(昭和 42 年 5 月造船協会春季講演会において講演)

マトリックス法による船体構造 解析に関する研究 (Ⅱ)

正員 吉 識 雅 夫* 正員 川 井 忠 彦**
正員 吉 村 信 敏**

Matrix Method of Analysis of Ship Structure (Ⅱ)

By Masao Yoshiki, *Member*
Tadahiko Kawai, *Member*
Nobutoshi Yoshimura, *Member*

Summary

In this paper studies are made on the application of displacement method to the analysis of two-different types of problems in two dimensional theory of elasticity.

The first study is to develop the computer programming for stress analysis of mixed boundary value problems which are frequently encountered in engineering practice and yet reliable method of analysis is not well established. Taking a perforated square plate stretched in one direction by a certain prescribed edge displacements as an example, stress distribution around a hole was calculated. Comparative study of the results obtained with that of previous study in which the plate is stretched by uniformly distributed edge loads showed significant difference on the stress concentration factor and stress distribution.

Computer programming is also developed for analysis of thermal stress problem under arbitrary temperature distribution. Thermal stress distribution of a rectangular plate under a given temperature distribution was also studied and good agreement was confirmed with the results of previous investigation. Study on the application of this method to the initial stress problem such as residual stress problems due to welding or heat treatment is underway.

1 緒 言

前報⁽¹⁾において、船体構造のマトリックス法による解析の第一歩として、二三の平面応力問題をとりあげて研究し、マトリックス法による解析が極めて実用的であり且つ十分な精度を有する解を与えることを確認したが、本報においても引続き、マトリックス法の応用の基礎を固める意味において、二次元平面応力場における変位型境界値問題と熱応力問題をとり上げて研究を続行した。これらの問題はいずれも二次元弾性論における古典的問題ではあるが、これまで十分信頼し得る実用的解析法が確立されているとはいえないので、マトリックス変位法 (Displacement Method) による一般的解析法を研究し、二三の解析結果を求めてみたものである。

2 変位型境界値問題の変位法に基づく解析法

一般に従来の二次元弾性論においては、境界において外力の分布が規定される、いわゆる“応力型境界値問題”にその研究の大部分が集中し、境界における弾性体の変位が規定され、それに基づいて弾性体内に発生する応力分布や変位の分布を求める“変位型境界値問題”あるいは境界上のある部分では応力が規定され、他の部分では変位が規定されているような“混合境界値問題”についてはほとんど研究がなされていなかったといつても過言で

原稿受付 昭和 42 年 1 月 10 日

* 東京大学工学部

** 東京大学生産技術研究所

はない。簡単な一例をあげるならば切欠や孔のあいた試験片を試験機のチャックで押えて引張る場合である。この場合チャックを剛と考えてその弾性を無視すれば、試験機の作動により試験片の両端面に直接与えられるものは変位であり、その変位に基づいて試験片は引き伸され、二次元応力場が発生するのであつて、その結果両端面に分布する応力の合力が試験機の荷重計に間接的に記録されるのである。従つて試験片の両端面における外力分布は未知であり、二次元弾性論で良く仮定される境界応力一定の条件は、僅かに試験片が十分長く St. Venant の原理によつて切欠や孔の近傍の応力分布には両端面の境界条件の影響が、ほとんど現れられないと考えられる場合にのみ許容されるのである。

さてこのような“変位型”あるいは“混合境界値問題”は現在の所ほとんど解析的に解くことが不可能であり、エネルギー法あるいは階差法その他の数値解析法ですら未だ十分開発されていない現状である。変位法の大きな利点はこのような応力、変位あるいは混合境界値問題のいかににかかわらず、ほとんど一貫した手法であらゆる問題が取扱える点である。

マトリックス変位法の基本式は

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}_f \mathbf{d} \quad (1)$$

で与えられる。ここに $\mathbf{f}$ は接点に働く外力、 $\mathbf{d}$ は外力の作用線方向の変位、 $\mathbf{K}_f$ は構造の剛性マトリックスである。(1) はまた変位が拘束されている接点およびその接点力に関する行または列は計算に関係ないので、既に取り除いてあるものとする、 $\mathbf{d}$ は全て未知である。

応力型境界条件の問題では接点力の列ベクトル $\mathbf{f}$ が全て荷重条件から与えられるので (1) から

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}_f^{-1} \mathbf{f}$$

となり未知の変位 $\mathbf{d}$ を求めることができる。

しかし変位型境界条件の場合は、変位型境界線上の変位は (1) の関係を満足するばかりでなく、変位型境界条件を満たすためにある相互関係を満足せねばならない。(前述の例では、チャックの取り付け線が変位型境界線になり、その上の接点の変位は全て同一でなければならない。) さらに応力型境界条件の場合は外力の列ベクトル $\mathbf{f}$ の各項は荷重条件から与えられるが、変位型の場合は変位型境界線上の接点に働く外力の総和しか与えられず、そのおのおのの値は未知である。

そこで未知変位 $\mathbf{d}$ を変位型境界線上の接点の変位 $\mathbf{d}_2$ と、境界線上にないその他の接点の変位 $\mathbf{d}_1$ とに分け、またこれに対応して外力 $\mathbf{f}$ も $\mathbf{f}_2$ と $\mathbf{f}_1$ とに分ける。すなわち

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$\mathbf{d}_1$ に関する接点力 $\mathbf{f}_1$ は力の釣合から $\mathbf{f}_1 = \mathbf{0}$ となることに注意して (1) を分割すると

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

となる。

さて変位型境界線上の接点に変位型境界条件を満足するような仮想変位 $\mathbf{d}_2^*$ を与え、(前述の例では等変位であるから、たとえば $\{1, 1, 1, \dots, 1\}$ と与える)、その時に変位型境界線上にない他の接点の変位が $\mathbf{d}_1^*$ になつたとすると、(3) より

$$\mathbf{0} = \mathbf{K}_{11} \mathbf{d}_1^* + \mathbf{K}_{12} \mathbf{d}_2^* \quad (4)$$

となり、 $\mathbf{d}_1^*$ は

$$\mathbf{d}_1^* = -\mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{12} \mathbf{d}_2^* \quad (5)$$

で表わされる。

またこのときに変位型境界線上の接点に生ずべき仮想接点力 $\mathbf{f}_2^*$ は (3) より

$$\mathbf{f}_2^* = \mathbf{K}_{21} \mathbf{d}_1^* + \mathbf{K}_{22} \mathbf{d}_2^* = (\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{21} \mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{12}) \mathbf{d}_2^* \quad (6)$$

となる。さらに変位型境界線上の接点に生ずる仮想接点力の合力 $\mathbf{P}^*$ は

$$\mathbf{P}^* = \sum \mathbf{f}_2^* \quad (7)$$

である。ところで変位型境界条件の問題では境界線上の接点に働く力の合力が与えられるので (前述の例では荷重計の示す値)、その値を $\mathbf{P}$ とし

$$\mathbf{P} = \mathbf{C} \mathbf{P}^* \quad (8)$$

を満足する定数 $\mathbf{C}$ を求めれば、応力状態が線型範囲にある限り、境界線上に働く合力が $\mathbf{P}$ の場合の接点の変位 $\mathbf{d}$

よび境界線上の接点力は力学の比例の法則から

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= C d_1^* \\ d_2 &= C d_2^* \\ f_2 &= C f_2^* \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

となる。(9) から接点の変位が全て求まったので、これを用いて要素の応力、歪を計算するのは容易である。

筆者等は縦横比の比較的小さい有孔矩形板の応力集中問題に関して、荷重辺の境界条件がその応力分布に及ぼす影響について従来あまり研究結果が報告されていないので次にあげるような簡単な例題をここに述べた手法によって解析し、前報⁽¹⁾の応力型境界値問題および無限帯板の解と比較してみた。

第1図のような両端を強固な治具に溶接した有孔正方形板の応力状態を考えると、荷重端面上において板の x 方向変位 u は一定で且つ y 方向の変位 v は零と考えられ、その他の二辺および円孔周辺上では応力零の状態にある。このような混合境界条件を考慮に入れて、前述の演算を行なった結果を第2, 3図に示す。第2図は最小断面の σ_x の分布を種々の円孔の寸法について、応力型境界条件および有孔無限帯板の解とともにまとめたもので、結果は無限帯板の解に良く似ている。第3図は荷重端面上の σ_x の分布を示す。孔が小さければ境界線上の応力は等応力に近いが、孔が大きくなるとその影響が強く表われ、等応力の状態とはかなりかけ離れたものとなる。もちろん普通の引張試験においてはこの例のような正方形板でなく、かなり長い板を用いるので、応力集中のデーターとしては問題はないが、実際の構造には変位型境界条件に近い場合もかなりあり、このような問題に対しても実用的な解析結果が容易に得られることが、マトリックス法の長所の一つと考えられる。

3 熱応力の問題

近年宇宙ロケットや原子力船の開発計画の進行に伴って熱応力の解析が構造設計上重要視されるようになって来たが、マトリックス法は熱応力問題の解析においても非常に有効である。熱

第1図 治具にとりつけられた有孔正方形板
(混合境界値問題の一例)
正方形板の外部の境界条件
 $u(\pm a, y) = \pm \delta/2$
 $v(\pm a, y) = 0$
 $\sigma_y(x, \pm a) = 0, \tau_{xy}(x, \pm a) = 0$
 δ : 治具端面間の相対変位

第2図 最小断面における σ_x の分布
 $\bar{\sigma} \begin{cases} = \text{端面の等分布応力 (応力型の場合)} \\ = P/2at \end{cases}$ (変位型の場合)

第3図 荷重辺 (\$x=\pm a\$) における \$\sigma_x\$ の分布

応力解析の原理は、弾性学で研究されて来たが、平面応力場を例にとつて簡単に説明すると次のようになる。

(i) 与えられた平板が不均一温度分布を受けると熱変形を生ずるが、今この変形を適当な物体力および表面力を加えて完全に拘束したと仮定すると、平板は無歪の状態になるから

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \gamma_{xy} = 0$$

である。従つて Hook の法則から平板の各点には

$$\sigma_x^{(1)} = -\frac{\alpha T}{1-\nu}, \quad \sigma_y^{(1)} = -\frac{\alpha T}{1-\nu}, \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0$$

(α : 線膨張係数, T : 考えている点の温度上昇)

なる応力場が発生する。

(ii) つぎに (i) で求めた物体力、表面力の符号を逆にした力を加えて拘束を解放すれば、この場合通常の弾性計算によつて変位 (u, v), 歪 ($\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$), 応力 ($\sigma_x^{(2)}, \sigma_y^{(2)}, \tau_{xy}^{(2)}$) が求まる。変位および歪はここで求めたものがそのまま解であるが、応力成分については

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)} \\ \sigma_y &= \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)} \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)} = \tau_{xy}^{(2)} \end{aligned}$$

となる。

第4図 熱を受ける三角形平板要素

以上のような手法はマトリックス法においても、そのまま適用できる⁽²⁾。その手法を列举すると

(I) まず有限要素が熱を受けて膨張 (あるいは収縮) しようとするとき、これを熱を受ける以前の状態にしておくための接点に加えるべき力を求める。それにはまず拘束が全くない場合の要素 g の接点の変位 q_g を求める必要がある。第4図のような三角形平板要素を考え、温度 T は要素内で一樣とすると、熱変形の性質から

$$\left. \begin{aligned} u_2 - u_1 &= \alpha T (x_2 - x_1) \\ u_3 - u_1 &= \alpha T (x_3 - x_1) \\ v_2 - v_1 &= \alpha T (y_2 - y_1) \\ v_3 - v_1 &= \alpha T (y_3 - y_1) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

が成立する。ここに u_i, v_i はそれぞれ i 点の x 方向, y 方向の変位である。(10) 式をマトリックスで表わすと

$$q_g = q_g^1 + q_g^2 \quad (10-a)$$

ここに

$$\mathbf{q}_g = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_g^1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1 \\ u_1 \\ u_1 \\ u_1 \\ u_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_g^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha T(x_2 - x_1) \\ \alpha T(x_3 - x_1) \\ 0 \\ \alpha T(y_2 - y_1) \\ \alpha T(y_3 - y_1) \end{bmatrix}$$

無歪状態，すなわち接点変位＝零の状態を作るためには，要素 g の剛性マトリックスを $\mathbf{K}_g$ とすれば，列ベクトル

$$\mathbf{f}_g = -\mathbf{K}_g \mathbf{q}_g \quad (11)$$

なる接点力を加えればよいから (11) に (10-a) を代入すると

$$\mathbf{f}_g = -\mathbf{K}_g \mathbf{q}_g^1 - \mathbf{K}_g \mathbf{q}_g^2 \quad (11-a)$$

となるが右辺の第一項は， $\mathbf{q}_g^1$ が剛体変位を表わすので零となり結局

$$\mathbf{f}_g = -\mathbf{K}_g \mathbf{q}_g^2 \quad (12)$$

が求まる。この状態での要素 g の応力は

$$(\sigma_x)_g^I = -\frac{\alpha ET}{1-\nu}, \quad (\sigma_y)_g^I = -\frac{\alpha ET}{1-\nu}, \quad (\tau_{xy})_g^I = 0 \quad (13)$$

である。この操作を全要素について行なうと，変形を拘束するために必要な接点力が全て求まる。

(II) (I) で求めた接点力の符号を変えたものが，構造に加わっているものとして，通常のマトリックス法による演算を行ない，変位，歪，応力 $((\sigma_x)_g^{\text{II}}, (\sigma_y)_g^{\text{II}}, (\tau_{xy})_g^{\text{II}})$ を求める。変位と歪はそのまま解となるが，応力については

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x)_g &= (\sigma_x)_g^I + (\sigma_x)_g^{\text{II}} \\ (\sigma_y)_g &= (\sigma_y)_g^I + (\sigma_y)_g^{\text{II}} \\ (\tau_{xy})_g &= (\tau_{xy})_g^{\text{II}} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

から求められる。熱の他に荷重が加わっている場合には (II) の計算の際に考慮すれば良いことになる。要素の温度の定義の仕方もいろいろ考えられるが，ここでは要素の温度をそれを構成する三接点の温度の平均値で表わすことにした。筆者等の開発したプログラミングでは上記の作業を全く自動的に行ない静的応力場解析に必要な接点の座標・要素の構成等のデーターの他に各接点の温度を与えると，熱による変形・歪・応力を与え，同時に外荷重を加えた場合も解析できるようになっている。

(注) 要素を無歪の状態にするために必要な接点力は次のようにしても求められる。全く拘束のない場合の歪成分は，熱膨張の原理から

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \alpha T, \quad \gamma_{xy} = 0 \quad (15)$$

であり，歪と接点変位の関係は

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 & y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

ここに A : 三角形の面積

第5図 剛体変位の拘束

第6図 y 方向にのみ変化する温度分布を受ける周辺自由の矩形板

で表わされる⁽¹⁾。さて全く拘束のない場合の要素 g の接点の変位 q_g を求めるのであるが、まず剛体変位を除外するために、この要素の接点を第5図のように拘束し、 $u_1=v_1=v_2=0$ とする。このように接点の変位の一部を拘束しても要素は自由に變形できるはずである。この条件を入れて (16) 式の右辺を整理し、左辺に (15) 式を代入すると

$$\begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_3-y_1, & y_1-y_2, & 0 \\ 0, & 0, & x_2-x_1 \\ x_1-x_3, & x_2-x_1, & y_1-y_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

(17) 式を u_2, u_3, v_3 について解くと

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= \alpha T \{ (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 \} / (x_2-x_1) \\ u_3 &= \alpha T \{ (x_3-x_1)(x_2-x_1) \\ &\quad + (y_3-y_1)(y_2-y_1) \} / (x_2-x_1) \\ v_3 &= 2A\alpha T / (x_2-x_1) \\ u_1 &= v_1 = v_2 = 0 \quad \text{ただし } x_2 \neq x_1 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

となり、 K_g を用いて接点力を求めることができて、(12) 式から求めた値と一致する。この考え方は熱応力に限らず一般の固有歪が存在する場合にも容易に適用されるはずで、固有応力理論と結びつけて、ガス切断・溶接等の熱塑性加工を受けた構造の残留応力・残留変形の推定が可能と思われ、現在研究中である。

例として第6図に示すような縦横比2の周辺自由の矩形板に

$$T(x, y) = 4T_0 \left(\frac{L^2}{4} - y^2 \right) / L^2$$

なる温度分布を与えた場合を考える。対称性から板の右上半部だけを考慮すれば良い。単純な

第7-a図 熱応力の分布 (σ_x)

第7-b図 熱応力の分布 (σ_y)

第7-c図 熱応力の分布 (τ_{xy})

形状であるが、温度分布が板の上端で急激に変化するから、上端附近で要素を細かくすることを念頭において、接点数：273、要素数：480として計算を行なった。求めた解を用いて熱応力の等高線を描き、Przemieniecki⁽³⁾の精密解と共に立体的に表わしたのが図7-a~cであり、満足すべき結果が得られた。またこれはエネルギー法による解⁽⁴⁾とも良く一致する。計算時間は東京大学大型計算機センターのHITAC-5020Eを用いて138秒であつた。

4 結 論

前報に引き続きマトリックス法による二次元

変位型境界値問題および熱応力の問題の解析法について研究し、二三の簡単な例題を解いてその実用性を確認した。弾性平面応力場の問題には、更に平板の面内振動や残留応力場、また波動伝播の問題等があるが、現在併行して研究が行なわれているので、近い将来その結果について報告できるものと思われる。

参 考 文 献

- (1) 吉識雅夫・川井忠彦・吉村信敏, “マトリックス法による船体構造解析に関する研究(I)” 造船協会論文集 120 号 (1966)
 - (2) H.C.Martin “Plane Stress Calculation by the Direct Stiffness Method” Boeing Structural Analysis Unit Research Memorandum No. 47 (Aug. 1962)
 - (3) J.S.Przemieniecki “Thermal Stress in Rectangular Plates” The Aeronautical Quartely, (Feb. 1959) p 65-p 78.
 - (4) 川井忠彦 “熱応力” 第2回生研講習会テキスト (1964)
-