{W} \\ &= \frac{\tilde{\mu}}{h \sqrt{1+\mu^2} \sqrt{1+\mu^2}} (\tilde{h} - h) \\ &= \frac{\tilde{\mu}}{\sqrt{1+\mu^2} \sqrt{1+\mu^2}} (\alpha + \Delta\alpha) \end{aligned} \quad (17)$$

Fig. 2 Helical Flows scrrounding the Blade Section

となる。ただし

$$\tilde{h} = \frac{\tilde{V}}{\Omega} = h(1 + \alpha + \Delta\alpha), \quad \tilde{\mu} = \frac{r}{\tilde{h}}$$

とおいた。(17) 式を (16) 式に代入すると、結局境界条件は

$$w(x, r, \theta) = -\frac{\tilde{\mu} V}{\sqrt{1+\mu^2}} (\alpha + \Delta\alpha) \quad (18)$$

となる。したがって、(14)、(18) 両式より

$$\frac{\tilde{\mu} V}{\sqrt{1+\mu^2}} (\alpha + \Delta\alpha) = \frac{1}{4\pi} \sum_{M=0}^{N-1} \int_{r_B}^{r_0} \int_{\theta_L}^{\theta_T} d\theta^* dr^* \int_{\theta_0}^{\infty} \gamma(\theta^*, r^*) \left[\frac{rr' + h^2(1+\alpha)\cos(\theta'' + 2\pi(M/N))}{R^3} \right. \\ \left. - \frac{3\{hr(\alpha\theta_0 + \theta'') - hr'(1+\alpha)\sin(\theta'' + 2\pi(M/N))\}\{hr'(\alpha\theta_0 + \theta'') - hr\sin(\theta'' + 2\pi(M/N))\}}{R^5} \right] d\theta'' \quad (19)$$

のごとき積分方程式が導かれる。

さて、次のような無次元量、すなわち

$\xi = r/r_0$, $\xi_B = r_B/r_0$, $\mu = r/h$, $\mu' = r'/h$, $u(\zeta, \xi) = -w/V$, $g(\zeta^*, \xi^*) = r/V$
 を定義し、さらに

$$\theta_M = \frac{1}{2}(\theta_L + \theta_T), \quad \bar{\theta} = -\frac{1}{2}(\theta_L - \theta_T)$$

とおくと、 $-1 \leq \zeta^* \leq 1$ なる無次元量を用いて

$$\theta^* = \theta_M + \bar{\theta} \zeta^*$$

のごとくあらわすことができるから、これらの関係を使って (19) 式を無次元化すると、

$$u(\zeta, \xi) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\xi_B}^1 \int_{-1}^1 \bar{\theta}(\xi^*) g(\zeta^*, \xi^*) K(\theta_0; \mu, \mu'; \alpha) d\zeta^* d\xi^* \quad (20)$$

となる。ここで

$$u(\zeta, \xi) = \frac{\tilde{\mu}}{\sqrt{1+\mu^2}} (\alpha + \Delta\alpha)$$

$$K(\theta_0; \mu, \mu'; \alpha) = \sum_{M=0}^{N-1} \int_{\theta_0}^{\infty} \left[\frac{\mu\mu' + (1+\alpha)\cos(\theta'' + 2\pi(M/N))}{R^3} \right. \\ \left. - \frac{3\{\mu(\alpha\theta_0 + \theta'') - \mu'(1+\alpha)\sin(\theta'' + 2\pi(M/N))\}\{\mu'(\alpha\theta_0 + \theta'') - \mu\sin(\theta'' + 2\pi(M/N))\}}{R^5} \right] d\theta'' \quad (22)$$

$$R = \sqrt{(\alpha\theta_0 + \theta'')^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu'\cos(\theta'' + 2\pi(M/N))} \quad (23)$$

(20) 式が新しい定常プロペラ揚力面理論の積分方程式であり、プロペラの流力的性能は、この積分方程式を解くことにより求めることができる。

3.2 積分方程式の核の特異性

積分方程式の解法を考える前に、まずその核の性質をよくしらべておく必要がある。積分方程式の核関数の形は、前節 (22) 式で与えられている。この式で $\theta_0 \rightarrow 0$ とした場合を考えてみよう。 $M=0$ とし、(22) 式で単純に $\theta_0=0$ とおいた場合を考えると、核関数は

$$K(\theta_0; \mu, \mu'; \alpha)_{\theta_0=0} = \int_0^{\infty} \left[\frac{\mu\mu' + (1+\alpha)\cos\theta''}{\{\theta''^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu'\cos\theta''\}^{3/2}} \right. \\ \left. - \frac{3\{\mu\theta'' - \mu'(1+\alpha)\sin\theta''\}\{\mu'\theta'' - \mu\sin\theta''\}}{\{\theta''^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu'\cos\theta''\}^{5/2}} \right] d\theta'' \quad (24)$$

となる。この式で $\mu \rightarrow \mu'$ とすると積分は発散する。それは $\theta''=0$ の近傍に特異性が存在するからである。ここでは、その特異性についてしらべてみることにする。

(24) 式の特異性をしらべるため、積分範囲を $\theta''=0$ のごく近傍 $-\delta \leq \theta'' \leq \delta$ に限って考える。ここで δ は十分小さな正数とする。 $\mu' = \mu + \nu$ とおき、 ν もまた小さな値とする。(24) 式の核関数が θ'' および ν に関する numerator に展開できたとすると

$$\nu^l \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\theta''^m d\theta''}{\{\theta''^2 + \mu^2 + (\mu + \nu)^2 - 2\mu(\mu + \nu)\cos\theta''\}^{q/2}} \leq \nu^l \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\theta''^m d\theta''}{\{\theta''^2(1+k\mu^2) + \nu^2\}^{q/2}}, \quad 0 < k < 1 \quad (25)$$

なる形の積分式が得られる。ここで l および m は integer である。(25) 式において $l+m \geq q-1$ の場合には $\nu \rightarrow 0$ となつても積分は有限である。具体的に (24) 式の核関数を考えると、 l が 2 以上であれば積分は有限となる。つまり、積分方程式の核関数には 2 位の極が存在するということになる。

このように (20) 式の積分方程式は、いわゆる特異積分方程式といわれるものであることがわかった。これを解くには核関数を変形し

$$K(\theta_0; \mu, \mu'; \alpha) = \frac{\bar{K}(\theta_0; \mu, \mu'; \alpha)}{(\mu' - \mu)^2} \quad (26)$$

のとき分離形の核関数を導入するのが便利である。そして発散積分の有限部分を取り出すという概念のもとに解かれる。

なお、 $\theta_0 \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow \mu'$ としたときの $\bar{K}$ の極限形は

$$\bar{K}(0; \mu', \mu'; \alpha) = \frac{2(1+\alpha+\mu^2)}{\sqrt{1+\mu^2}} \quad (27)$$

のごとく与えられる。

以上のごとく、積分方程式の核函数の特異性は、従来のプロペラ揚力面理論と全く同じような形をしていることがわかった。ただ、従来の揚力面の核函数では $\mu \rightarrow \mu'$ とした場合、 $\theta_0 < 0$ の範囲に直線状に特異点が存在するのに反し、新しい揚力面では $\theta_0 = 0$ の1点にだけしか特異点は存在しない。

4 積分方程式の数値解法

本章においては、(20) 式で与えられた積分方程式の数値解法について考えることにする。前章において、すでに、積分方程式の核には2位の極が存在し、このような特異積分方程式を解くには $\bar{K} = (\mu' - \mu)^2 K$ のごとき分離形の核函数を導入するのが便利であることが示された。この $\bar{K}$ を使うと、(20) 式は

$$u(\zeta, \xi) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\xi_B}^1 \int_{-1}^1 \bar{\theta}(\xi^*) g(\zeta^*, \xi^*) \frac{\bar{K}(\theta_0; \mu, \mu'; \alpha)}{(\mu' - \mu)^2} d\zeta^* d\xi^* \quad (28)$$

のごとく書きかえられる。

4.1 翼面上の循環分布

積分方程式を解く前に、まず翼面上の循環の分布形を仮定してやらなければならない。揚力面の積分方程式を解くことにより翼面上の揚力分布を2次的に求めるのが本論文の目的であるから、循環分布は、Kutta の条件を満足する以外、半径方向のみならず翼弦方向にもなるべく任意の分布形になるようにとつてやらなければならない。すなわち、無次元循環分布を $g(\zeta^*, \xi^*) = \Gamma(\zeta^*, \xi^*)/V$ としたとき、Kutta の条件を満足して

$$g(\zeta^*, \xi^*) = a(\zeta^*, \xi^*) \sqrt{\frac{1 - \zeta^*}{1 + \zeta^*}} \quad (29)$$

のごとく表わされるものとする。ここで $a(\zeta^*, \xi^*)$ は二重フーリエ級数で表わされるような任意の函数とする。ただし、翼端部および翼根部においては $a(\zeta^*, \xi^*) = 0$ になるものとした。(29) 式の関係を(28)式に入れると、

$$u(\zeta, \xi) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\xi_B}^1 \int_{-1}^1 \bar{\theta}(\xi^*) a(\zeta^*, \xi^*) \sqrt{\frac{1 - \zeta^*}{1 + \zeta^*}} \frac{\bar{K}(\theta_0; \mu, \mu'; \alpha)}{(\mu' - \mu)^2} d\zeta^* d\xi^* \quad (30)$$

が得られる。

4.2 任意標点法

翼の循環分布は翼端附近で急激に変化しているものと考えられ、またその附近の分布形がプロペラ性能に重大な影響を及ぼすものであることから、これを正確に表わすため翼端附近の標点を稠密にすることが望ましい。このような場合、普通のいわゆる基準標点法では標点の数がむやみに増えるため必ずしも適当でない。標点を増やさずに翼端附近を稠密にするものとして任意標点法がある。この計算法は、翼の揚力線理論に近藤教授が適用し、後に花岡博士が円環揚力面積分方程式の数値解法⁽¹³⁾に用いたものと全く同一方針に従うものである。

さて、 η の任意単調増加函数 $\xi = \xi(\eta)$ を考えてみる。ただし $\eta = \pm 1$ に対し、それぞれ $\xi = 1, \xi_B$ なる条件を満たすものとする。(30) 式の積分方程式において、 $\bar{\theta}(\xi^*)$, $a(\zeta^*, \xi^*)$, $\bar{K}(\theta_0; \mu, \mu'; \alpha)$ 等を η^* の函数と考えて、

$$u(\zeta, \eta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{\theta}(\eta^*) a(\zeta^*, \eta^*) \sqrt{\frac{1 - \zeta^*}{1 + \zeta^*}} \frac{\bar{K}}{(\eta^* - \eta)^2} \frac{(\eta^* - \eta)^2}{(\mu' - \mu)^2} \frac{d\xi^*}{d\eta^*} d\zeta^* d\eta^* \quad (31)$$

のごとく書改められる。いま、

$$L(\eta, \eta^*) = \frac{(\eta^* - \eta)^2}{(\mu' - \mu)^2} \frac{d\xi^*}{d\eta^*} \quad (32)$$

において、

$$K^* = L(\eta, \eta^*) \bar{K} = L(\eta, \eta^*) (\mu' - \mu)^2 K \quad (33)$$

と定義すると、(31) 式は、

$$u(\zeta, \eta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{\theta}(\eta^*) a(\zeta^*, \eta^*) \sqrt{\frac{1 - \zeta^*}{1 + \zeta^*}} \frac{K^*}{(\eta^* - \eta)^2} d\zeta^* d\eta^* \quad (34)$$

となり、積分変数が ξ^* から η^* に変換されたことになる。

具体的には、

$$\left. \begin{aligned} \xi^2 &= \frac{1}{2}(1 - \xi_B^2) + \frac{1}{2}(1 - \xi_B^2)\eta \\ \xi^{*2} &= \frac{1}{2}(1 - \xi_B^2) + \frac{1}{2}(1 - \xi_B^2)\eta^* \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

とおくことにすると, (32) 式により

$$L(\eta, \eta^*) = \frac{(\xi^{*2} - \xi^2)^2}{(\mu' - \mu)^2 (1 - \xi_B^2) \xi^*} \quad (36)$$

であるから,

$$K^* = \frac{(\xi^{*2} - \xi^2)^2}{(1 - \xi_B^2) \xi^*} K \quad (37)$$

となる。

$\theta_0 = 0$ で $\mu \rightarrow \mu'$ の場合には, (27), (36) 両式より

$$K^*_{\theta_0=0, \mu=\mu'} = \frac{8\mu(1+\alpha+\mu^2)}{\mu_0^3(1-\xi_B^2)\sqrt{1+\mu^2}} \quad (38)$$

となる。

4.3 数値解法

ここでは, (34)式の積分方程式を Watkins が直進翼の揚力面を解くときに用いたと同様な手法に従い, ⁽¹⁴⁾ ⁽¹⁵⁾, 代数方程式の形に変換して数値的に解くことにする。いま

$$\begin{aligned} \zeta &= -\cos \varphi, & \zeta^* &= -\cos \varphi^* \\ \eta &= -\cos \psi, & \eta^* &= -\cos \psi^* \end{aligned}$$

とおくと, (34) 式は

$$u(\varphi, \psi) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_0^\pi \int_0^\pi \bar{\theta}(\psi^*) a(\varphi^*, \psi^*) K^*(\theta_0; \psi, \psi^*; \alpha) (1 + \cos \varphi^*) \frac{\sin \varphi^*}{(\cos \psi - \cos \psi^*)^2} d\varphi^* d\psi^* \quad (39)$$

のごとく書かえられる。 $a(\varphi^*, \psi^*)$ は翼根および翼端で零としたから, ψ^* 方向には sine 級数で表わすのが適当している。また φ^* 方向には cosine 級数で表わすことにして

$$\begin{aligned} &\bar{\theta}(\psi^*) a(\varphi^*, \psi^*) K^*(\theta_0; \psi, \psi^*; \alpha) \\ &= \frac{2}{i+1} \cdot \frac{2}{j+1} \sum_{p=0}^{i+1} \sum_{q=0}^{j+1} \varepsilon_p \varepsilon_q \bar{\theta}(\psi_q) a(\varphi_p, \psi_q) K^*(\theta_p; \psi, \psi_q; \alpha) \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{i+1} \sum_{l=0}^{j+1} \varepsilon_k \varepsilon_l \cos k\varphi_p \cos k\varphi^* \sin l\psi_q \sin l\psi^* \end{aligned} \quad (40)$$

のごとく書き表わすことにする。ここで, $\varepsilon_p, \varepsilon_q, \varepsilon_k, \varepsilon_l$ は $p, q, k, l=0, i+1$ or $j+1$ のとき $1/2$, $p, q, k, l \neq 0, i+1$ or $j+1$ のとき 1 とする。(40) 式を (39) 式に代入すると

$$\begin{aligned} u(\varphi, \psi) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2}{i+1} \cdot \frac{2}{j+1} \sum_{p=0}^{i+1} \sum_{q=0}^{j+1} \varepsilon_p \varepsilon_q \bar{\theta}(\psi_q) a(\varphi_p, \psi_q) K^*(\theta_p; \psi, \psi_q; \alpha) \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{i+1} \sum_{l=0}^{j+1} \varepsilon_k \varepsilon_l \cos k\varphi_p \sin l\psi_q \int_0^\pi (1 + \cos \varphi^*) \cos k\varphi^* d\varphi^* \oint_0^\pi \frac{\sin l\psi^* \sin \varphi^*}{(\cos \psi - \cos \psi^*)^2} d\psi^* \end{aligned} \quad (41)$$

となる。すなわち, 積分方程式は

$$u(\varphi_m, \psi_n) = \sum_p \sum_q a(\varphi_p, \psi_q) A_{pqmn} \quad (42)$$

の形の代数方程式に変換された。この式の右辺の係数行列 A_{pqmn} の計算は次のような順序で行なわれる。まず

$$A_{pqmn} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2}{i+1} \sum_{k=0}^{i+1} \varepsilon_p \varepsilon_k f_{pqmn} \cos k\varphi_p \int_0^\pi (1 + \cos \varphi^*) \cos k\varphi^* d\varphi^* \quad (43)$$

と書表わすことにすると, f_{pqmn} は

$$f_{pqmn} = \frac{2}{j+1} \sum_{l=0}^{j+1} \varepsilon_q \varepsilon_l \bar{\theta}(\psi_q) K^*(\theta_{pm}; \psi_n, \psi_q; \alpha) \sin l\psi_q \oint_0^\pi \frac{\sin l\psi^* \sin \varphi^*}{(\cos \psi_n - \cos \psi^*)^2} d\psi^* \quad (44)$$

のごとくあらわされる。(44) 式の右辺の積分記号は Hadamard の主値をあらわしている。この積分は, 部分積分すると第 1 項は零となるから, 結局 Cauchy の主値と同じことになる。すなわち,

$$\begin{aligned} &\oint_0^\pi \frac{\sin l\psi^* \sin \varphi^*}{(\cos \psi_n - \cos \psi^*)^2} d\psi^* = \left[-\frac{\sin l\psi^*}{\cos \psi_n - \cos \psi^*} \right]_0^\pi + l \oint_0^\pi \frac{\cos l\psi^*}{\cos \psi_n - \cos \psi^*} d\psi^* \\ &= -l \frac{\sin l\psi_n}{\sin \psi_n} \end{aligned} \quad (45)$$

したがって

$$\frac{2}{j+1} \sum_{l=0}^{j+1} \varepsilon_l \sin l\psi_q \oint_0^\pi \frac{\sin l\psi^* \sin \varphi^*}{(\cos \psi_n - \cos \psi^*)^2} d\psi^* = -\frac{2}{j+1} \sum_{l=0}^{j+1} l \varepsilon_l \sin l\psi_q \frac{\sin l\psi_n}{\sin \psi_n} \quad (46)$$

となる。これは Multhopp の係数にほかならない。

一方、(43) 式の右辺の積分は

$$\int_0^\pi (1 + \cos \varphi^*) \cos k\varphi^* d\varphi^* = \begin{cases} \pi, & k=0 \\ \frac{\pi}{2}, & k=1 \\ 0, & k>2 \end{cases} \quad (47)$$

となるから

$$\frac{2}{i+1} \sum_{k=0}^{i+1} \epsilon_k \cos k\varphi_p \int_0^\pi (1 + \cos \varphi^*) \cos k\varphi^* d\varphi^* = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{i+1} (1 + \cos \varphi_p) \quad (48)$$

かくして、 A_{pqmn} は (46)、(48) 両式から簡単に計算できるから、これを係数行列として (42) 式の連立方程式を解けばよいことになる。

5 核函数の性質

積分方程式を解く上で一番大切なことは、核函数の性質をあらかじめよく把握しておくことである。核函数には 2 位の極が存在し、またそのような特異点を含む積分方程式の解法はいかに行なうべきかについてはすでに述べた。本章では、新しい揚力面模型によるプロペラ積分方程式の核函数が、従来のものといかに相違しているか、また新しい核函数の全般的な変化の様子がいかなるものであるかをしらべてみることにする。

核函数の一般的な性質を求めるには、それがよくわかつた函数で簡単に表示できることが望ましい。しかしながら、(22) 式を見ても明かなごとく、核函数は相当複雑な形をしており、ある特定の場合に特殊函数により簡単に表示できる以外は、その性質を簡単に把握できるような適当な表示はみつからない。そこで本章では実際のプロペラについて具体的に数値を入れて計算を行ない、それらを plot して curve に画くことにより、数値的

Table 1 Table of the Kernel Function

$$\begin{aligned} N &= 4 \\ \mu_0 &= 4.72421 \\ \alpha &= .00000 \\ \theta_0 &= -.17453 \end{aligned}$$

μ	μ'	1.4407	2.4589	3.3867	4.1102	4.5677
1.4407	.19720	.07566	.01549	.01656	.01944	
2.4589	.12914	.50945	.24933	.13952	.12136	
3.3867	.10694	.34340	.93345	.61109	.39023	
4.1102	.13282	.23321	.74162	1.35708	1.15360	
4.5677	.15676	.22544	.52630	1.28203	1.66708	

Table 2 Table of the Kernel Function

$$\begin{aligned} N &= 4 \\ \mu_0 &= 4.72421 \\ \alpha &= .41652 \\ \theta_0 &= -.17453 \end{aligned}$$

μ	μ'	1.4407	2.4589	3.3867	4.1102	4.5677
1.4407	.00000	.08339	.05818	.06320	.06820	
2.4589	.13929	.00000	.25492	.16930	.14928	
3.3867	.13678	.34787	.00000	.59854	.40128	
4.1102	.18058	.26761	.72236	.00000	1.07349	
4.5677	.21648	.27866	.53922	1.18900	.00000

Fig. 3 Variations of the Kernel Functions in Chord Direction

に函数の性質の概要を掴むことにする。

計算を行なつたプロペラは翼数 4 で、その作動状態は $\mu_0 = 4.7242$, $\alpha = .41652$ とした。Table 1 および Table 2 は、 $\theta_0 = -.17453$ の場合につき、それぞれ新しい核函数 K^* と、その $\alpha = 0$ としたもの、すなわち従来の核函数とを表にしたものである。これら 2 つの表を比較すると、全般的にいつて大凡 α の order の相違があることが認められる。また $\mu = \mu'$ の場合を見ると、従来の核函数では $\theta_0 < 0$ であるため、特異積分を行なつた結果としての極限值が与えられているが、新しい核函数では特異点は存在せず、いずれも $K^* = 0$ となつている。なお、これらの表は K^* を示したものであるが、 $L(\mu, \mu')$ をかける前の函数 K についてみると、従来のものが μ と μ' を入換えても値が変わらないいわゆる対称核であるのに対し、新しい核函数のそれは対称核ではない。

Fig. 3 は、 $\mu = 3.3867$ の場合につき、縦軸に K^* を、また横軸に θ_0 をとつて、核函数の一般的な変化の様子を示したものである。 $\mu = \mu'$ の場合について考えると $\theta_0 = 0$

に特異点が存在し、核函数はこの点でのみある孤立した値を示し、その他の θ_0 についてはすべて零となる。したがって、積分方程式を数値的に解く場合、 $\mu=\mu'$ で翼弦方向に積分を行なうと極めて近似の悪いものとなる。しかしながら、 K^* はプロペラの半径方向には連続した函数となるため、まず半径方向に積分を行ない、しかる後に翼弦方向の積分を行なうものと考えれば、この2次元の積分はさほど精度の悪いものとはならない。

6 結 言

束縛渦を一般流に対する投影面上でなく、翼面そのものの上に分布させるという新しい揚力面モデルをプロペラに導入し、新たなプロペラ揚力面理論の展開を行なった。まず揚力分布を求めるための2次元積分方程式を導き、その核函数の特異性を検討するとともに、完全な揚力面としての解法を考えた。また実際のプロペラについて核函数の数値計算を行ない、その一般的性質を具体的に明らかにすることができた。

以上、本論文では主として新しいプロペラ揚力面の理論的考察を行なったが、プロペラ形状と揚力分布の関係等具体的な数値計算例については第2報に述べることにする。

参 考 文 献

- (1) 菅井和夫：“小縦横比揚力面に対する新しい線型近似法”造船協会論文集第117号(1965)
- (2) Kondo, K.：“The Potential-Theoretical Fundamentals of Aerodynamics concerning the Screw Propeller” Memoirs of the Faculty of Eng., Kyushu Univ., Vol. K No. 3, (1942)
- (3) Ginzler, I.：“Theory of the Broad-Bladed Propeller” ARC Current Paper No. 208, (1955)
- (4) 山崎隆介：“螺旋推進器理論について”造船協会論文集第100号(1957)
- (5) 山崎隆介：“非定常螺旋推進器理論について”西部造船会会報第28号(1964)
- (6) 中島康吉：“プロペラ揚力面理論とその応用(第1報)”造船協会論文集第108号(1960)
- (7) 西山哲男他：“プロペラ揚力面理論における誘導曲り修正”造船協会論文集第118号(1965)
- (8) English, J. W.：“The Application of a Simplified Lifting Surface Technique to the Design of Marine Propellers” NPL Rept. SHR 30/62, (1962)
- (9) Kerwin, J. E. and Leopold, R.：“A Design Theory for Subcavitating Propellers” SNAME, (1964)
- (10) Sparenberg, J. A.：“Application of Lifting Surface Theory to Ship Screw” ISP Vol. 7, No. 67, (1960)
- (11) Pien, P. C.：“The Calculation of Marine Propellers based on Lifting Surface Theory” J. of Ship Research Vol. 5, No. 2, (1961)
- (12) Hanaoka, T.：“Hydrodynamics of an Oscillating Screw Propeller” 4th Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington, D. C., (1962)
- (13) 花岡達郎：“円環揚力面積分方程式の数値解法(Kort's Nozzle 理論第2報)”造船協会論文集第86号(前編)(1953)
- (14) Watkins & others：“On the Kernel Function of the Integral Equation relating the Lift and Downwash Distributions of Oscillating Finite Wings in Subsonic Flow” NACA Rept. 1234, (1955)
- (15) Watkins & others：“A Systematic Kernel Function Procedure for determining Aerodynamic Forces on Oscillating or Steady Finite Wings at Subsonic Speeds” NASA Rept. R-48 (1959)