水中衝撃波を受ける円筒構造物の応答について

第 1 報 (殻板の座屈)

正員 坂 元 直 家*

On the Response of the Circular Cylindrical Structure subjected to the
Under-Water Shock Wave, 1st Report (Buckling of the Shell Plate)

Naoie Sakamoto. *Member*

Summary

Under-water explosion produces the Shock Wave and the Pressure Wave in the water, the former propagates at the same velocity of the under-water sound, and the later does more slowly. and so, there are two types of the response of the Structure subjected to the under-water explosion. The representative research can be seen in the report by R. D. Mindlin and H. H. Bleich¹⁾ on the response subjected to the Shock Wave, and in the reports by P. G. Hodge²⁾, H. Kitō³⁾, T. Nagai⁴⁾, K. Hanita⁵⁾, and Y. Homma⁶⁾ on the response under the Pressure Wave. Their conclusions are as follow ; Mindlin and Bleich : Elastic uniform radial deformation of the circular cylindrical shell.

P. G. Hodge : Plastic uniform radial deformation of the circular cylindrical shell.

H. Kitō : Magnification of the amplitude of the initial deflection.

T. Nagai : Semi-experimental formula presenting the total deformation including the effect of the initial static pressure, shock wave, and the pressure wave.

K. Hanita : Semi-experimental formula presenting the buckling distance against the weight of the explosive, but no presentation as to the depth effect.

Y. Homma : Generalized buckling condition by the Energy Method. And a simple example is presented.

Thus, there is no report treating the buckling of the cylindrical shell subjected to the Shock Wave. Author presents the buckling distance of the cylindrical shell subjected to the Shock Wave against the weight of explosive and the initial static pressure. Many experimental results are explained by the present theory.

1 ま え が き

水中爆発により、水中には音速で伝播する衝撃波と、それより遅い速度で伝播する圧力波（ガスグローブによる脈動圧）とが生ずる。従つてこれを受ける円筒構造物の応答も 2 通りを考えなければならない。衝撃波を受ける場合の応答については、僅かに R. D. Mindlin & H. H. Bleich¹⁾ により、円筒がその軸線の真横から Step Wave を受ける場合の半径方向の一樣弾性変形量の近似値が求められているに過ぎない。圧力波を受ける場合については、P. G. Hodge²⁾、鬼頭³⁾、永井⁴⁾、埴田⁵⁾、本間⁶⁾等の研究がある。

Hodge は圧力波の波型を色々に変えた場合、殻板を剛塑性体と仮定し、一定の降伏条件のもとで降伏するとして軸対称永久変形量を求め、力積が一定なら残留変形もほぼ一定であることを示した。鬼頭は、円筒殻の持つ初期離正が衝撃の水圧によりいかほどに拡大されるかその Magnification factor を求めた。永井は多くの実験結果から、初期静圧、衝撃波、圧力波等すべての効果を含んだ総凹損量を与える半実験式を出した。埴田は円筒殻板の静的座屈時の波数とたわみ振動の固有振動の次数とを関連させ実験的係数を定めて、鋸歯状圧力波を受ける

原稿受付 昭和 41 年 7 月 10 日

* 防衛庁技術研究本部技術開発官付

場合の座屈距離を与える式を導いた。本間は、エネルギー法により動的座屈圧力を求める一般式を提示し、Step Wave を受ける簡単な場合について理論値を求めている。

以上を眺めると、衝撃波を受ける円筒殻の座屈を取り扱った研究は、いまだ無いようである。著者はこの問題に対して、実用的で十分精度のある近似解を提案し、実験値との符合を示して水中爆発荷重をうける円筒構造物の設計に寄与しようとするものである。

2 理 論

2-1. 仮定およびその妥当性

(1) 衝撃波は円筒の軸線に対し真横からのみ且つ同時に殻板面に到達する。

通常の円筒殻は多くのフレームリングで補強されている。円筒と衝撃源との距離はフレームスペースに比して十分に遠いと考えられるので、球面波は平面波として取り扱って差し支えない。また円筒構造物は全体として長さが長く、その端部へ行くに従って衝撃圧力そのものが十分小さくなるとともに、円筒が短い場合でも、その端面では、板の急速な運動のためのエネルギーが大きく、円筒殻の軸方向の作用圧力は極めて小さいと考えられる。また衝撃波の伝播速度は極めて早く、殻板の変位は円筒の大きさに比べて無視し得る程小さいから、衝撃波は同時に殻板面に到達すると考えてよからう。

(2) 衝撃荷重に対する材料の応力-歪線図を第1図のごとく仮定する。除荷直前に A_1, A_2 の状態にあるとすれば除荷後はそれぞれ B_1, B_2 に復帰し、残留歪として $\epsilon_{p1}, \epsilon_{p2}$ を残すと考える。

歪速度が早いときは、降伏点、抗張力ともに歪速度の遅い場合に比べて相当高くなることが判っている⁷⁾。これを第2図に示す。この図は多くの実験データによつて固められており、米国海軍においても実用されているものである。ただし歪速度は最大変位を起す迄の平均とする。

第1図 動的応力歪線図

2-2. 座屈直前までの円筒殻の運動

符号を次の如く定める。

r, ρ : 夫々殻板、水の単位体積の重量 h : 殻板板厚 c : 水中音速 g : 重力の加速度 R : 殻平均半径
 l : フレームスペース $P_0 e^{-\theta t}$: 入射圧力 t : 時間 θ : time constant E : 殻板ヤング率 φ : 円筒中心と衝撃源とを結ぶ線を基準とした中心角
 中心角 φ なる点に入射する衝撃波は、殻面に対しては φ なる入射角を有する。衝撃波は音波と同様な性質を有

第2図 鋼材の動特性図

するから、音響学上のインピーダンスを考えなければならない。即ち、衝撃波も、その方向の水粒子の縦調運動であり、衝撃波面の圧力 P_0 と水粒子の速度 v との間には水の密度を ρ' 、音速を c とすれば、常に次式が成り立つ。

$$P_0 = \rho' cv$$

衝撃波が φ なる入射角で入射する場合、水粒子の速度を面に直角の成分と平行な成分とに分けて考え、これらが夫々独立に同時に作用するとして取り扱える。殻面に直角方向の衝撃波の圧力は $\rho' cve^{-\theta t} \cos \varphi (= P_0 e^{-\theta t} \cos \varphi)$ である。一方面に平行に進む衝撃波においては、水粒子は直接面をたたかないが、静圧に相等する水圧 $\rho' cve^{-\theta t} \sin \varphi (= P_0 e^{-\theta t} \sin \varphi)$ だけは受けることになる。いま、殻面に直角な成分 $P_0 e^{-\theta t} \cos \varphi$ による半径方向の変位を w_1 、反射圧を P_{r1} 、水圧 $P_0 e^{-\theta t} \sin \varphi$ による半径方向の変位を w_2 、 w_2 により生ずる衝撃波圧力を P_{r2} とすれば、外圧と慣性反力、弾性反力との釣り合い条件、殻板面での水粒子速度と殻板の速度との間に成り立つ連続条件とから、一応座屈直前までは、一様な収縮運動しかないもの即ち、軸方向、接線方向の変位は w_1, w_2 に比し無視できると仮定して¹⁾ 次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} P_0 e^{-\theta t} \cos \varphi + P_{r1} &= \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \frac{Eh}{R^2} w_1 + D \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} \\ P_0 e^{-\theta t} \cos \varphi - P_{r1} &= \frac{\rho c}{g} \frac{\partial w_1}{\partial t} \\ P_0 e^{-\theta t} \sin \varphi + P_{r2} &= \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \frac{Eh}{R^2} w_2 + D \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} \\ -P_{r2} &= \frac{\rho c}{g} \frac{\partial w_2}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

前記の4式を辺々相加え $w_1 + w_2 \equiv w_x$ とおけば、円筒殻が座屈するまでの運動方程式は次のようになる。

$$\frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2} + \frac{\rho c}{g} \frac{\partial w_x}{\partial t} + \frac{Eh}{R^2} w_x + D \frac{\partial^4 w_x}{\partial x^4} = P_0 (2 \cos \varphi + \sin \varphi) e^{-\theta t} \quad (1)$$

(1) 式は減衰を伴う強制振動の式であるが、第2項の減衰項は、通常の水の抵抗等を表わす $\frac{\rho}{g} \left(\frac{\partial w_x}{\partial t} \right)^2$ のオーダーに比べて $c \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \right)$ 倍のオーダーで、極めて大きいので、波状の振動波形は起つてもほとんど瞬間的に減衰され、一応仮定した一様な収縮運動だけが起くという考え方は実用的に正しい事が判る。このことは平板が衝撃波を受ける場合、その周縁の極く近傍を除き、ほとんど平板のままで変形することが確かめられていることから⁸⁾ 考えても正しいと考えられる。

また(1)式右辺の強制外力項から衝撃波を受ける殻板のたわみは衝撃源の真正面ではなくほぼ $\varphi = 26^\circ 30'$ ぐらいの所で最大となりその値は $\sqrt{5} P_0 e^{-\theta t}$ であることがわかる。さて(1)式には、次の定係数常微分方程式の解なる特解が存在する。

$$\frac{\gamma h}{g} \frac{d^2 w_0}{dt^2} + \frac{\rho c}{g} \frac{dw_0}{dt} + \frac{Eh}{R^2} w_0 = P_0 (2 \cos \varphi + \sin \varphi) e^{-\theta t} \quad (2)$$

(2) 式は $l = \infty$ の場合、いい換えるとフレーム無しの円筒殻の運動方程式である。ここに $R = \infty$, $\varphi = 0$ とすれば(2)式は従来発表されている平板と一致する。(1)式の解の余函数を w_v とすれば一般解は $(w_0 + w_v)$ であるから、之を(1)式に代入して(2)式と関連させて整理すれば、殻板のたわみ形に与えるフレームの効果を表わす w_v に関して、次の式が得られる。

$$\frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w_v}{\partial t^2} + \frac{\rho c}{g} \frac{\partial w_v}{\partial t} + \frac{Eh}{R^2} w_v + D \frac{\partial^4 w_v}{\partial x^4} = 0 \quad (3)$$

(2) 式を解けば、 $n = \frac{\rho c}{2\gamma h}$ $p^2 = \frac{Eg}{\gamma R^2}$ とし、

i) $n^2 > p^2$ の場合 $\left(\frac{R}{h} > 55 \right)$ の薄肉円筒殻の場合に適合)

$$\left\{ \begin{aligned} w_0 &= \frac{g P_0 (2 \cos \varphi + \sin \varphi) e^{-nt}}{2 \gamma h (\theta^2 - 2n\theta + p^2)} \left[- \left(1 + \frac{n - \theta}{\sqrt{n^2 - p^2}} \right) e^{\sqrt{n^2 - p^2} \cdot t} - \left(1 - \frac{n - \theta}{\sqrt{n^2 - p^2}} \right) e^{-\sqrt{n^2 - p^2} \cdot t} + 2e^{(n - \theta)t} \right] \\ w_v &= \frac{g P_0 (2 \cos \varphi + \sin \varphi) e^{-nt}}{2 \gamma h (\theta^2 - 2n\theta + p^2)} \left[\left(1 + \frac{n - \theta}{\sqrt{n^2 - p^2}} \right) (n - \sqrt{n^2 - p^2}) e^{\sqrt{n^2 - p^2} \cdot t} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{n - \theta}{\sqrt{n^2 - p^2}} \right) (n + \sqrt{n^2 - p^2}) e^{-\sqrt{n^2 - p^2} \cdot t} - 2\theta e^{(n - \theta)t} \right] \end{aligned} \right.$$

$$\ddot{w}_0 = \frac{gP_0(2\cos\varphi + \sin\varphi)}{2\gamma h(\theta^2 - 2n\theta + p^2)} \cdot e^{-nt} \left[-\left(1 + \frac{n-\theta}{\sqrt{n^2-p^2}}\right)(n - \sqrt{n^2-p^2})^2 e^{\sqrt{n^2-p^2}t} \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{n-\theta}{\sqrt{n^2-p^2}}\right)(n + \sqrt{n^2-p^2})^2 e^{-\sqrt{n^2-p^2}t} + 2\theta^2 e^{(n-\theta)t} \right] \quad (4)$$

w_0 の最大値は $\dot{w}_0$ を 0 とおいて求められる。[] 内第 2 項は第 1 項に比べて t が大きい程小さくなる。一般に w_0 が最大値をとる時間を t_0 とすれば、 $t=t_0$ において [] 内第 2 項を無視することができる。ゆえに

$$\left\{ \begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{n - \sqrt{n^2-p^2} - \theta} \cdot \log_e \frac{\left(1 + \frac{n-\theta}{\sqrt{n^2-p^2}}\right)(n - \sqrt{n^2-p^2})}{2\theta} \\ [w_0]_{t=t_0} &= \frac{gP_0(2\cos\varphi + \sin\varphi)}{2\gamma h(\theta^2 - 2n\theta + p^2)} \cdot e^{-nt_0} \left[-\left(1 + \frac{n-\theta}{\sqrt{n^2-p^2}}\right)e^{\sqrt{n^2-p^2}t_0} + 2e^{(n-\theta)t_0} \right] \end{aligned} \right. \quad (5)$$

ii) $n^2 < p^2$ の場合 $\left(\frac{R}{h} < 55\right)$ の厚肉殻またはフレームに適合)

この場合には明らかに減衰のある強制振動の形をとり

$$\left\{ \begin{aligned} w_0 &= \frac{gP_0(2\cos\varphi + \sin\varphi)}{\gamma h(\theta^2 - 2n\theta + p^2)} e^{-nt} \left\{ \sqrt{\frac{p^2 - 2n\theta + \theta^2}{p^2 - n^2}} \sin(\sqrt{p^2 - n^2}t - \beta_1) + e^{(n-\theta)t} \right\} \\ &\quad \tan \beta_1 = \frac{\sqrt{p^2 - n^2}}{\theta - n} \\ \dot{w}_0 &= \frac{gP_0(2\cos\varphi + \sin\varphi)}{\gamma h(\theta^2 - 2n\theta + p^2)} e^{-nt} \left\{ p \sqrt{\frac{\theta^2 - 2n\theta + p^2}{p^2 - n^2}} \sin(\beta_2 - \sqrt{p^2 - n^2}t) - \theta e^{(n-\theta)t} \right\} \\ &\quad \tan \beta_2 = \frac{\theta \sqrt{p^2 - n^2}}{n\theta - p^2} \\ \ddot{w}_0 &= \frac{gP_0(2\cos\varphi + \sin\varphi)}{\gamma h(\theta^2 - 2n\theta + p^2)} e^{-nt} \left\{ (p^2 - 2n\theta) \cos \sqrt{p^2 - n^2}t + \frac{2\theta n^2 - p^2(n+\theta)}{\sqrt{p^2 - n^2}} \sin \sqrt{p^2 - n^2}t \right. \\ &\quad \left. + \theta^2 e^{(n-\theta)t} \right\} \end{aligned} \right. \quad (6)$$

ここにおいて $w_0 = w_0 e^{\lambda x}$ とおき、(3) 式に代入すれば次式を得る。

$$\frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \frac{\rho c}{g} \frac{\partial w_0}{\partial t} \left[1 + \frac{\gamma h}{\rho c} \cdot 2 \cdot \frac{\partial \lambda x}{\partial t} \right] + \frac{Eh}{R^2} w_0 \left[1 + \frac{\rho c R^2}{Egh} \frac{\partial \lambda x}{\partial t} + \frac{\gamma R^2}{Eg} \left\{ \left(\frac{\partial \lambda x}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial^2 \lambda x}{\partial t^2} \right\} \right] + D \lambda^4 w_0 = 0$$

上式の第 2, 第 3 項 [] 内の値を評価するに $\frac{\gamma h}{\rho c}$, $\frac{\rho c R^2}{Egh}$, $\frac{\gamma R^2}{Eg}$ はすべて非常に小さな値である上に、特に t が t_0 に近づくにつれて、即ち w_0 が最大値に接近するにつれて (1) 式の始めの 2 項が 0 に近づき (第 4 図参照) 静圧による釣り合いの状態に近づくことから、 λ が一定値に収斂するので $\frac{\partial \lambda x}{\partial t}$ は 0 に近づくことになり、従つて [] 内の値は t_0 近傍において 1 と考えてよい。この場合上式の前 3 項までの和は、(2) 式より $P_0(2\cos\varphi + \sin\varphi)e^{-nt_0}$ に等しいから、次式で表わされる α_d を定義する。

$$[\lambda^4]_{t \rightarrow t_0} = \left[-\frac{P_0(2\cos\varphi + \sin\varphi)}{D} \cdot \frac{e^{-\theta t}}{w_0} \right]_{t \rightarrow t_0} \equiv -4\alpha_d^4 \quad (7)$$

$t \rightarrow t_0$ 以外の場合については、理論的に解析は困難であるが、平板の応答等⁸⁾ から考えて衝撃初期にはフレームの影響を無視し w_0 のみで理論を進めて大差なくその後 t_0 まで徐々にその影響をうけるものと仮定する。

(7) 式の結果を (3) 式の w_0 に代入して整理すれば

$$w_0 = w_0 (c_1 \sinh \alpha_d x \sin \alpha_d x + c_2 \sinh \alpha_d x \cos \alpha_d x + c_3 \cosh \alpha_d x \sin \alpha_d x + c_4 \cosh \alpha_d x \cos \alpha_d x) \quad (8)$$

また $x=0$, $x=l$ で $w_0 = Kw_0$, $\frac{dw_0}{dx} = 0$ なる境界条件から

$$w_0 = -\frac{Kw_0}{\sinh \alpha_d l + \sin \alpha_d l} \{ \sinh \alpha_d x \cos \alpha_d (l-x) + \cosh \alpha_d x \sin \alpha_d (l-x) \\ + \sin \alpha_d x \cosh \alpha_d (l-x) + \cos \alpha_d x \sinh \alpha_d (l-x) \} \quad (8)'$$

したがつて (1) 式の解は次のようになる。

$$w_x = w_0 \left[1 - \frac{K}{\sinh \alpha_d l + \sin \alpha_d l} \right] \{ \sinh \alpha_d x \cos \alpha_d (l-x) + \cosh \alpha_d x \sin \alpha_d (l-x) \\ + \sin \alpha_d x \cosh \alpha_d (l-x) + \cos \alpha_d x \sinh \alpha_d (l-x) \} \quad (9)$$

この (9) 式には、また K が未知数のまま残っている。この K は、次のフレームの運動方程式を解き、フレーム

と殻板の応答を互に関連させて決定されるべきものである。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 w_{x=0}}{\partial t^2} + \frac{\rho c b}{g} \frac{\partial w_{x=0}}{\partial t} + \frac{EF}{R^2} w_{x=0} = -2D \left(\frac{\partial^3 w_x}{\partial x^3} \right)_{x=0} + P_0 b (2 \cos \varphi + \sin \varphi) e^{-\theta t} \\ \text{ただし } F = \text{フレームのみの断面積と } bh \text{ との和} \\ \quad b = \text{フレームのウェブの厚さ} \\ \quad D = \text{殻板の曲げ剛性} \end{array} \right. \quad (10)$$

(10) 式をまともにも解く事は困難である。そこで実用的近似解を得るために (10) 式右辺の強制力をそれぞれ別々に分けて考える。

i) 右辺第2項の強制力に対するフレームの応答は、(6) 式の h の代りに F/b を代入して得られる。この場合、一般に F/bR は 1/10 程度のものであり従つて n も p の 1/5.5 程度のものであるから (6) 式の n は無視し、すなわち無減衰強制振動としても差し支えない。

ii) 右辺第1項の強制力に対するフレームの応答を考える前に、この強制力が静的に加わる場合、すなわち (10) 式左辺の第1, 第2項が0の場合について考えて見よう。この結果は、強制力が動的に働らく場合の応答を求める際の基本とする。この場合には一応 α_d によつて定まるたわみ形が変わらないと仮定すれば簡単に解けて

$$K = 1 / \left\{ 1 + \frac{2\alpha_d^3 R^2 h^3}{2(1-\nu^2)F} \cdot \frac{\cosh \alpha_d l - \cos \alpha_d l}{\sinh \alpha_d l + \sin \alpha_d l} \right\} \quad (11)$$

第3図. $\delta_x \sim \alpha_d l$

となり(9)(11)式からフレームおよび殻板のたわみが定まる。この静的たわみを δ_x で表わせば $\delta_{x=0}/w_0$, $\delta_{x=1/2}/w_0$ は $\alpha_d l$, $R^2 h^3 / F l^3$ によつて一定値をとり、第3図のように図示される。この図から $\alpha_d l$ が約 4.7 を超える場合には $\delta_{x=1/2}$ はフレームの寸法の大小を問わず w_0 となり、動的にもフレームの影響は $\delta_{x=1/2}$ に及ばないことがわかる。 $\alpha_d l$ が約 4.7 よりも小さければフレームの効果を受けることになる。またこの強制力は動的に働らくから過渡現象として $\delta_{x=0}$ が拡大され、従つて $w_{x=1/2}$ も $\delta_{x=1/2}$ より大きくなる可能性が十分にある。この強制力は $\delta_{x=0}$ に比例するから第3図の $\delta_{x=0}/w_0$ を見ると、これは $\alpha_d l$ が大きくなるにつれて増大し1に近づく性質を有する。然るに厳密には $\alpha_d l$ の実効値は時間により変化し、(7) 式直後に仮定した通り衝撃初期程大きいと考えられる。すなわちこの強制力の時間分布は、 $t=0$ 付近で w_0 のそれより若干ふくらみぎみで時間が経つにつれて、 w_0 のそれより若干抑えられた形をとることが判る。そこで、第4図の w_0 の時間分布から考えて、この強制力は周期 $4t_0$ なる sin 形に置換して近似可能であることが判る。従つてフレームの変位 w_F は $0 \leq t \leq 4t_0$ において

$$w_F = -\frac{p^2}{p^2 - \left(\frac{\pi}{2t_0}\right)^2} \left\{ \sin \frac{\pi}{2t_0} t - \frac{\pi}{2t_0 p} \sin pt \right\} \delta_{x=0} \quad (12)$$

となる。この w_F と i) で述べたフレームの変位との和が求めるフレームのたわみである。ここにおいて、 $\dot{w}_0$ から、このようにして求めたフレームのたわみを差し引いた量が (8)' 式の Kw_0 に相当することに着目し、(9) 式から直ちに殻板のたわみを計算することができる。

2-3. 平板の応答との比較

殻板表面に働く作用圧力 P としては、初期静圧を p_i として $\left(\frac{\gamma h}{g} \ddot{w}_0 + \frac{Eh}{R^2} w_0 + p_i\right)$ であるが、平板の場合には $\frac{Eh}{R^2} w_0$ の項が 0 であり、この点が異なる。平板の場合には作用圧が 0 となり、キャビテーションを起こした後は、面の速度がほとんど一定であるのに対し水粒子の速度は $e^{-\theta t}$ に従って減速するのでキャビテーションは仲々消滅しない。所が円筒殻ではキャビテーションを起してもその後殻は自由振動の状態に移り、 $\dot{w}_0$ が急速に減速するから水粒子は短時間の内に殻板に追いつき、自らの力でキャビテーションを消滅させてしまう。(4)(5) 式に示す殻板の応答は、厳密にはキャビテーションを起こさない場合にのみ正しいのであるが、キャビテーションを生じている時間が非常に短かく、キャビテーションを閉じてからは再び (4)(5) 式に従った応答に戻ることになる。従って殻の応答はキャビテーションを起している極く僅かの時間に攪乱をうけるだけであるから (4)(5) 式に特にキャビテーションの効果を取り入れなくても、実用的にはほぼ正しい応答を示しているものと考えられる。第 4 図を参照せよ。

2-4. 水中衝撃波をうける円筒殻の座屈条件

2-2 節において水中衝撃波をうける円筒殻板のたわみとその時の殻板表面に働いている作用圧力との関係が甚だ煩雑な数式で表現された。そこで座屈直前の殻板中心面の歪み ε_{x0} , $\varepsilon_{\varphi 4}$ がそれぞれ作用圧力 P と次のごとき関係にあるときの座屈圧力について考えて見る。

$$\varepsilon_{x0} = \frac{PR}{Eh} \left(-\frac{1}{2} + \nu k \right), \quad \varepsilon_{\varphi 0} = \frac{PR}{Eh} \left(-k + \frac{\nu}{2} \right) \quad (13)$$

ここで k なる数は外圧 P が動的に加わった場合のたわみの修正パラメータとする。

作用圧力 P は入射衝撃圧力と異なり、殻面の運動による慣性力、弾性反力等を考えた実際に殻面に作用する圧力であり、2-3 項に述べたようにキャビテーションの発生をも説明できるものである。ここまで来れば、あとの座屈問題は例えば本間の理論が利用できることになり、従って座屈前後の運動エネルギーの変化は無視でき、かつ殻表面の作用圧力 P と殻面のたわみとの関係さえ判れば、座屈条件は形式的に静的な方法で求めてもよいことになる。

座屈時の平衡条件をエネルギー法⁹⁾ によつて求めると

$$\begin{aligned} \Delta U = & \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint \left[u_x^2 + v_s^2 + \frac{w^2}{R^2} + 2\nu u_x v_s - \frac{2\nu u_x w}{R} - \frac{2v_s w}{R} \right] R dx d\varphi \\ & + \frac{Eh}{4(1+\nu)} \iint [v_x + u_s]^2 R dx d\varphi \\ & + \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \iint \left[w_{xx}^2 + w_{ss}^2 + 2\nu w_{xx} w_{ss} + 2(1-\nu) w_{xs}^2 + \frac{w^2}{R^4} + \frac{2}{R^2} w w_{ss} \right] R dx d\varphi \\ & - PR^2 \iint \left[k \left\{ \frac{v^2}{2R^2} + \frac{vw_s}{R} + \frac{w_s^2}{2} \right\} + \frac{w_x^2}{4} - \left\{ \frac{v^2}{2R^2} + \frac{vw_s}{R} + \frac{w^2}{2R^2} - \frac{u_x w}{R} \right\} \right] dx d\varphi \end{aligned} \quad (14)$$

$$(14) \text{ 式に } \left. \begin{aligned} u &= A \sin \frac{\pi x}{l} \sin n\varphi \\ v &= B \cos \frac{\pi x}{l} \cos n\varphi \\ w &= C \cos \frac{\pi x}{l} \sin n\varphi \end{aligned} \right\} \text{ここに } \begin{aligned} x &= \frac{l}{2} \sim -\frac{l}{2} \\ \varphi &= 0 \sim 2\pi \end{aligned}$$

と置いて代入し、座屈時の平衡条件として

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta U}{\partial A} = \frac{\partial \Delta U}{\partial B} = \frac{\partial \Delta U}{\partial C} = 0 \quad \text{から} \\ \left\{ \begin{aligned} \Delta |a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}| &= 0 \quad \text{ここに } i, j = 1, 2, 3 \\ a_{11} &= 2\alpha^2 + (1-\nu)n^2 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{12}=a_{21}=-(1+\nu)n\alpha \\ a_{13}=a_{31}=-2\alpha\left\{\nu+(1-\nu^2)\frac{PR}{Eh}\right\} \\ a_{22}=2\left\{n^2+\frac{1-\nu}{2}\alpha^2-(k-1)(1-\nu^2)\frac{PR}{Eh}\right\} \\ a_{23}=a_{32}=2n\left\{1-(k-1)(1-\nu^2)\frac{PR}{Eh}\right\} \\ a_{33}=2+\frac{1}{6}\left(\frac{h}{R}\right)^2\{(n^2+\alpha^2)^2-(2n^2-1)\}-\left(kn^2+\frac{\alpha^2}{2}-1\right)\frac{2(1-\nu^2)}{Eh}PR \end{array} \right. \quad (15)$$

しかるに PR/Eh は一般に $10^{-2}\sim 10^{-3}$ のオーダーであるから k が著しく大きい場合を除き a_{11} , a_{22} , a_{23} の PR/Eh の項は無視することができる。従つて, (15) 式は

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}=2\alpha^2+(1-\nu)n^2 \\ a_{12}=a_{21}=-(1+\nu)n\alpha \\ a_{13}=a_{31}=-2\alpha\nu \\ a_{22}=2n^2+(1-\nu)\alpha^2 \\ a_{23}=a_{32}=2n \\ a_{33}=2+\frac{1}{6}\left(\frac{h}{R}\right)^2\{(n^2+\alpha^2)^2-(2n^2-1)\}-\left(kn^2+\frac{\alpha^2}{2}-1\right)\frac{2(1-\nu^2)}{Eh}PR \end{array} \right. \quad (15)'$$

と書ける。ゆえに直ちに, 任意の k に対し座屈圧力は

$$\frac{P_{k=k}}{P_{k=1}} = \frac{n^2 + \frac{\alpha^2}{2} - 1}{kn^2 + \left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right)} \quad (16)$$

この (16) 式で, 右辺分母, 分子の 1 を省略したものは T. E. Reynolds および J. A. Nott¹⁰⁾ の得た式と全く一致している。また衝撃波を受ける場合には, 2-1 節 (1) の仮定から (16) 式右辺の $\alpha^2/2$ の項が消失するから,

$$\frac{P_{k=k}}{P_{k=1}} = \frac{n^2 - 1}{kn^2 - 1} \quad (17)$$

したがつて, $w_{x=\frac{1}{2}}$ と (17) 式とから水中衝撃波をうける円筒殻板の座屈について次のごとき結論を下し得る。

(1) 衝撃初期においては k は微小であるが作用圧力が著しく大きいから n の非常に大きな座屈の可能性がある。この場合については, 小薬量爆発を至近距離で受けるような場合に相当し, 本理論の平面波の仮定が怪しくなるので更に研究を要するが, むしろ座屈よりも脆性破壊の問題が重要となろう。

(2) $w_{x=\frac{1}{2}}$ が最大値をとる時点 t_0 近傍では, 殻表面の作用圧力の内 $\ddot{w}$ の項が著しく減衰し $\frac{Eh}{R^2} w_{x=\frac{1}{2}}$ に近づいているので, k は 1 より大きくかつ 1 に近い値をとることになる。もともと円筒殻の場合 n は 1 に比べて十分に大きいので, (17) 式の右辺は $1/k$ においても十分に正確である。 $P_{k=1}$ とは, 静座屈圧力を意味するから $P_{k=k} \times k = P_{k=1}$ の表わす意義は『衝撃波を受ける円筒殻板の最大たわみが, また最大周応力が, その円筒殻の半径方向からだけの静水圧を受ける場合の座屈周応力または座屈時のたわみに等しくなれば座屈する』ということである。

2-5. 殻板の降伏

一方, 歪速度は $w_{x=\frac{1}{2}}/Rt_0$ で定まり, 第2図から動的降伏点 σ_{yD} が定まる。今まで述べて来た弾性理論は, 座屈応力が σ_{yD} より小さい場合に限り成立するものである。座屈応力が σ_{yD} より大きい場合には, 殻板の変形が座屈条件を満足する前に, 周方向の全面降伏を起こすことになる。周方向に降伏しても軸方向にはまだ弾性的に生きているから, これが直ちに塑性座屈とは結びつかないが, これを境にして残留たわみが急増することと, 最高荷重すなわち塑性座屈との差は大きくないことから, 実用的に周応力が σ_{yD} に達するという条件を一つの限界にとつても良いと思われる。

2-6. 数値計算に必要な諸公式

2-5 項までに, 円筒殻の衝撃波に対する弾性座屈理論について述べたが, これの数値計算には, 火薬類の水中爆発による水中衝撃波の圧力およびその時間的な変化と, 端圧のない半径方向にのみ水圧を受ける円筒殻の座屈応力を与える式が必要である。これについて, それぞれ別々に説明しておく。

1) 水中衝撃波の圧力およびその時間的変化については H. G. Snay¹¹⁾ による次の式を用いる。

$$\begin{cases} P_0 = 1.55 \times 10^4 \left(\frac{a_0}{R} \right)^{1.18} & \text{ただし } 7 < \frac{R}{a_0} < 1000 \\ \frac{1}{\theta} = 1.5 \times \frac{a_0}{c} \left(\frac{R}{a_0} \right)^{0.18} \\ a_0 = 5.25 W^{\frac{1}{3}} \end{cases} \quad (18)$$

ただし P_0 : 最大圧力 (kg/cm) a_0 : 火薬の球相等半径 (cm)

R : 火薬中心から殻面までの距離 (cm)

c : 水中音速 (cm/sec) W : 火薬の重さ (kg)

P_0 の式については永井論文⁴⁾ にも与えられているが、これには衝撃圧力の時間的変化までは求められていない。 P_0 については、この永井の式と (18) 式との間にはほとんど差がないことから (18) 式の正確さを認定できるので、これを用いることとした。

2) 円筒殻の均等外圧による座屈を取り扱った研究は非常に多い。これらの中で、本論文による数値計算に必要なものは、周方向にのみ均等な外圧を受ける場合であり、これには有名な Mises の論文がある。ゆえに直ちにこの式を用いて宜しい。しかしこの式を用いると計算が煩雑であるので、適当な近似式を探すことにする。

軸方向にも均等な外圧を受ける円筒殻の座屈応力に関しては Wmdenburg¹²⁾ の式を挙げることができる。すなわち

$$\sigma_{cr} = 1.3 E \left(\frac{D}{l} \right) \left(\frac{h}{D} \right)^{1.5} \left(1 - 0.45 \frac{\sqrt{Dh}}{l} \right)^{-1} \quad (19)$$

で与えられる。徳川¹³⁾ 等はさらに簡略して (19) 式右辺最後の () を省略した式を提供している。 $\frac{\sqrt{Dh}}{l}$ が小さい場合には徳川式で十分正確であるが、潜水船内殻のような構造物ではこれを無視しない (19) 式を用いるのが良い。さて、本論文による数値計算に必要な周方向にのみ均等外圧を受ける場合には、2-4 項でも述べたように、軸方向にも均等外圧を受ける場合の $n^2 + \frac{\alpha^2}{2} - 1$ / $n^2 - 1$ 倍である。従つて、求める式は次のように表わされる。

$$\sigma_{cr} = 1.3 E \left(\frac{D}{l} \right) \left(\frac{h}{D} \right)^{1.5} \left(1 - 0.45 \frac{\sqrt{Dh}}{l} \right)^{-1} \frac{n^2 + \frac{\alpha^2}{2} - 1}{n^2 - 1} \quad (20)$$

$$\text{ここに } \begin{cases} n = \sqrt{\alpha} \left(\frac{3D}{h} \right)^{1/4} & (= \text{座屈波数}) \\ \alpha = -\frac{\pi D}{2l} \end{cases}$$

3 実験結果と本理論計算との比較

3-1. 埴田論文⁵⁾ による実物大模型実験

$D=550$ cm, $h=1.4$ cm, $l=70$ cm の円筒模型 (材料 Ms. $\sigma_{ys}=28$ kg/mm²) を深度 25 m (円筒心まで) の所に保持し、重量 148 kg の TNT を爆発させた場合の危害半径を 32 m~38 m と結論している。

本論文により、以下に計算を試みる。

(20) 式より $\sigma_{cr}=39.5$ kg/mm² たわみに換算して 0.516 cm, R をそれぞれ 30 m, 50 m と仮定し (18), (5) 式より ρ_0 , θ , t_0 , w_0 を求めると、次のごとくなる。

R (m)	P_0 (kg/cm ²)	θ (1/sec)	t_0 (sec)	w_0 (cm)
30	79.2	1.545×10^3	1.49×10^{-3}	0.498
50	44.5	1.405×10^3	1.57×10^{-3}	0.318

座屈限界たわみから初期深度圧によるたわみ 0.064 cm を差し引いたものと w_0 との関係から挿間法により R を求めると、35 m となり、実験結果とよく合致している。(7) 式より $\alpha_d l = 4.55$, 従つてこの場合にはフレームの効果を考える必要はない。また、歪速度は w_0/Rt_0 により 1.1 1/sec であるから第 2 図より $\sigma_{yD}=1.6 \times 28$ kg/mm² = 44.8 kg/mm² $> \sigma_{cr}$ となる。ゆえに明らかに座屈によりこわれることが判る。また、この円筒殻の時間的応答を、2-2 項に述べた理論によつて図示すれば、第 4 図のようなものとなる。

第4図 円筒殻板の時間的応答

3-2. 永井論文⁴⁾による小型模型実験

$D=105\text{cm}$, $h=0.45\text{cm}$, $l=13.5\text{cm}$ のA模型と, $l=10.5\text{cm}$ で他はすべてA模型と同様にして造られたB模型をそれぞれ深度30mの所に保持し, 重量10kgのTNTを爆発させて, 距離と永久凹損量とを計測し第5図のごとき結果を得たものである。なお模型材質はM.Sで $\sigma_{ys}=31\text{kg/mm}^2$ である。これを本論文により数値計算を行なつて見よう。3-1の場合と同様に $R=5\text{m}$, 10m について P_0 , θ , t_0 , w_0 を求めると

$R(\text{m})$	$P_0(\text{kg/cm}^2)$	$\theta(1/\text{sec})$	$t_0(\text{sec})$	$w_0(\text{cm})$
5	214	4.48×10^3	3.3×10^{-4}	0.357
10	97.5	3.96×10^3	3.47×10^{-4}	0.172

第5図 防衛庁実験との対応(その1)

以上の結果から歪速度を計算すれば、約 12 1/sec となり、第 2 図から $\sigma_{yD} \doteq 31 \text{ kg/mm}^2 \times 2 = 62 \text{ kg/mm}^2$ となる。

$$\text{一方 } \sigma_{cr} = \begin{cases} 0.00475 E \text{ (A 模型)} = 100 \text{ kg/mm}^2 \\ 0.00662 E \text{ (B 模型)} = 139 \text{ kg/mm}^2 \end{cases}$$

となり $\sigma_{cr} > \sigma_{yD}$ であるから、この場合には、3-1 の場合と異なり、弾性座屈を起こす前に、周方向の全面降伏により永久凹損量の急増し始める危害距離が存在することになる。

すなわち殻板に生ずる応力が σ_{yD} となるときのたわみ 0.155 cm から深度圧によるたわみ 0.01 cm を差し引いた 0.145 cm と w_0 との関係から R を求めると 10.7 m となる。

これを第 5 図に記入すれば、この距離では A 模型、B 模型とも略々同等の永久凹損を生じ、この距離より近づけば、A 模型、B 模型それぞれ別個の曲線に沿って急激にその凹損量を増していることが判る。

このことは、模型の形状寸法から決まる座屈応力ではなく、 σ_{yD} という模型の材質によりその危害距離が決まると予告した理論結果を極めてよく表現しているものである。

3-3. 永井論文⁴⁾による高張力鋼製小型模型実験

$D=105 \text{ cm}$, $h=0.62 \text{ cm}$, $l=15.2 \text{ cm}$ の円筒模型 (材質: HY 80 NB $\sigma_{ys}=72 \text{ kg/mm}^2$) を、深度 30 m, 150 m, 300 m の所に保持し重量 20 kg の TNT を爆発させて、距離と永久凹損量とを計測し第 6 図のごとき結果を得たものである。これを解析して見よう。まず前と同様に $R=5 \text{ m}$, 10 m , 15 m について P_0, θ, t_0, w_0 を求めると

第 6 図 防衛庁実験との対応 (その 2)

$R(\text{m})$	$P_0(\text{kg/cm}^2)$	$\theta(1/\text{sec})$	$t_0(\text{sec})$	$w_0(\text{cm})$
5	279	3.69×10^3	3.16×10^{-4}	0.385
10	127	3.28×10^3	3.34×10^{-4}	0.296
15	80	3.04×10^3	3.46×10^{-4}	0.165

(20) 式より $\sigma_{cr}=138 \text{ kg/mm}^2$, たわみに換算して 0.345 cm, この限界たわみから 30 m, 150 m, 300 m の深度圧による撓み 0.0064 cm, 0.032 cm, 0.064 cm を差し引いた 0.344 cm, 0.313 cm, 0.281 cm なるたわみと w_0 との関係から、フレームの効果を考えなければ、それぞれ座屈距離 7.58 m, 9.14 m, 10.57 m となる。

しかるに $\alpha_d l$ は約 3.2 であるから、この模型では明らかにフレームの影響を受けることになる。今これを評価して見よう。まずフレーム自身の直接衝撃波によるたわみは (6) 式の h の代りに $\frac{F}{b} \left(= \frac{0.62 \times 5.62}{0.62} \right)$ を代入し、 $t=t_0$ として深度 30 m のものについて計算すれば 0.09 cm となる。この時 $\delta_{x=0}$ は第 3 図より $3.44 \text{ cm} \times 0.6$ 即ち 0.206 cm であるから 0.09 cm は $0.44 \delta_{x=0}$ である。一方 (12) 式によつて殻板が最大たわみを生ずる時点 t_0 において $w_F/\delta_{x=0}$ は 1.325 となる。すなわちフレームは $t=t_0$ において $1.765 \delta_{x=0}$ だけたわむことになる。第 3 図より $\alpha_d l=3.2$ において $\delta_{x=0}/w_0$ は約 0.6 であるから、フレームは $1.06 w_0$ 即ち w_0 より 6% も大きくなることになる。すなわち $w_{x=\frac{l}{2}}$ も厳密には w_0 より若干大きくなることになるがその効果は小さいので無視し、結局フレームの効果を考えず簡単に (5) 式だけで十分近似できることが判つた。

また、歪速度は、最低で約 16 1/sec となり、ゆえに第 2 図より σ_{yD} は $72 \times 2 = 144 (\text{kg/mm}^2)$ であるから、 $\sigma_{yD} > \sigma_{cr}$ 即ち明らかに座屈による危害距離を有する。

したがって前に求めた座屈距離を第 6 図に記入すれば、これらの点において永久凹損量は急激に増加し始める

と共に、この点での残留たわみは略々同じ位になり、妥当な結果を与えているものと思われる。

4 む す び

4-1.

水中衝撃波を受ける円筒殻の座屈を含む危害距離は、本論文によりほぼ合理的に説明できた。水中衝撃波の圧力場においては、殻板に対しては音響学的減衰が甚だ大きくきくために、初期変形の影響を実用上考慮しなくても良いという事実が、理論の近似と展開法とを簡単なものとしている。

4-2.

実用的寸法比を有する円筒殻の、水中衝撃波による最大たわみおよびそれを生ずる時間は、近似的に簡単な(5)式によつて与えられる。またその時静的応答と異なり、フレームも殻板と同程度の最大たわみを生ずる可能性が充分にある。

4-3.

埴田論文⁵⁾に与えられている危害距離略算式は、浅深度において、実用上充分の精度を有することが判つた。従つて、本理論による数値計算を行なう場合、危害距離の見当をつけるのに大いに役立つ。

4-4.

永井論文⁴⁾は座屈後の残留たわみを求めるのに優れた論文であり、その中に殻板のたわみの時間的応答が計測されているが、今後、殻板とフレームとをそれぞれ分離して、おのおの独立のたわみを計測できるような実験が望まれる。

4-5.

第2図に示した鋼材の動特性図は、主として軟鋼、1部高張力鋼に対するものであり、材質が異なればその特性も異なつて来るものであるから、この種の実験研究も望まれる。

4-6.

本論文中に与えた危害距離は純粋に衝撃波の圧力場における座屈条件から論じたものであり、これだけでは残留たわみは少ないが、危害距離を超えると幾らかでも波状変形を残し、それはじ後のガスグローブによる圧力波によつて拡大されるので、衝撃波による座屈条件を限界条件に選んだものである。最後に本論文に引用させて頂いた実験およびその担当者に敬意を表する。

参 考 文 献

- 1) R. D. Mindlin, H. H. Bleich: "Response of an elastic cylindrical shell to a transverse step wave" J. A. M. Vol. 20 (1953)
- 2) P. G. Hodge: "The Influence of Blast Characteristics on the final Deformation of circular cylindrical shells" J. A. M. (Dec. 1956)
- 3) 鬼頭史城: "静的並びに衝撃の水圧力の作用を受ける薄肉円筒殻の水中振動について" 造船協会論文集第101号(昭32.8), 第102号(昭33.2)
- 4) 水井保: "円筒殻の衝撃外力による局部凹損実験の結果について" 造船協会論文集第117号(昭40.6) 同上 第119号(昭41.5)
- 5) 埴田清勝: "衝撃圧力を受ける薄肉円筒殻の強度について" 造船協会論文集第86号(昭28.2)
- 6) 本間康之: "衝撃圧力による円筒殻の Elastic Shell Buckling について" 造船協会論文集第118号(昭40.12)
- 7) M. J. Manjoine: "Influence of Rate of strain and Temperature on Yield Stresses of Mild Steel" J. A. M. Vol. 11 (1944, June)
- 8) G. E. Hudson: "A Theory of the Impulsive Plastic Motion of a Thin Diaphragm Normal to its Initial Plain" Part 18 of T. M. B Report R-254 (1944, June)
- 9) 本間, 坂元: "一樣外圧による切頭円錐の座屈について" 造船協会論文集第113号(昭38.6)
- 10) James. A. Nott: "Investigation on the influence of stiffener size on the Buckling Pressure of circular cylindrical shells under Hydrostatic Pressure" J. of shipresearch (1962, Oct.)
- 11) H. G. Snay: "Unterwasser-Explosion, Hydromechanische Vorgänge und Wirkung" Jahr. Schiff. Tech. Gesell. Bd 51 (1957)
- 12) Windenburg: "Collapse by Instability of Thin Cylindrical Shells under External Pressure" A. S. M. E. Vol. 56 (1934)
- 13) 徳川, 鬼頭: "弾性安定原論" 皇紀 2600 年 5 月, 217 頁